تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العمانية

موقع
المناهج العمانية

www.alManahj.com/om

الملف ملخص شرح درس مجموع المتتالية الهندسية

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر

روابط مواد الصف الحادي عشر على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول المدرس م

المتتالية الهندسية: أ، أر، أر^{٢}، .....

يمكن إيجاد مجموع ن حداً من حدود هذه المتتالية باستخدام احدى الصيغ التالية

$$\frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١}$$

$$\frac{أ(١-ر^{ن})}{١-ر}$$

أمثلة وتمارين

(١) أوجِد مجموع أول ثمانية حدود في كل مما يأتي

٣+ ٦ + ١٢ + ٢٤+	١-٢ +٤ – ٨ .....
أ = ٣	أ=١
$ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٦}{٣} = ٢$	$ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{-٢}{١} = -٢$
$ج_{٨} = \frac{٣(٢^{٨}-١)}{٢-١} = ٧٦٥$	$ج_{٨} = \frac{١((-٢)^{٨}-١)}{-٢-١} = -٨٥$

(٢) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ٠,٥ ، ١، ٢، ٤، فأوجِد أقل عدد ممكن من الحدود يكون مجموعها أكبر من ١٠٠٠٠٠٠

الحل

أ = ٠,٥ $ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{١}{٠,٥} = ٢$

$$ج_{ن} = \frac{\frac{١}{٢}(٢^{ن}-١)}{٢-١} > ١٠٠٠٠٠٠$$

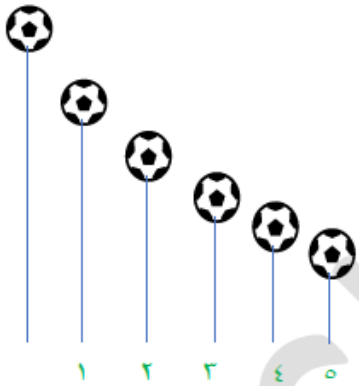
$$\frac{١}{٢}(٢^{ن}-١) > ١٠٠٠٠٠٠ \leftarrow ٢^{ن}-١ > ٢٠٠٠٠٠٠$$

$٢^{ن} > ٢٠٠٠٠٠١$ بالتجريب لقيم ن ن= ٢١

(٣) تمّ رمي كرة رأسيًا إلى الأعلى (من الأرض)، وصلت الكرة إلى ارتفاع ٨ م، ثم ارتطمت بالأرض وارتدّت. بعد كل ارتداد ترتفع $\frac{٣}{٤}$ الارتفاع السابق لهذا الارتداد.

- اكتب عبارة جبرية لارتفاع الكرة بعد ارتطامها ن مرة بالأرض.
- أوجِد مجموع المسافات التي تخطّتها الكرة من الرمية الأولى حتى الارتطام الخامس بالأرض.

الحل



كل رقم يشير الى رقم الارتطام بالأرض

اول ارتفاع وصلت اليه الكرة = ٨م

الحد الأول = ٨

$ر = \frac{٣}{٤}$

$ح_ن = أ\ ر^{ن-١}$

$\therefore ح_ن = ٨ (\frac{٣}{٤})^{ن-١}$

المسافات التي تخطتها الكرة حتى الارتطام الخامس: أي لن تحسب المسافة بعد الارتطام الخامس

كل مسافة تضرب × ٢ وذلك نتيجة الصعود والهبوط

عدد حدود المتتالية الهندسية حتى الارتطام الخامس: ٥ حدود (لاحظ المخطط السابق)

$$\therefore جـ_٥ = \frac{٨(١ - (\frac{٣}{٤})^{٥})}{١ - \frac{٣}{٤}} \times ٢$$

$$\therefore جـ_٥ = \frac{٧٨١}{٣٢} \times ٢$$

$\therefore$ مجموع المسافات التي تخطّتها الكرة من الرمية الأولى حتى الارتطام الخامس بالأرض = $\frac{٧٨١}{١٦}$

Math Show

(٤) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية يساوي ٢٤ والحدّ الثالث هو ١٢ (س+١).

- أوجِد بدلالة س الحدّ الأول في المتتالية
- إذا علمت أن مجموع أول ثلاثة حدود هو ٧٦ ، فأوجِد قيم س الممكنة

الحل

أ ر = ٢٤ (١)

أ ر^{٢} = ١٢(س+١) (٢)

بقسمة (٢) على (١) نحصل على ر

$$\frac{\text{ر}^{٢}}{\text{ر}} = \frac{١٢(\text{س}+١)}{٢٤}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{(\text{س}+١)}{٢}$$

بالتعويض في المعادلة (١) للحصول على قيمة أ

$$\therefore \text{أ} = \frac{(\text{س}+١)}{٢} = ٢٤$$ بالضرب التبادلي

$$\therefore \text{أ} = \frac{٤٨}{\text{س}+١}$$ (المطلوب الأول)

مجموع أول ثلاثة حدود = ٧٦

$$\therefore \frac{٤٨}{\text{س}+١} + ٢٤ + ١٢(\text{س}+١) = ٧٦$$ بالضرب × (س+١)

٤٨ + ٢٤(س+١) + ١٢(س+١)^{٢} = ٧٦ (س+١)

١٢(س+١)^{٢} + ٢٤(س+١) + ٤٨ − ٧٦(س+١) = ٠

١٢(س+١)^{٢} - ٥٢(س+١)+٤٨ = ٠ بالقسمة على ٤

٣(س+١)^{٢} - ١٣(س+١) + ١٢ = ٠ بوضع س+١ = ص والتحليل

٣ص^{٢} − ١٣ ص + ١٢ = ٠

(٣ص − ٤) (ص-٣) = ٠

ص= $\frac{٤}{٣}$ ص= ٣

س+١ = $\frac{٤}{٣}$ س+١= ٣ س= $\frac{١}{٣}$ س= ٢

Math Show

(٥) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية يساوي تسعة أمثال الحدّ الأول، وكان مجموع أول أربعة حدود فيها يساوي ك مرة الحدّ الأول، فأوجِد قيم **ك** الممكنة

الحل

$أ ر^{٢} = ٩ أ$ بالقسمة على أ

$ر^{٢} = ٩$

$ر = \pm ٣$

عند ر = ٣

$$ج_{٤} = \frac{أ(١ - ٣^{٤})}{١ - ٣}$$

$ك أ = ٤٠ أ$

$ك = ٤٠$

عند ر = -٣

$$ج_{٤} = \frac{أ(١ - (-٣)^{٤})}{١ - (-٣)}$$

$ك أ = -٢٠ أ$

$ك = -٢٠$

---

(٦) تقدّم شركة تبرّعًا سنويًا لجمعية خيرية. وتتزايد قيمة التبرّع بمقدار ١٠ % سنويًا. إذا علمت أن قيمة التبرّع سنة ٢٠١٠ م تساوي ١٠٠٠٠ ريال عُماني، فأوجد:

- قيمة التبرّع سنة ٢٠١٦ م.
- مجموع التبرّعات من سنة ٢٠١٠ م حتى ٢٠١٦ م.

الحل

ر = مقدار المضاعفة للمبلغ السابق (١٠٠٪ + ١٠٪) = ١,١

أ = ١٠٠٠٠

في عام ٢٠١٦ هو التبرع السابع

$ح_{٧} = أ ر^{٦}$

$ح_{٧} = ١٠٠٠٠ (١,١)^{٦}$

$ح_{٧} = ١٧٧١٥,٦١$ ريال

$$ج_{٧} = \frac{١٠٠٠٠(١ - ١,١^{٧})}{١ - ١,١}$$

= ٩٤٨٧١,٧١ ريال

Math Show

(٧) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ) والأساس (ر) ومجموع أول ن حدًّا جـ ن بيّن أن

$$\text{ر}^{\nu٢} = \frac{\text{جـ}_{\nu٢} - \text{جـ}_{\nu٣}}{\text{جـ}_{\nu}}$$

الحل

$$\text{جـ}_{\nu٣} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\nu٣})}{١ - \text{ر}}$$

$$\text{جـ}_{\nu٢} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\nu٢})}{١ - \text{ر}}$$

$$\text{جـ}_{\nu} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\nu})}{١ - \text{ر}}$$

نلاحظ تكرار المقطع

$$\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$$

بالتالي عند كتابة أي عبارة جبرية أو كسر جبري يحتوي على جـ٣ن، جـ٢ن، جـ ن

يتم قسمة جميع الحدود على هذا المقطع

بقسمة جميع حدود الكسر $\frac{\text{جـ}_{\nu٢} - \text{جـ}_{\nu٣}}{\text{جـ}_{\nu}}$ على $\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

$$\frac{(١ - \text{ر}^{\nu٣}) - (١ - \text{ر}^{\nu٢})}{(١ - \text{ر}^{\nu})}$$

$$\frac{١ - \text{ر}^{\nu٣} - ١ + \text{ر}^{\nu٢}}{(١ - \text{ر}^{\nu})}$$

$$\frac{\text{ر}^{\nu٢} - \text{ر}^{\nu٣}}{(١ - \text{ر}^{\nu})} = \frac{\text{ر}^{\nu٢}(١ - \text{ر}^{\nu})}{(١ - \text{ر}^{\nu})} = \text{ر}^{\nu٢}$$

Math Show

(٨) إذا كانت المتتالية ١، ١، ٣، $\frac{١}{٣}$، ٩، $\frac{١}{٩}$، ٢٧، $\frac{١}{٢٧}$، ٨١، $\frac{١}{٨١}$ .....

فأثبت أن مجموع أول ٢ن حدًا في المتتالية هو $\frac{١}{٢}$ (٢+ ٣^{ن} -٣ $^{١-ن}$)

الحل

يمكن تقسيم هذه المتتالية الى متتاليتين هندسيتين

(١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، .....)

الحد الأول = ١

الأساس = ٣

$$جـ_{ن} = \frac{١(١ - ٣^{ن})}{١ - ٣}$$

$$جـ_{ن} = \frac{(١ - ٣^{ن})}{٢}$$

جـ ن = $\frac{١}{٢}$(٣ ن − ١) (١)

(١، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$، $\frac{١}{٢٧}$، $\frac{١}{٨١}$، .....)

الحد الأول = ١

الأساس = $\frac{١}{٣}$

$$جـ_{ن} = \frac{١(١ - (\frac{١}{٣})^{ن})}{١ - \frac{١}{٣}}$$

$$جـ_{ن} = \frac{(١ - (\frac{١}{٣})^{ن})}{\frac{-٢}{٣}}$$

جـ ن = $\frac{١}{٢}$ × -٣ ($\frac{١}{٣}^{ن}$ − ١) ضربنا × مقلوب المقام

جـ ن = $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{٣}^{ن}$ × -٣ +٣) ضربنا (-٣) داخل القوس

عندما نقلب أي كسر تتغير إشارة الأس

جـ ن = $\frac{١}{٢}$(٣ $^{-ن}$ × -٣ +٣) عند الضرب نجع الاسس

جـ ن = $\frac{١}{٢}$(- ٣ $^{-ن+١}$ +٣)

جـ ن = $\frac{١}{٢}$(- ٣ $^{١-ن}$ +٣) (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

جـ ٢ن = $\frac{١}{٢}$(٣ ن − ١ - ٣ $^{١-ن}$ +٣)

جـ ٢ن = $\frac{١}{٢}$(٣ ن - ٣ $^{١-ن}$ +٢)

(٩) ليكن جـ ن = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ... إلى ن حدًا

اثبت أن جـ ن = $\frac{١٠^{ن+١} - ١٠ - ٩ن}{٩}$

الحل

جـ ن = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ...

بضرب الصيغة × ٩

٩ جـ ن = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ٩٩٩٩٩ + ...

٩ جـ ن = (١٠-١) + (١٠٠-١) + (١٠٠٠-١) + (١٠٠٠٠-١) + ...

٩ جـ ن = (١٠ + ١٠٠ + ١٠٠٠ + ١٠٠٠٠ + ...) – (١ +١+١ + ١ .....)

متسلسلة هندسية حدها الأول ١٠ وأساسها ١٠ | ١ مكرر ن من المرات

$٩جـ_ن = \frac{١٠(١٠^{ن} - ١)}{١٠ - ١} - ن$ | بضرب ١٠ داخل القوس

$٩جـ_ن = \frac{(١٠^{ن+١} - ١٠)}{٩} - ن$ | بتوحيد المقامات على ٩ والتجميع

$٩جـ_ن = \frac{(١٠^{ن+١} - ١٠) - ٩ن}{٩}$ | بالقسمة على ٩

$جـ_ن = \frac{١٠^{ن+١} - ١٠ - ٩ن}{٨١}$