عرض شفوي عن الذكاء الاصطناعي وتطوراته الحديثة

٣-٦ معكوس المصفوفة

العدد × معكوسه = المحايد الضربي

$1 = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٣}$

$I = A^{-1} \times A$

نتيجة ٩

معكوس المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ من الرتبة (٢ × ٢) هو $\underline{أ}^{-1} = \frac{١}{أد - ب جـ} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$

حيث (أ د − ب جـ) يمثّل محدد المصفوفة، أ د − ب جـ ≠ صفر

عكس الإشارة

المحدد Δ

$\frac{1}{\Delta} \times \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

إذا كان Δ = صفر
لا يوجد معكوس

تمارين ٦-٣

١) أوجِد المعكوس لكل مصفوفة من المصفوفات الآتية:

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ -٢ & -٥ \end{pmatrix}^{-1} = ?$

$\Delta = (١ \times -٥) - (-٢ \times ٧)$

$\Delta = -٥ + ١٤ = ٩$

المعكوس $= \frac{1}{٩} \begin{pmatrix} -٥ & -٧ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -٨ & ١٢ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٣٦ - (-١٦) = ٥٢$

المعكوس $= \frac{1}{٥٢} \begin{pmatrix} ١٢ & -٢ \\ ٨ & ٣ \end{pmatrix}$

جـ $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

$\Delta = -١٦ - ١٥ = -٣١$

المعكوس $= \frac{-1}{٣١} \begin{pmatrix} -٤ & -٥ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$

$\Delta = ٠ - ٢٤ = -٢٤$

المعكوس $= \frac{-1}{٢٤} \begin{pmatrix} ١١ & -٣ \\ -٨ & ٠ \end{pmatrix}$

سؤال على الطاير: إذا كانت $\underline{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، فأوجد $\underline{أ}$.

$\Delta = ٤ - ٦ = -٢$

$\underline{A} = \frac{-1}{٢} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

د(س) = ٣س − ١
أوجد د$^{-1}$(س)

إذا كانت د$^{-1}$(س) = $\frac{س+١}{٥}$
أوجد د(س)

٢) أ) أوجِد قيمة الثابت ك، حيث لا يوجد معكوس للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ك \end{pmatrix}$.

$\Delta = ٠$

$\Delta = ٢ك - ٥ \times ٣ = ٠$

$٢ك - ١٥ = ٠$

$٢ك = ١٥$

$ك = \frac{١٥}{٢}$

المصفوفة المحايدة التي لا تؤثر في عملية الضرب

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢×٢ هي $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٣×٣ هي $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

مثلاً:

$\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

ب) إذا علمت أن ك = ٨، فأوجِد المصفوفة ب حيث $ب \times أ^{٢} = م$

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

$ب \times أ^{٢} = م$

$ب \times أ \times \cancel{أ} \times \cancel{أ^{-١}} = م \times أ^{-١}$

$ب \times \cancel{أ} \times \cancel{أ^{-١}} = أ^{-١} \times أ^{-١}$

$ب = أ^{-١} \times أ^{-١}$

$\Delta = ٢ \times ٨ - ٥ \times ٣ = ١$

$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore ب = أ^{-١} \times أ^{-١}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٧٩ & -٣٠ \\ -٥٠ & ١٩ \end{pmatrix}$

مثال ٦

أوجِد المصفوفات ب، ج، حيث $أ \times ب = م$، $ب \times ج = أ$، $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$.

$أ \times ب = م$

لا تؤثر في الضرب

$\cancel{أ^{-١}} \times \cancel{أ} \times ب = أ^{-١} \times م$

$ب = أ^{-١}$

نوجد $أ^{-١}$: $\Delta = ١$ $\therefore$ $أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore ب = \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

حل آخر:

نوجد $ب^{-١}$

$\Delta = ١$

$ب^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

$ب^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore ج = ب^{-١} \times أ$

$\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$

$ب \times ج = أ$

$\cancel{ب^{-١}} \times \cancel{ب} \times ج = ب^{-١} \times أ$

$ب = أ^{-١}$ معكوس ب = معكوس $أ^{-١}$ = أ

$ج = ب^{-١} \times أ$

$ج = أ \times أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢٤ \\ ١٦ & ٥٥ \end{pmatrix}$

٣) إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$، فأوجِد المصفوفة $\underline{ج}$ حيث $\underline{أ} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{م}$

$$\underline{م} = \underline{ب} \times \underline{ج} \times \underline{أ}$$

$$\underline{م} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{ب} \times \underline{ج} \times \cancel{\underline{أ}} \times \cancel{\underline{أ}^{-1}}$$

$$\underline{أ}^{-1} = \underline{ب} \times \underline{ج}$$

$$\underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1} = \cancel{\underline{ب}^{-1}} \times \cancel{\underline{ب}} \times \underline{ج}$$

$$\underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{ج}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} -1 = \underline{ب}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{15} = \underline{أ}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} -1 \times \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{15} = \underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{ج} \quad \therefore$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \frac{1}{15}- = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{15}- =$$

طريقة حل أخرى بالاستفادة من النتيجة (١٠)

$$(\underline{أ} \times \underline{ب})^{-1} = \underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1} = \underline{ج}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{أ} \times \underline{ب}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \frac{1}{15}- = (\underline{أ} \times \underline{ب})^{-1} \quad \therefore$$

كتاب النشاط

$ا^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن ا = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، فأوجد:

أ ب عندما ا × ب = م

$م \times ا^{-1} = ب \times \cancel{ا} \times \cancel{ا^{-1}}$

$ا^{-1} = ب$

$\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix} \frac{١}{٢} = ب$

ب ج عندما ج × ا = م

$ا^{-1} \times م = \cancel{ا^{-1}} \times \cancel{ا} \times ج$

$ا^{-1} = ج$

$\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix} \frac{١}{٢} = ج$

ج ء عندما $ا^{٢}$ × ء = م

$م \times ا^{-1} = ء \times ا \times \cancel{ا} \times \cancel{ا^{-1}}$

$ا^{-1} \times ا^{-1} = ء \times \cancel{ا} \times \cancel{ا^{-1}}$

$ا^{-1} \times ا^{-1} = ء$

$\begin{pmatrix} -١٤ & ١٩ \\ ٢٦ & -٣٥ \end{pmatrix} \frac{١}{٤} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix} \frac{١}{٢} \times \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix} \frac{١}{٢} = ء$

د هـ عندما ا × هـ × ا = م

$م \times ا^{-1} = ا \times هـ \times \cancel{ا} \times \cancel{ا^{-1}}$

$ا^{-1} \times ا^{-1} = \cancel{ا^{-1}} \times \cancel{ا} \times هـ$

$ا^{-1} \times ا^{-1} = هـ$

$\begin{pmatrix} -١٤ & ١٩ \\ ٢٦ & -٣٥ \end{pmatrix} \frac{١}{٤} = هـ$

٣) إذا علمت أن ا = $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ا × ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة ب.

ملاحظة

$م = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

$٢م = ٢\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

$٣م = ٣\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

$\vdots$

$٥م = ٥\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

$(٢م)^{-1}$

$٥م = ب \times ا$

$٥م \times ا^{-1} = ب \times \cancel{ا} \times \cancel{ا^{-1}}$

$ا^{-1} \times ٥ = ب$

$\therefore \quad ا^{-1} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٧ & ٦ \\ ٥ & -٤ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -٧ & ٦ \\ ٥ & -٤ \end{pmatrix} \frac{١}{٢} \times ٥ = ب$

$\begin{pmatrix} -٧ & ٦ \\ ٥ & -٤ \end{pmatrix} \frac{٥}{٢} =$

٥) إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

أ أوجِد المصفوفة $\underline{أ}^2$

$\underline{أ}^2 = \underline{أ} \times \underline{أ}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\underline{أ}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

ب بيّن أن $\underline{أ}(\underline{أ} - 5\underline{م}) = 2\underline{م}$

الطرف الأيمن   الطرف الأيسر

الطرف الأيمن

$\underline{أ}(\underline{أ} - 5\underline{م})$

$\underline{أ}^2 - \underline{أ} \times 5\underline{م}$

$\underline{أ}^2 - 5\underline{أ}$

$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 2\underline{م} =$ الطرف الأيسر

ج استخدم المعادلة في الجزئية (ب) لتبيّن أن $\underline{أ}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\cancel{\underline{أ}^{-1}} \times \cancel{\underline{أ}}(\underline{أ} - 5\underline{م}) = 2\underline{م} \times \underline{أ}^{-1}$

$\underline{أ} - 5\underline{م} = 2\underline{أ}^{-1}$

نضرب الطرفين $\times \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \times (\underline{أ} - 5\underline{م}) = \cancel{2}\underline{أ}^{-1} \times \cancel{\frac{1}{2}}$

$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2}(\underline{أ} - 5\underline{م})$

$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]$

$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ نخرج (−)

$\underline{أ}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

وهو المطلوب

معكوس مصفوفة من الرتبة (٣ × ٣):

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

الحل بطريقة المشاريخ

٤) أوجد المعكوس للمصفوفة أ = $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

أولاً: نوجد المحدد Δ

$\Delta = 0 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\Delta = 18$

ثانياً: نوجد المصفوفة المساندة

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{+}-4 & {}^{-}-1 & {}^{+}7 \\ {}^{-}-2 & {}^{+}4 & {}^{-}8 \\ {}^{+}4 & {}^{-}1 & {}^{+}11 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المساندة

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -8 \\ 4 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{18} \times \begin{pmatrix} 11 & -8 & 7 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

كتاب النشاط

٤) أوجِد معكوس المصفوفة في كل مما يأتي:

أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ -١ & ١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

أولاً: نحسب Δ

$$\Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} - ٠ \times \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} + ٢ \times \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١ \times ١ - ٠ + ٢ \times -٤ = ١ - ٨ = -٧$$

ثانياً نوجد المصفوفة المسايرة

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{+}{١} & \overset{-}{-٥} & \overset{+}{-٤} \\ \overset{-}{-٢} & \overset{+}{-٤} & \overset{-}{١} \\ \overset{+}{-٢} & \overset{-}{٣} & \overset{+}{١} \end{pmatrix}$$

المصفوفة المسايرة هي

$$\begin{pmatrix} ١ & ٥ & -٤ \\ ٢ & -٤ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{-١}{٧} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٢ \\ ٥ & -٤ & -٣ \\ -٤ & -١ & ١ \end{pmatrix}$$

ب) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

أولاً

$$\Delta = 0 \times \left| \quad \right| + 0 \left| \quad \right| - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

ثانياً نحسب المصفوفة المساندة

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{6} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{-3} & \overset{-}{-3} \\ \overset{+}{-4} & \overset{-}{-6} & \overset{+}{0} \end{pmatrix}$$

المصفوفة المساندة هي

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \ \text{ب}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -6 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

٦) إذا علمت أن المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$، فأوجِد:

أ) المصفوفتَين $\underline{أ}^٢$، $\underline{أ}^٣$

ب) قيمة ك بحيث يكون $\underline{أ}^٣ - ك\,\underline{أ}^٢ + ٢\underline{أ} - ٤\underline{م} = ٠$

ج) المصفوفة $\underline{أ}^{-١}$

أ) $\underline{أ}^٢ = \underline{أ} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$

$\underline{أ}^٣ = \underline{أ}^٢ \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ١٦ \\ ٦ & ٤ & ٨ \end{pmatrix}$

ب) $\underline{أ}^٣ - ك\,\underline{أ}^٢ + ٢\underline{أ} - ٤\underline{م} = ٠ \Leftarrow \underline{أ}^٣ + ٢\underline{أ} - ٤\underline{م} = ك\,\underline{أ}^٢$

$\therefore ك\,\underline{أ}^٢ = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ١٦ \\ ٦ & ٤ & ٨ \end{pmatrix} + ٢ \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

$\therefore ك\,\underline{أ}^٢ = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ١٦ \\ ٦ & ٤ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$

$\therefore ك\,\underline{أ}^٢ = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ & ١٨ \\ ٦ & ٦ & ٦ \end{pmatrix}$

$ك \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ١٢ \\ ١٢ & ٦ & ١٨ \\ ٦ & ٦ & ٦ \end{pmatrix}$

$ك \times ١ = ٣$

$ك = ٣$

$٢ك = ٦ \Leftarrow ك = ٣$

★ **٧)** إذا علمت أن $\underline{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$، فأوجِد المصفوفة $\underline{ج}$ حيث $\underline{أ} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = \underline{م}$

نفس السؤال رقم (٣)

$$\cancel{أ^{-1}} \times \cancel{\underline{أ}} \times \underline{ج} \times \underline{ب} = أ^{-1} \times \underline{م}$$

$$\underline{ج} \times \cancel{\underline{ب}} \times \cancel{ب^{-1}} = \underline{أ^{-1}} \times ب^{-1}$$

$$\underline{ج} = أ^{-1} \times ب^{-1}$$

الطريقة (١)

$$أ^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ب^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{ج} = أ^{-1} \times ب^{-1}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2 & -8 & -8 \\ -3 & -2 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

الطريقة (٢)

بالاستفادة من النتيجة (١)

$$\underline{ج} = أ^{-1} \times ب^{-1} = (ب \times أ)^{-1}$$

$$\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$(ب \times أ)^{-1}$$

$$\underline{ج} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2 & -8 & -8 \\ 3 & -2 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

نتيجة ١٠

وبصورة عامة في المصفوفات غير المنفردة: $(أ \times ب)^{-1} = ب^{-1} \times أ^{-1}$،

ولكن $(أ \times ب)^{-1} \neq أ^{-1} \times ب^{-1}$

تدريب: $(\underline{أ} \times \underline{ب} \times \underline{ج})^{-1} = \underline{ج}^{-1} \times \underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1}$

$(\underline{أ} \times \underline{ب} \times \underline{ج} \times \underline{د})^{-1} = \underline{د}^{-1} \times \underline{ج}^{-1} \times \underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1}$

كتاب النشاط

٥) إذا علمت أن $\underline{أ}^{-1} = \begin{vmatrix} ٣ & ٤- \\ ٢- & ٣ \end{vmatrix}$ ، $\underline{ب}^{-1} = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$. فأوجد $(\underline{أ} \times \underline{ب})^{-1} = \underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1}$

$= \underline{ب}^{-1} \times \underline{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ٤- \\ ٢- & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ٦- & ٩ \end{pmatrix}$