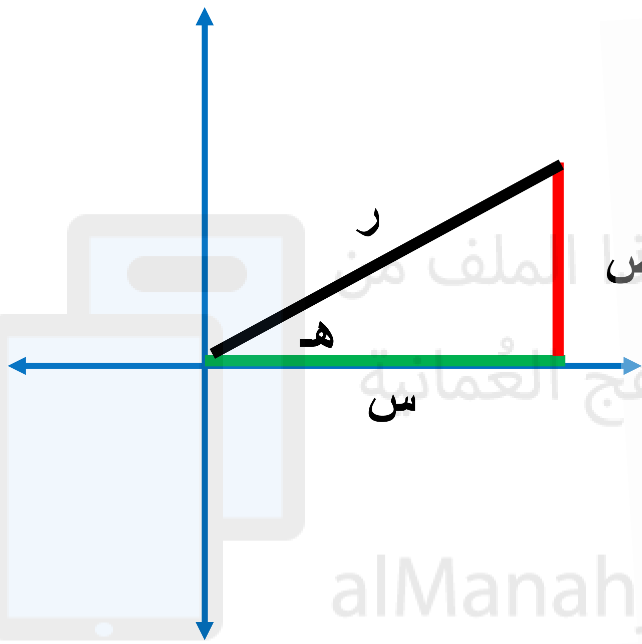
الزوايا بين ٠° و ٩٠°

النسب المثلثية للزاوية الحادة :

في أي مثلث قائم الزاوية



(١) جيب الزاوية (جا)

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$

(٢) جيب تمام الزاوية (جتا)

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$

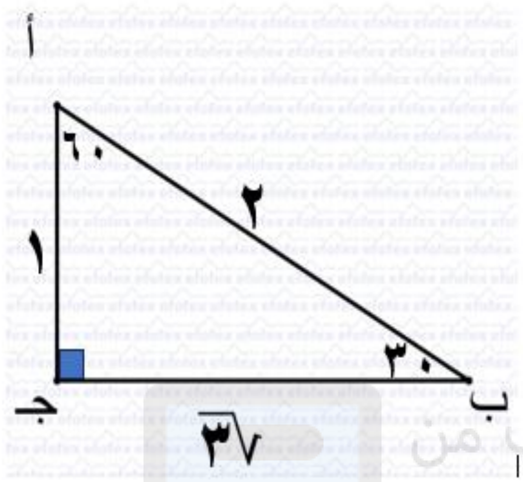
(٣) ظل الزاوية (ظا)   ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

لتذكر القوانين

يمكن الاستعانة بالشكل

بعض المثلثات الهامة

المثلث الثلاثينى الستينى



هو مثلث قائم الزاوية

إحدى زواياه الحادتين ٣٠° والأخرى ٦٠°

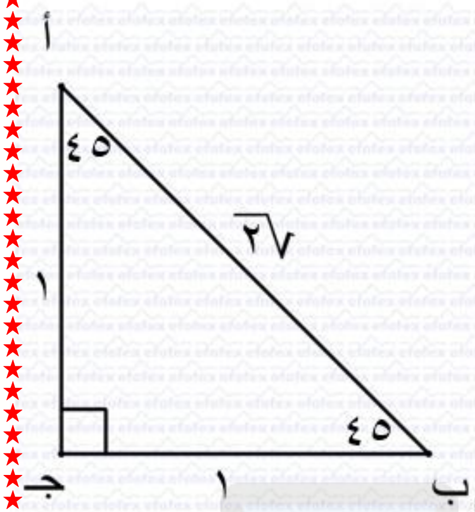
ومن خواص هذا المثلث ما يلى:

١) الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف الوتر

٢) الضلع المقابل للزاوية ٦٠ = نصف الوتر × $\sqrt{٣}$

جا ٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{١}{٢}$	جا ٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا ٣٠ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جتا ٦٠ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١}{٢}$
ظا ٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$	ظا ٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \sqrt{٣}$

المثلث المتساوى الساقين القائم



هو مثلث قائم الزاوية وكلا من زاويتاه الحادتان = ٤٥°

وكذلك ضلعا القائمة متساويان في الطول

وبه الخواص الآتية:

١) الضلع المقابل للزاوية ٤٥ = نصف طول الوتر × $\sqrt{2}$

جا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

جتا ٤٥ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ظا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = ١

ملاحظات مهمة

(١) جيب أى زاوية = جيب تمام المتممة لها

أي أنه إذا كان جا س = جتا ص فإن س + ص = ٩٠

مثال

أوجد قيمة ما يلى

(١) جا ٤٥ جتا٤٥ + جا٣٠ جتا٣٠ – جتا^{٢} ٣٠

(٢) جتا٦٠ جا٣٠ – جا٦٠ ظا٦٠ + جتا^{٢} ٣٠

(٣) $\frac{\text{٢ ظا ٣٠}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{ ٣٠}}$

الحل

(١) جا ٤٥ جتا٤٥ + جا٣٠ جتا٣٠ – جتا^{٢} ٣٠

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٤}$$

$$= \frac{٢ + ٢\sqrt{٣} - ٣}{٤} = \frac{٢\sqrt{٣} - ١}{٤}$$

(٢) جتا٦٠ جا٣٠ – جا٦٠ ظا٦٠ + جتا^{٢} ٣٠

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{١} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} =$$

$$= \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = \frac{١ - ٦ + ٣}{٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

(٣) $\dfrac{٢ \text{ ظا } ٣٠}{١ - \text{ظا}^{٢}\, ٣٠}$

$$= \dfrac{٢ \times \dfrac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - \left(\dfrac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}} = \dfrac{\dfrac{٢}{\sqrt{٣}}}{١ - \dfrac{١}{٣}} = \dfrac{\dfrac{٢}{\sqrt{٣}}}{\dfrac{٢}{٣}} = \dfrac{٢ \times ٣}{٢ \times \sqrt{٣}}$$

$$= \dfrac{٣}{\sqrt{٣}} \times \dfrac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \dfrac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$$

مثال

أوجد قيمة س التي تحقق أن

١) س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جتا^{٢} ٣٠°

٢) ٢جاس = ظا^{٢} ٦٠° − ٢ ظا٤٥° حيث س قياس زاوية حادة

الحل

(١) ∵ س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جتا^{٢} ٣٠° ∴ $\text{س} \times \dfrac{١}{٢} \times \left(\dfrac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

∴ $\dfrac{١}{٤}\text{س} = \dfrac{٣}{٤}$ ∴ س = ٣

(٢) ∵ ٢جاس = ظا^{٢} ٦٠° – ٢ ظا٤٥°

∴ ٢جاس = $(\sqrt{٣})^{٢}$ – ٢×١ = ٣ – ٢ =١

∴ جاس = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

مثال

أثبت أن : جا^{٢} ٦٠° + جا^{٢} ٣٠° = جتا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ جا $\frac{\pi}{٢}$ - $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ جتا π + جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

الطرف الأيمن = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ + $(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢}$ + $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = جتا^{٢} ٣٠° جا٩٠° - $\frac{١}{٣}$ ظا^{٢} ٦٠° جتا١٨٠° + جتا^{٢} ٦٠° جا٢٧٠°

= $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ × ١ – $\frac{١}{٣}$ × $(\sqrt{٣})^{٢}$ × (–١) + $(\frac{١}{٢})^{٢}$ × (–١)

= $\frac{٣}{٤}$ + ١ – $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

مثال

أوجد قيمة س التي تحقق : س جا $\frac{\pi}{6}$ جتا^{2} $\frac{\pi}{4}$ = جتا^{2} ٣٠° جا $\frac{\pi}{2}$

الحل

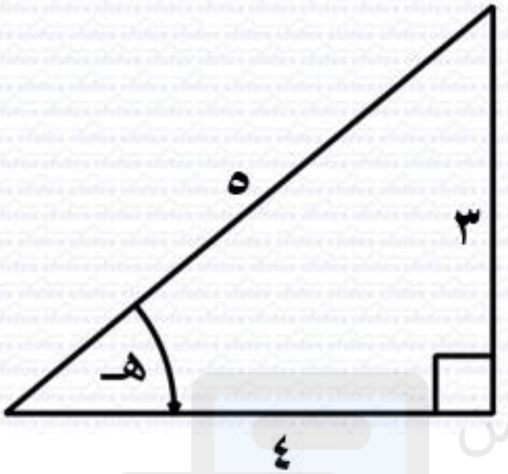
∵ س جا ٣٠° جتا^{2} ٤٥° = جتا^{2} ٣٠° جا ٩٠°

∴ س × $\frac{1}{2}$ × $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}$ = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}$ × ١

∴ $\frac{1}{4}$ س = $\frac{3}{4}$

∴ س = ٣

حل تمارين كتاب الطالب (٢ . ١)



(١) إذا علمت أن $\text{جتا هـ} = \frac{٤}{٥}$

حيث هـ زاوية حادة أوجد:

(أ) $\text{جا هـ} = \frac{٣}{٥}$ ، (ب) $\text{ظا هـ} = \frac{٣}{٤}$

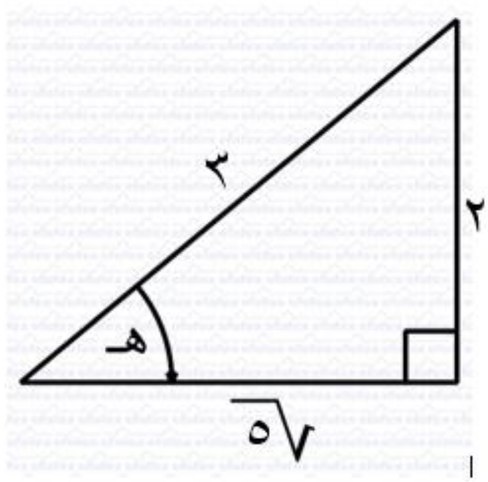
(جـ) $\text{٢جا هـ جتا هـ} = ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

(د) $\frac{٥}{\text{ظا هـ}} = ٥ \times \frac{٤}{٣} = \frac{٢٠}{٣}$

(هـ) $\frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا هـ}} = \left(١ - \frac{٩}{٢٥}\right) \div \frac{٤}{٥} = \frac{١٦}{٢٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٤}{٥}$

(و) $\frac{٣ - \text{جا هـ}}{٣ + \text{جتا هـ}} = \left(٣ - \frac{٣}{٥}\right) \div \left(٣ + \frac{٤}{٥}\right) = \frac{١٢}{٥} \times \frac{٥}{١٩} = \frac{١٢}{١٩}$

(٢) إذا علمت أن ظا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ حيث هـ زاوية حادة



(أ) جا هـ = $\frac{٢}{٣}$ ، (ب) جتا هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

(ج) جا²هـ + جتا²هـ = $\frac{٤}{٩} + \frac{٥}{٩} = \frac{٩}{٩} = ١$

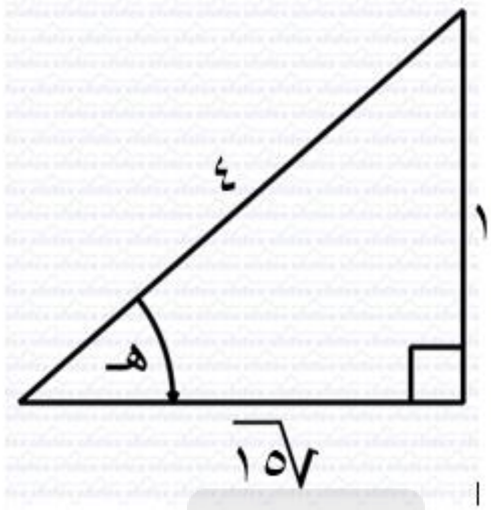
(د) $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

(هـ) $\frac{٢}{\text{١ + جا هـ}} = ٢ \div (١ + \frac{٢}{٣}) = ٢ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{٥}$

(و) $\frac{٥}{\text{١ + جتا هـ}} = ٥ \div (١ + \frac{\sqrt{٥}}{٣}) = \frac{٥ \times ٣}{٣ + \sqrt{٥}} \times \frac{٣ - \sqrt{٥}}{٣ - \sqrt{٥}}$

$= \frac{١٥(٣ - \sqrt{٥})}{٩ - ٥} = \frac{١٥(٣ - \sqrt{٥})}{٤}$

رقم (٣) $\text{جا هـ} = \frac{١}{٤}$ حيث هـ زاوية حادة



(أ) $\text{جتا هـ} = \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ ، (ب) $\text{ظا هـ} = \frac{١}{\sqrt{١٥}}$

$\times \frac{\sqrt{١٥}}{\sqrt{١٥}} = \frac{\sqrt{١٥}}{١٥}$

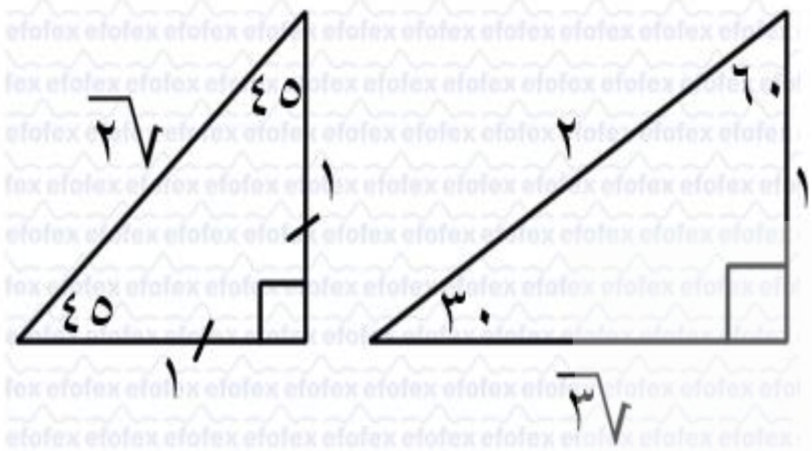
(ج) $١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ} = ١ - \frac{١}{١٦} = \frac{١٥}{١٦}$

(د) $\frac{\text{جا هـ} \times \text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}} = \frac{١}{٤} \times \frac{\sqrt{١٥}}{٤} \times \frac{\sqrt{١٥}}{١} = \frac{١٥}{١٦}$

(هـ) $\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}} = \frac{٤}{١} + \frac{\sqrt{١٥}}{١} = ٤ + \sqrt{١٥}$

(و) $٥ - \frac{\text{ظا هـ}}{\text{جا هـ}} = ٥ - \frac{\sqrt{١٥}}{١٥} \times \frac{٤}{١} = \frac{٧٥ - ٤\sqrt{١٥}}{١٥}$

رقم (٤) أوجد قيمة كلا من



(أ) جا ٣٠° × جتا ٦٠°

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$$

(ب) جا^{٢} ٤٥° $= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \frac{١}{٢}$

(ج) جا ٤٥° + جا ٣٠° $= \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٣}}{٢}$$

(د) $\frac{\text{جا } ٦٠°}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{١} = \sqrt{٣}$

(هـ) $\frac{\text{جا}^{٢}\ ٤٥°}{\text{٢ ظا } ٦٠°} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} \div (٢ + \sqrt{٣})$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢ + \sqrt{٣}} \times \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢(٤ - ٣)} = \frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢}$$

(و) $\frac{\text{جا}^{٢}\ ٣٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠°}{\text{٢ جا } ٤٥° \times \text{جتا } ٤٥°}$

$$= \left[\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}\right] \div ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$$

رقم (٥) أوجد قيمة كلا مما يأتي

(أ) $\text{جا}\frac{\pi}{٤} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤} = \text{جا}٤٥^\circ \text{ جتا}٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$

(ب) $\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٣} = \text{جتا}^{٢}\,٦٠^\circ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

(ج) $١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٦} = ١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\,٣٠^\circ = ١ - ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

(د) $\dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٦} - \text{ظا}\frac{\pi}{٣}}{\text{جا}\frac{\pi}{٤}} = \dfrac{\text{جا }٣٠ - \text{ظا }٦٠}{\text{جا }٤٥} = \left(\frac{١}{٢} - \sqrt{٣}\right) \times \frac{\sqrt{٢}}{١} = \frac{\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٦}}{٢}$

(هـ) $\dfrac{١}{\text{ظا}\frac{\pi}{٤}} - \dfrac{١}{\text{جتا}\frac{\pi}{٣}} = \dfrac{١}{\text{ظا}٤٥^\circ} - \dfrac{١}{\text{جتا}٦٠^\circ} = ١ - \frac{٢}{١} = -١$

(و) $\dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + \text{ظا}\frac{\pi}{٦}}{\text{جا}\frac{\pi}{٣}} = \dfrac{\text{جتا }٦٠^\circ + \text{ظا }٣٠^\circ}{\text{جا }٦٠^\circ} = \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٣}}\right) \div \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \dfrac{\sqrt{٣} + ٢}{٢\sqrt{٣}} \times \dfrac{٢}{\sqrt{٣}} = \dfrac{\sqrt{٣} + ٢}{٣}$

تدريبات إضافية

(١) ظا٠° + ظا٤٥° + ظا١٨٠° = ٠ + ١ + ٠ = ١

(٢) جا١٨٠° جتا٤٥° – جتا١٨٠° جا٤٥°
$$= \text{٠} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} - (\text{–١}) \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$$

(٣)
$$\frac{\text{٤ جا}^{\text{٢}}\text{ ٣٠° – ٣ ظا٤٥° جتا ٠°}}{\text{٢ جتا٦٠° + ٢ جا٤٥° جتا ٤٥°}} = \frac{\text{٤} \times (\frac{\text{١}}{\text{٢}})^{\text{٢}} - \text{٣} \times \text{١} \times \text{١}}{\text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{٢} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}} = \frac{\text{١ – ٣}}{\text{١+١}} = \text{–١}$$

أثبت صحة كل من المتساويات الآتية

(١) ٢ جا² ٩٠° = –٢جتا ١٨٠°

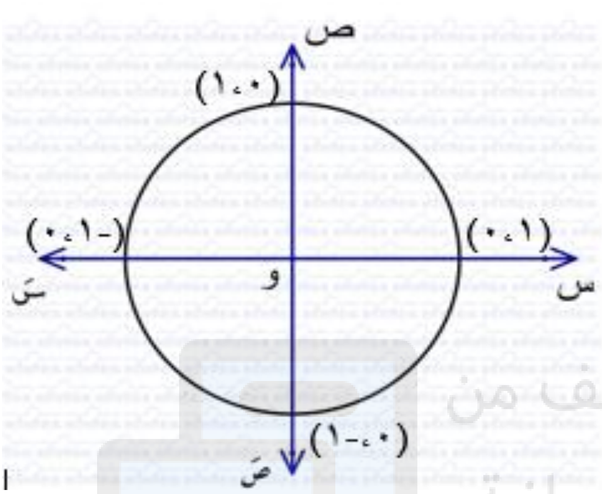
(٣)
$$\frac{\text{٣}}{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ ٤٥°}} - \text{٢جا٦٠° جتا٣٠°} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ جا٩٠°}$$

(٤) جا٦٠° جتا٣٠° – جتا٦٠° جا٣٠° = جا² $\frac{\pi}{\text{٤}}$

(٥) ٢جتا² $\frac{\pi}{\text{٣}}$ + ٣جا² $\frac{\pi}{\text{٤}}$ + ٤ظا² $\frac{\pi}{\text{٣}}$ – جا $\frac{\pi}{\text{٢}}$ = ١٠

(٦)
$$\frac{\text{جا٣٠° جتا٤٥° + جا٤٥° جتا٣٠°}}{\text{جا٤٥° جتا٦٠° + جتا٤٥° جا٦٠°}} = \text{جا ٩٠°}$$

دائرة الوحدة



في النظام الإحداثي المتعامد

الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (و)

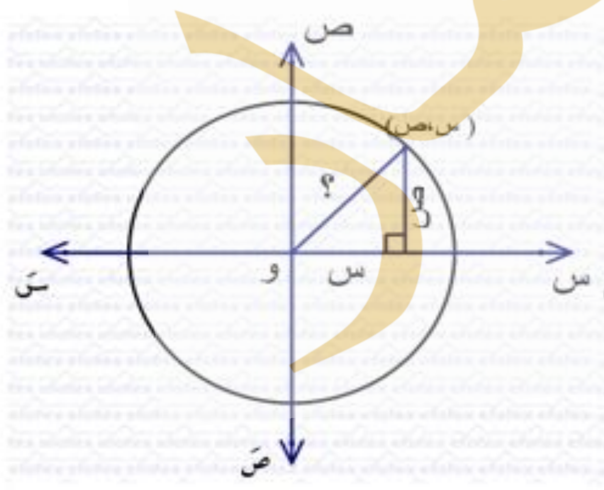
وطول نصف قطرها وحدة الأطوال

تسمى دائرة الوحدة

ولاحظ من الشكل المقابل أن

دائرة الوحدة تقطع محور السينات فى نقطتين هما : (١ ، ٠) ، (-١ ، ٠)

دائرة الوحدة تقطع محور الصادات فى نقطتين هما : (٠ ،١) ، (٠ ، -١)



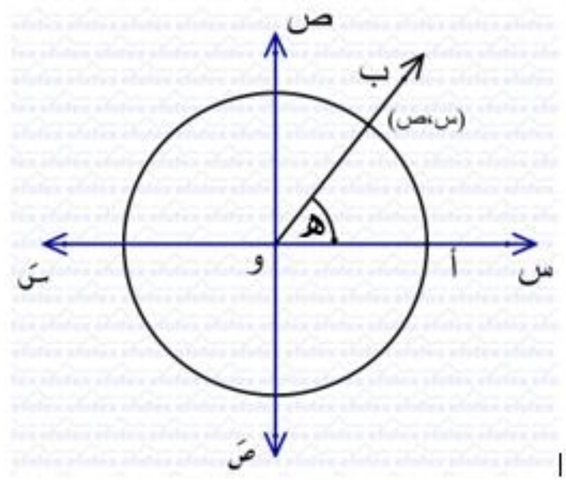
إذا كانت النقطة (س ، ص) علي دائرة الوحدة

فإن :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$ من نظرية فيثاغورث

$-١ \le س \le ١$ $-١ \le ص \le ١$

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها هـ



في دائرة الوحدة

١) جيب تمام الزاوية = الإحداثي السينى للنقطة ب أى أن **جتا هـ = س**

٢) جيب الزاوية = الإحداثي الصادى للنقطة ب أى أن **جا هـ = ص**

٣) ظل الزاوية = $\frac{\text{الإحداثى الصادى لنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى لنقطة ب}}$ أي أن **ظا هـ** = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$

حيث س ≠ ٠

لاحظ أنه

يمكن كتابة النقطة ب (س ، ص) على الصورة (جتا هـ ، جاهـ)