حل تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية (حساب المثلثات)

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العمانية

موقع فايلاتي ⇦ المناهج العمانية ⇦ الصف الثاني عشر ⇦ رياضيات متقدمة ⇦ الفصل الأول ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 19-11-2025 11:42:42

المزيد من مادة رياضيات متقدمة:

ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس

إعداد: علاء فكري محمد

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر

صفحة المناهج العمانية على فيسبوك

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول

1	حل تمارين الوحدتين الثانية (حساب المثلثات) والرابعة (التفاضل)
2	مذكرة تمارين محلولة في الوحدة الأولى القياس الدائري الجزء الأول
3	الشرح التفصيلي للوحدة الأولى القياس الدائري الجزء الأول
4	ملخص وتمارين درس الراديان
5	حل تمارين الوحدة الأولى القياس الدائري من كتاب النشاط

تمارين مراجعة لنهاية الوحدة الثانية [1]

① يبين الرسم جزءاً من التمثيل البياني للدالة ص = أ + ب جاس
أوجد قيمة كل من أ ، ب .

الحل / يتضح من الرسم أن دورة الدالة ص هي ٢π

" " " " " " السعة = |ب| = $\frac{١+٣}{٢}$ = ٢

الحل الأول :: المنحنى يمر بالنقطة (٠، ١) تحقق معادلته ب = ٢

١ = أ + ب جا صفر ← أ = ١

حل آخر باستخدام المدى أ − ب ≤ ص ≤ أ + ب

−١ ≤ ص ≤ ٣

∴ أ − ب = −١

أ + ب = ٣ بالجمع

٢أ = ٢ ← أ = ١ ← ب = ٢

علاء قلري محمد

حل آخر باستخدام التحويلات الهندسية

يتضح من الرسم أنه رسم للدالة الأصل ص = جاس حصل تمدد رأسي (السعة) بمقدار ب = ٢ ثم إنسحاب رأسي بالمتجه = $\begin{pmatrix} ٠ \\ أ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$ ← أ = ١

② أوجد قيمة س التي تحقق جا$^{-1}$(س − ١) = ظا$^{-1}$(٣)

الآلة الحاسبة مباشرة

الحل جا$^{-1}$(س − ١) = ١,٢٤٩

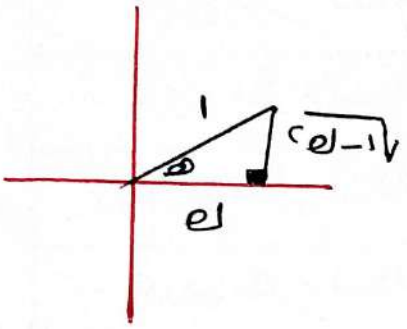
جا جا$^{-1}$(س − ١) = جا (١,٢٤٩)

س − ١ = ٠,٩٤٨

س = ١,٩٤٨

ملاحظة تم تحويل ٣° إلى ٣

③ إذا علمت أن الزاوية هـ حادة ومقيسة بالراديان وأن جتا هـ = ك فأكتب كل عبارة من العبارات الآتية بدلالة ك



(أ) جا هـ = $\frac{\sqrt{١-ك^٢}}{١}$

(ب) ظا هـ = $\frac{\sqrt{١-ك^٢}}{ك}$

(ج) جتا (π − هـ) = − جتا هـ

= − ك

علاء قلدي محمد

④ حل المعادلة جتا⁻¹ (٨س⁴ + ١٤س² − ١٦) = π

الحل جتا جتا⁻¹ (٨س⁴ + ١٤س² − ١٦) = جتا (π)

٨س⁴ + ١٤س² − ١٦ = −١

٨س⁴ + ١٤س² − ١٥ = ٠ باستخدام الصيغة التربيعية

أ = ٨ ، ب = ١٤ ، جـ = −١٥

س² = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ = $\frac{-١٤ \pm \sqrt{(١٤)^٢ - ٤ \times ٨ \times -١٥}}{٢ \times ٨}$

س² = $\frac{-١٤ \pm ٢٦}{١٦}$

س² = $\frac{-١٤ + ٢٦}{١٦}$ أو س² = $\frac{-١٤ - ٢٦}{١٦}$

س² = $\frac{٣}{٤}$ أو س² = $\frac{-٥}{٢}$ مرفوضة (لا توجد حلول حقيقية)

س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (حلولها تخيلية)

⑤ حل المعادلة جا٢س = ٥ جتا٢س حيث ٠° ≤ س ≤ ١٨٠°

الحل / $\frac{\text{جا٢س}}{\text{جتا٢س}} = \frac{\text{٥ جتا٢س}}{\text{جتا٢س}}$ (بالقسمة على جتا٢س حيث جتا٢س ≠ صفر)

ظا٢س = ٥

٠° ≤ س ≤ ١٨٠°

٠ ≤ ٢س ≤ ٣٦٠°

ظا موجبة في ربعين

الأول

٢س = ٧٨,٦٩° ∈ للحال

س = ٣٩,٣٤°

الثالث

٢س = ١٨٠° + ٧٨,٦٩°

٢س = ٢٥٨,٦٩° ∈ للحال

س = ١٢٩,٣٤°

⑥ حل المعادلة $\frac{\text{١٣ جا}^2\text{هـ}}{\text{٢ + جتا هـ}}$ + جتا هـ = ٢ حيث ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠°

الحل $\frac{\text{١٣(١ - جتا}^2\text{هـ) + ٢ جتا هـ + جتا}^2\text{هـ}}{\text{٢ + جتا هـ}} = \frac{٢}{١}$

علاء كلوب محمد عمر

١٣ - ١٣ جتا²هـ + ~~٢ جتا هـ~~ + جتا²هـ = ٤ + ~~٢ جتا هـ~~

-١٢ جتا²هـ = -٩

جتا²هـ = $\frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

جتا هـ = $\frac{+\sqrt{٣}}{٢}$ أو جتا هـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

جتا موجبة في ربعين

الأول (هـ = ٣٠° ∈ للحال) ✓

الرابع (مرفوض)

لأن ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠°

جتا سالبة في ربعين

الثاني (س = ١٨٠ - ٣٠ = ١٥٠° ∈ للحال) ✓

الثالث (مرفوض) لأن ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠°

⑦ حل المعادلة ٢جتا²س = ٥جاس - ١ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

الحل / ٢(١ - جا²س) = ٥جاس - ١

٢ - ٢جا²س = ٥جاس - ١

٢جا²س + ٥جاس - ٣ = ٠

(٢جاس - ١)(جاس + ٣) = ٠

٢جاس - ١ = ٠ | جاس = -٣ مرفوض لأن -١ ≤ جاس ≤ ١

جاس = ١/٢

جا موجبة في ربعين

الأول س = ٣٠°

الثاني س = ١٨٠° - ٣٠°

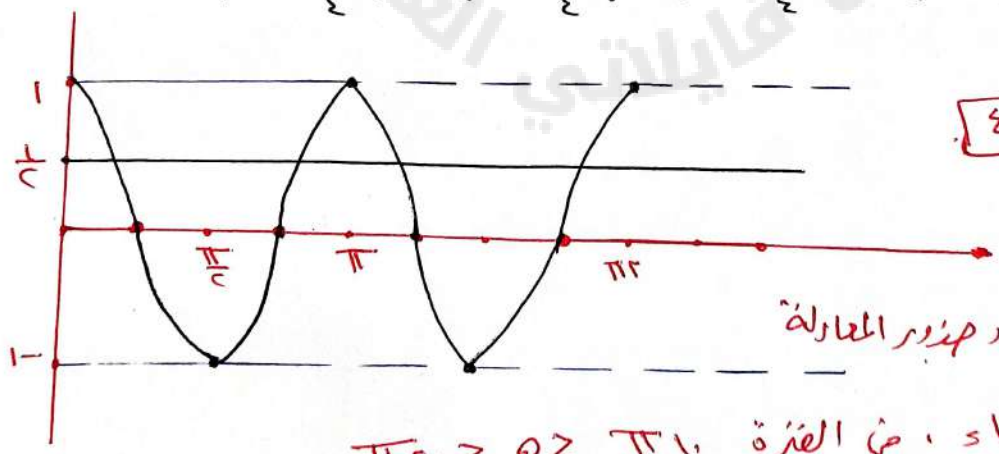
س = ١٥٠°

علاء فكري محمد

⑧ ارسم بيان الدالة ص = جتا٢س ، ص = ١/٢ حيث ٠ ≤ هـ ≤ ٢π

الحل الدورة = ٢π/٢ = π ، السعة = ١ ، نقاط التقاطع مع المحور السينات

(π/٤ ، ٠) ، (٣π/٤ ، ٠) ، (٥π/٤ ، ٠) ، (٧π/٤ ، ٠) ، (٩π/٤ ، ٠) .



ب) عدد الجذور = ٤

ج) استنتج عدد جذور المعادلة

٢جتا٢هـ - ١ = ٠ في الفترة ١٠π ≤ هـ ≤ ٢٠π

الحل طول الفترة ← ٢٠π - ١٠π = ١٠π

١٠π/٢π = ٥ ← عدد الجذور = ٥ × ٤ = ٢٠ جذر

٢π ← ٤

١٠π ← س

س = (١٠ × ٤)/٢

س = ٢٠

٩) بين أنه يمكن كتابة المعادلة ٢ ظا^{2}هـ × جا^{2}هـ = ١ في صورة ٥

٢ جا^{4}هـ + جا^{2}هـ − ١ = ٠

الحل ٢ ظا^{2}هـ × جا^{2}هـ = ١

$\frac{٢ \times جا^2هـ}{جتا^2هـ} \times جا^2هـ = ١$ ← ٢ جا^{4}س = جتا^{2}هـ

← ٢ جا^{4}س = ١ − جا^{2}هـ

٢ جا^{4}س + جا^{2}هـ − ١ = ٠ #

٧) حل المعادلة ٢ ظا^{2}هـ × جا^{2}هـ = ١ حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

٢ جا^{4}هـ + جا^{2}هـ − ١ = ٠

(٢ جا^{2}هـ − ١)(جا^{2}هـ + ١) = ٠

جا^{2}هـ = $\frac{١}{٢}$ أو جا^{2}هـ = ١

جاهـ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ أو جاهـ = ±١

جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ أو جاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

هـ = ٩٠°، ٢٧٠°

جا موجبة في ربعين

الأول هـ = ٤٥°

الثاني هـ = ١٣٥°

جا سالبة في ربعين

الثالث هـ = ١٨٠° + ٤٥°

هـ = ٢٢٥°

الرابع هـ = ٣٦٠° − ٤٥°

هـ = ٣١٥°

عبد الرحمن محمد عوض

(١٠) حل المعادلة ٤ جا^{2}س + ٨ جتا س − ٧ = ٠ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° [٦]

الحل / ٤ (١ − جتا^{2}س) + ٨ جتا س − ٧ = ٠

٤ − ٤ جتا^{2}س + ٨ جتا س − ٧ = ٠

(أ) ٤ جتا^{2}س − ٨ جتا س + ٣ = ٠

(٢ جتا س − ١)(٢ جتا س − ٣) = ٠

إما ٢ جتا س − ١ = ٠ أو ٢ جتا س − ٣ = ٠

جتا س = $\frac{1}{2}$

جتا موجبة في ربعين

الأول س = ٦٠°

الرابع س = ٣٠٠°

٢ جتا س − ٣ = ٠

جتا س = $\frac{3}{2}$ مرفوضة

لأن −١ ≤ جتا س ≤ ١

علاء فكري محمد

(ب) أوجد حل المعادلة ٤ جا^2($\frac{1}{2}$هـ) + ٨ جتا($\frac{1}{2}$هـ) − ٧ = ٠ حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

الحل من (أ) نجد أن

٤ جتا^2($\frac{هـ}{2}$) ٨ جتا($\frac{هـ}{2}$) + ٣ = ٠

٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

٠° ≤ $\frac{هـ}{2}$ ≤ ١٨٠°

(٢ جتا($\frac{هـ}{2}$) − ١)(٢ جتا($\frac{هـ}{2}$) − ٣) = ٠

جتا($\frac{هـ}{2}$) = $\frac{1}{2}$ الأول

∴ $\frac{هـ}{2}$ = ٦٠° هـ للحال

هـ = ١٢٠°

الرابع

$\frac{هـ}{2}$ = ٣٠٠° ∉ للحال

جتا $\frac{هـ}{2}$ = $\frac{3}{2}$ مرفوض لأن

−١ ≤ جتا $\frac{هـ}{2}$ ≤ ١

علاء فكري محمد

Fileae.com 2026 2025 مكتبة فلسطين التعليمية

⑦

⑪ برهن المتطابقة $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{1 - \text{جتا س}} \equiv 1 + \frac{1}{\text{جتا س}}$

(أ)

الحل / الأيمن $= \frac{\text{جا} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{1 - \text{جتا س}} = \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا س}(1 - \text{جتا س})}$

$= \frac{(1 - \text{جتا}^2\text{س})}{\text{جتا س}(1 - \text{جتا س})} = \frac{\cancel{(1 - \text{جتا س})}(1 + \text{جتا س})}{\text{جتا س}\cancel{(1 - \text{جتا س})}}$

$= \frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}} + \frac{1}{\text{جتا س}} = 1 + \frac{1}{\text{جتا س}} =$ الأيسر

⑦ حل المعادلة $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{1 - \text{جتا س}} + 2 = 0$ حيث $0° \leq \text{س} \leq 360°$

الحل / من (أ) $1 + \frac{1}{\text{جتا س}} + 2 = 0$

$\frac{1}{\text{جتا س}} = -3 \longrightarrow \text{جتا س} = \frac{-1}{3}$

جتا س سالبة في ربعين

الثاني

$\text{س} = 180° - 70.53°$

$\text{س} = 109.47°$ ∈ للمجال

الثالث

$\text{س} = 180° + 70.53°$

$\text{س} = 250.53°$ ∈ للمجال

علاء كلري محمد

١٢ حل المعادلة $\frac{٢ - \text{جا س}}{١ + ٢\text{جا س}} = \frac{٣}{٤}$ حيث $٠ \leq \text{س} \leq ٢\pi$

أ

الحل / $٣ + ٦\text{جا س} = ٨ - ٤\text{جا س}$

$٦\text{جا س} + ٤\text{جا س} = ٥$

$١٠\text{جا س} = ٥$

$\text{جا س} = \frac{١}{٢}$

جا موجبة في ربعين

الأول

$\text{س} = \frac{\pi}{٦}$

الثاني

$\text{س} = \pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$

علاء قلبرن محمد

٢ حل المعادلة $\text{جا س} - ٢\text{جتا س} = ٢(٢\text{جا س} - ٣\text{جتا س})$

حيث $-\pi \leq \text{س} \leq ٢\pi$

الحل / $\text{جا س} - ٢\text{جتا س} = ٤\text{جا س} - ٦\text{جتا س}$

$-٢\text{جتا س} + ٦\text{جتا س} = ٤\text{جا س} - \text{جا س}$

$٤\text{جتا س} = ٣\text{جا س}$ بالقسمة على جتا س

$\text{ظا س} = \frac{٤}{٣}$ حيث جتا س ≠ صفر

ظا موجبة في ربعين

الأول

$\text{س} = ٠,٩٢٧^{\text{ء}}$ ∈ للمجال

س = ٠,٩٢٧ء − π ← دورة ظا

$\text{س} = -٢,٢١^{\text{ء}}$ ∈ للمجال

الثاني

$\text{س} = \pi + ٠,٩٢٧^{\text{ء}}$

$\text{س} = ٤,٠٦^{\text{ء}}$ ∈ للمجال

علاء قلبرن محمد

Fileae.com/om 2026 2025 موقع فايلاتي العالمية

١٣) تم تعريف الدالة على النحو: د : س ← ٣ - ٢ ظا (س/٢)

حيث ٠ ≤ س ≤ π

الحل / ا) أذكر مدى الدالة

الحل ص ≤ ٣

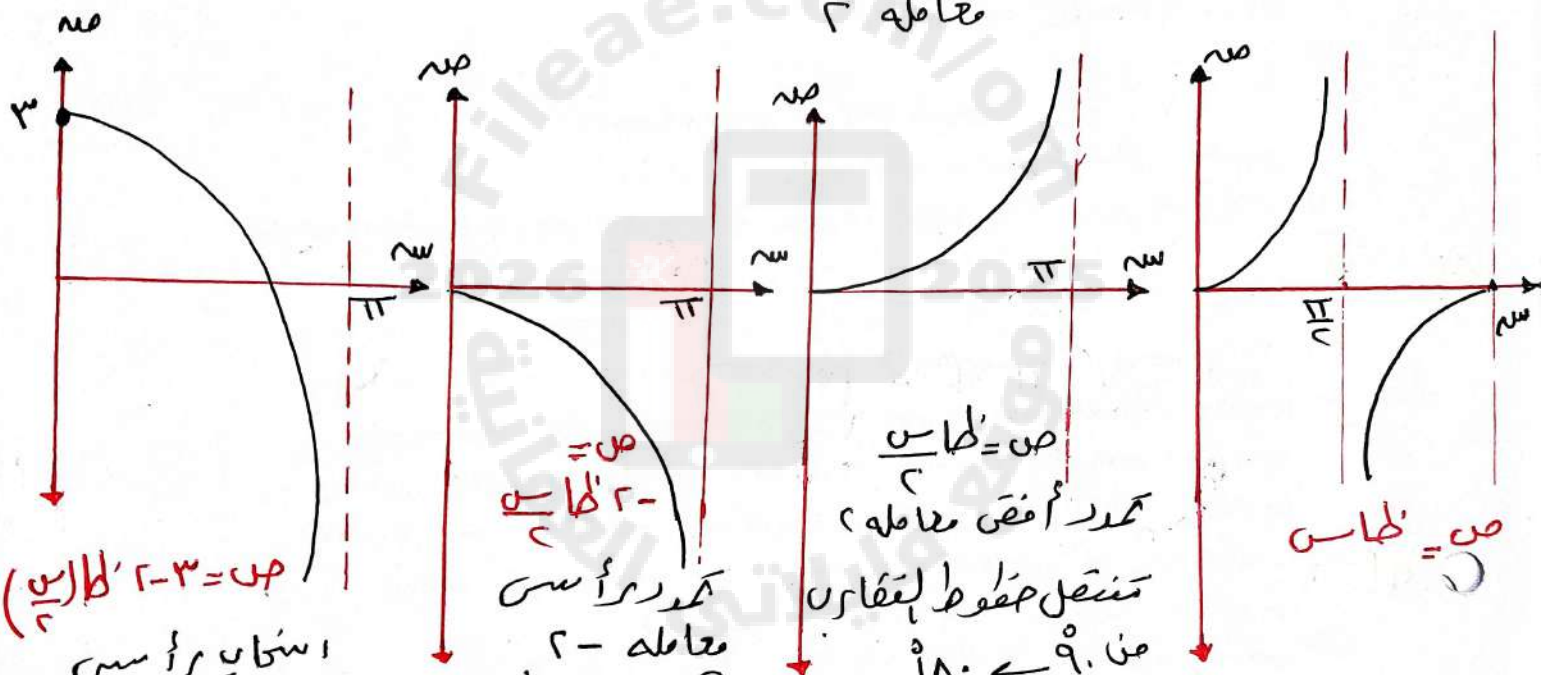
حل آخر: إيجاد المدى بالتحويلات الهندسية مع الرسم

ص = ٣ - ٢ ظا (س/٢)

انسحاب رأسي بالمتجه (٠ ، ٣)

تمدد رأسي معامله ٢

تمدد أفقي معامله ٢



ب) أوجد د(٢π/٣) = ٣ - ٢ ظا (٢/٣ × π × ١/٢) = ٣ - ٢ ظا (π/٣) = ٣ - ٢√٣

ج) أوجد د^-١(س)

ص = ٣ - ٢ ظا (س/٢) ← باستبدال س مكان ص

س = ٣ - ٢ ظا (ص/٢)

ظا (ص/٢) = (س - ٣)/(-٢) ← ص/٢ = ظا^-١ ((٣ - س)/٢)

د^-١(س) = ص = ٢ ظا^-١ ((٣ - س)/٢)

علاء فكري محمد

١٤ ⓐ حل المعادلة ٢ جتا²هـ = ٣ جاهـ حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

الحل / ٢(١ - جا²هـ) = ٣ جاهـ

٢ - ٢ جا²هـ = ٣ جاهـ

٢ جا²هـ + ٣ جاهـ - ٢ = ٠

(٢ جاهـ - ١)(جاهـ + ٢) = ٠

أو

جاهـ = ١/٢ ، جاهـ = -٢

مرفوض لأن -١ ≤ جاهـ ≤ ١

جا موجبة في ربعين

الأول (س = ٣٠°) ∈ للمجال ، الثاني (س = ١٥٠°) ∈ للمجال

علاء فكري محمد

ⓑ أصغر حل موجب للمعادلة ٢ جتا(هـ ن) = ٣ جا(هـ ن) حيث ن عدد صحيح موجب ، هـ = ١٠° أوجد قيمة (ن)

الحل / من ⓐ أصغر حل للمعادلة ٢ جتا²هـ = ٣ جاهـ هو (٣٠°)

∴ ن هـ = ٣٠° ← ١٠ ن = ٣٠° ← ن = ٣ # أولاً

أوجد أكبر حل للمعادلة في الفترة ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

∵ ن هـ = ٣٠ ، ن هـ = ١٥٠°

٣ هـ = ٣٠ ، ٣ هـ = ١٥٠°

هـ = ١٠° ← ① أصغر حل ، هـ = ٥٠° ← ②

علاء فكري محمد

∵ دورة كل من جا(٣هـ) ، جتا(٣هـ) هي ٣٦٠/٣ = ١٢٠°

∴ تزيد دورة لكل حل من الحلين حتى الوصول لأكبر حل

هـ = ١٠° + ١٢٠° = ١٣٠° ← ③ ، هـ = ٥٠° + ١٢٠° = ١٧٠° ← ⑤

هـ = ١٣٠° + ١٢٠° = ٢٥٠° ← ④ ، هـ = ١٧٠° + ١٢٠° = ٢٩٠° ← ⑥

أكبر حل هو (هـ = ٢٩٠°)

(١٥) (أ) بين أن $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جا هـ + جتا هـ}} + \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ − جتا هـ}} \equiv \frac{1}{\text{جا}^2\text{هـ − جتا}^2\text{هـ}}$

الحل / الأيمن $= \frac{\text{جا}^2\text{هـ} - \cancel{\text{جا هـ جتا هـ}} + \cancel{\text{جا هـ جتا هـ}} + \text{جتا}^2\text{هـ}}{(\text{جا هـ + جتا هـ})(\text{جا هـ − جتا هـ})}$

$= \frac{\text{جا}^2\text{هـ + جتا}^2\text{هـ}}{\text{جا}^2\text{هـ − جتا}^2\text{هـ}} = \frac{1}{\text{جا}^2\text{هـ − جتا}^2\text{هـ}} =$ الأيسر

(ب) حل المعادلة $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جا هـ + جتا هـ}} + \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ − جتا هـ}} = 3$ حيث $0^\circ \leq \text{س} \leq 360^\circ$

الحل من (أ) $\frac{1}{\text{جا}^2\text{هـ − جتا}^2\text{هـ}} = 3$

$\frac{1}{1 - \text{جتا}^2\text{هـ} - \text{جتا}^2\text{هـ}} = 3$

$\frac{1}{1 - 2\text{جتا}^2\text{هـ}} = \frac{3}{1}$

$3 - 6\text{جتا}^2\text{هـ} = 1$

$\frac{6\text{جتا}^2\text{هـ}}{6} = \frac{2}{6}$

$\text{جتا هـ} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{جتا هـ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $\text{جتا هـ} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

جتا موجبة في ربعيه

الأول $\text{س} = 54.7^\circ$ ∈ المجال

الرابع $\text{س} = 360^\circ - 54.7^\circ$

$\text{س} = 305.3^\circ$ ∈ المجال

جتا سالبة في ربعيه

الثاني $\text{س} = 180^\circ - 54.7^\circ = 125.3^\circ$ ∈ المجال

الثالث $\text{س} = 180^\circ + 54.7^\circ =$

$\text{س} = 234.7^\circ$ ∈ المجال

علاء كامل محمد

(١٦) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة $\frac{٤ \text{ جتاه}}{\text{جاه}} + ١٥ = ٠$ في صورة

(١٢) $٤ \text{ جا}^٢\text{ه} - ١٥ \text{ جاه} - ٤ = ٠$ ثم حل المعادلة $\frac{٤ \text{ جتاه}}{\text{جاه}} + ١٥ = ٠$

الحل

$\frac{٤ \text{ جتاه} \times \text{جتاه}}{\text{جاه}} + ١٥ = ٠$ $\qquad$ $٠° \leq \text{س} \leq ٣٦٠°$

$٤ \text{ جتا}^٢\text{ه} + ١٥ \text{ جاه} = ٠$

$٤(١ - \text{جا}^٢\text{ه}) + ١٥ \text{ جاه} = ٠$

$٤ - ٤ \text{ جا}^٢\text{ه} + ١٥ \text{ جاه} = ٠$

$٤ \text{ جا}^٢\text{ه} - ١٥ \text{ جاه} - ٤ = ٠$ # أولاً

(٧) $(٤ \text{ جاه} + ١)(\text{جاه} - ٤) = ٠$

إما $\text{جاه} = \frac{-١}{٤}$ | $\text{جاه} = ٤$ مرفوضة

جا سالبة في ربعين | $-١ \leq \text{جاه} \leq ١$

الثالث | الرابع

$\text{س} = ١٨٠° + ١٤,٤٧°$ | $\text{س} = ٣٦٠° - ١٤,٤٧°$

$\text{س} = ١٩٤,٤٧°$ ∈ للمجال | $\text{س} = ٣٤٥,٥°$ ∈ للمجال

علاء فكري محمد

(١٧) تم تعريف الدالة د على النحو: د(س) ← ٥ + ٣ جتا (س/٢)

حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π

(أ) حل المعادلة د(س) = ٧ لأقرب رقمين عشريين.

الحل / ٥ + ٣ جتا (س/٢) = ٧

٣ جتا (س/٢) = ٢

جتا (س/٢) = ٢/٣

جتا موجبة في ربعين

الأول

س/٢ = ٠,٨٤١ ∈ للمال

س = ١,٦٨٢

س = ١,٦٨

الرابع

س/٢ = ٢π − ٠,٨٤١

س/٢ = ٥,٤٤ ∈ للمال

X

علاء قاسم محمد

(ج) لماذا توجد للدالة د(س) دالة عكسية؟ اشرح اجابتك

لأنها دالة واحد إلى واحد (باختبار الخط الأفقي)

(د) أوجد د⁻¹(س)

ص = ٥ + ٣ جتا (س/٢) ← باستبدال ص مكان س

س = ٥ + ٣ جتا (ص/٢)

جتا (ص/٢) = (س − ٥)/٣

ص/٢ = جتا⁻¹ ((س − ٥)/٣)

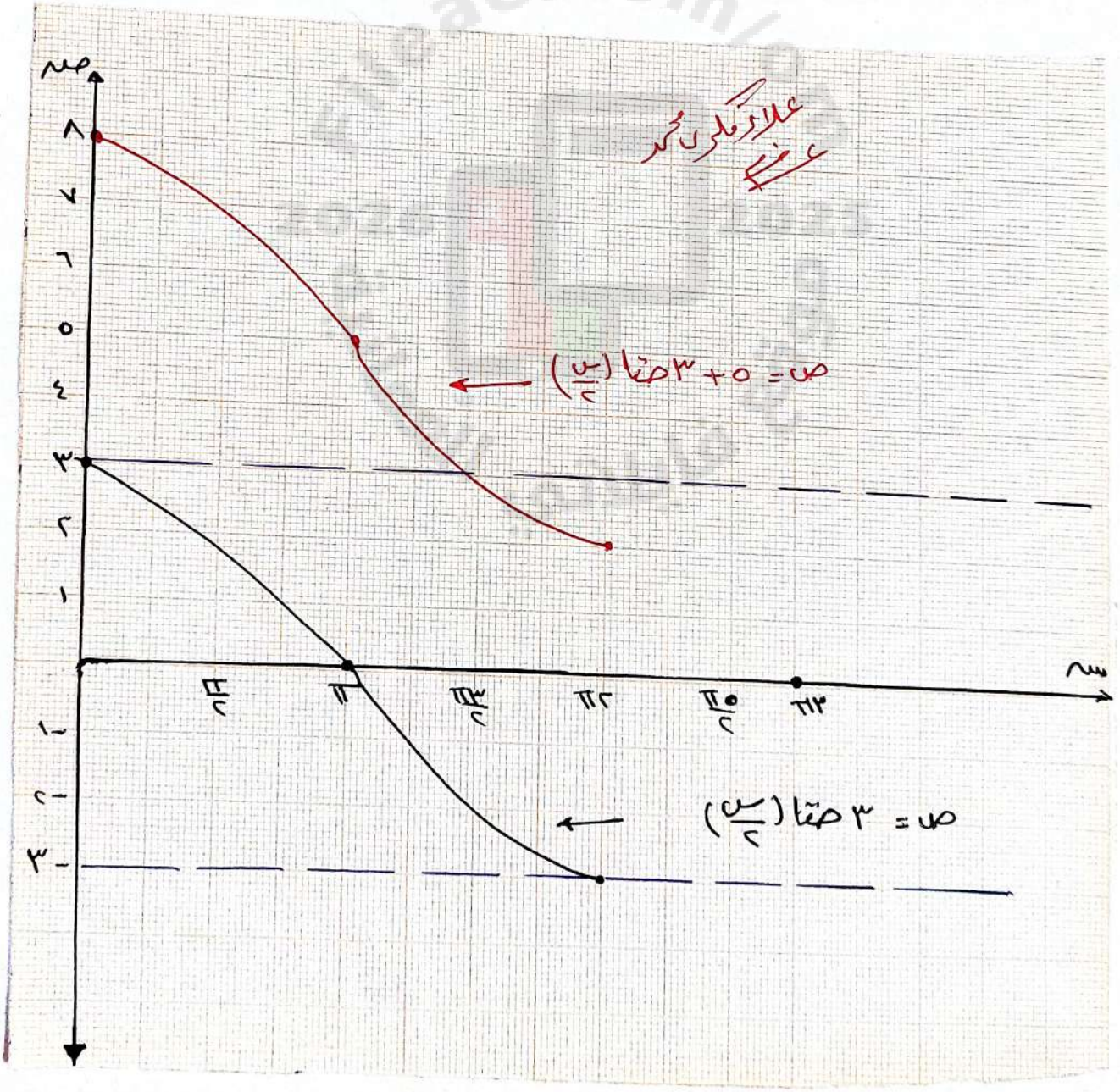
د⁻¹(س) = ص = ٢ جتا⁻¹ ((س − ٥)/٣)

(٧) إرسم بيان الدالة ص = د(س) = ٥ + ٣ جتا (س/٢)

حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π

الحل / تمدد أفقي معامله ٢ ثم تمدد رأسي معامله ٣ ثم إنسحاب رأسي بالمتجه (٥ ، ٠)

نرسم الدالة د(س) = ٣ جتا (س/٢) ثم إنسحاب أفقي بالمتجه (٥ ، ٠)

الدورة = ٢π / |١/٢| = ٤π ، السعة = |١| = ٣ ، المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

نقاط التقاطع مع المحور السيني (π/٣ ، ٠) ، (٥π/٣ ، ٠)