العلاقة بين القياس الستيني و القياس الدائري

إذا كان قياس زاوية بالقياس الستيني هو : س

قياس زاوية بالقياس الدائري هو : هـ ء فإن العلاقة بينهما هي :

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{هـ ء}{\pi}$$

نتيجة هامة

(١) $هـ ء = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

(٢) $س^\circ = هـ ء \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

مثال حول قياس زاوية بالقياس الستيني ٣٠ درجة إلي وحدة الراديان

الحل

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{هـ ء}{\pi}$$

$$هـ ء = \frac{٣٠^\circ \times \pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٦}$$

مثال حول قياس الزاوية ١,٢ ء إلى قياس ستيني.

الحل

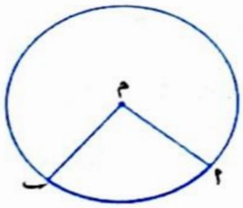
$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{هـ ء}{\pi}$$

$$س^\circ = \frac{١,٢ \times ١٨٠^\circ}{\pi}$$

$$س^\circ = ٦٨,٧٥٤٩٣٥٤٢$$

نتيجة هامة

نعلم أنه فى أى دائرة يكون : $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول هذا القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$



أى أنه فى الشكل المقابل : $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})}{\text{٣٦٠}^\circ} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{أب}}}{\text{٢}\,\pi\,\text{نق}}$

، $\because$ ق(∠أ م ب) = ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) $\therefore \frac{\text{ق}(\angle\text{أ م ب})}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{\text{أب}}}{\pi\,\text{نق}}$

تدريب

(١) أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية القياس الدائري للزاوية التي قياسها الستيني ٧٥,٣ درجة

(٢) أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها الدائري ٢,٣٨ء

ملاحظة هامة

١ إذا كان القياس الدائرى للزاوية يساوى π (راديان) فإن قياسها الستينى = $\pi \times \frac{\text{١٨٠}^\circ}{\pi} = \text{١٨٠}^\circ$

أى أن $\boxed{\pi \text{ بالتقدير الدائرى تكافئ } \text{١٨٠}^\circ \text{ بالتقدير الستينى}}$

فمثلا $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}\pi$ تكافئ $\frac{\text{٣}}{\text{٥}} \times \text{١٨٠}^\circ = \text{١٠٨}^\circ$

٢ إذا علم القياس الستينى لزاوية ما وطلب تحويله إلى القياس الدائرى بدلالة π

فإننا نستخدم العلاقة : $\theta^{\text{ء}} = \text{س}^\circ \times \frac{\pi}{\text{١٨٠}^\circ}$ ولا نعوض عن π

فمثلا ١٨° تكافئ $\text{١٨}^\circ \times \frac{\pi}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\pi}{\text{١٠}}$ ، ١٣٥° تكافئ $\text{١٣٥}^\circ \times \frac{\pi}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\pi$

تدريب

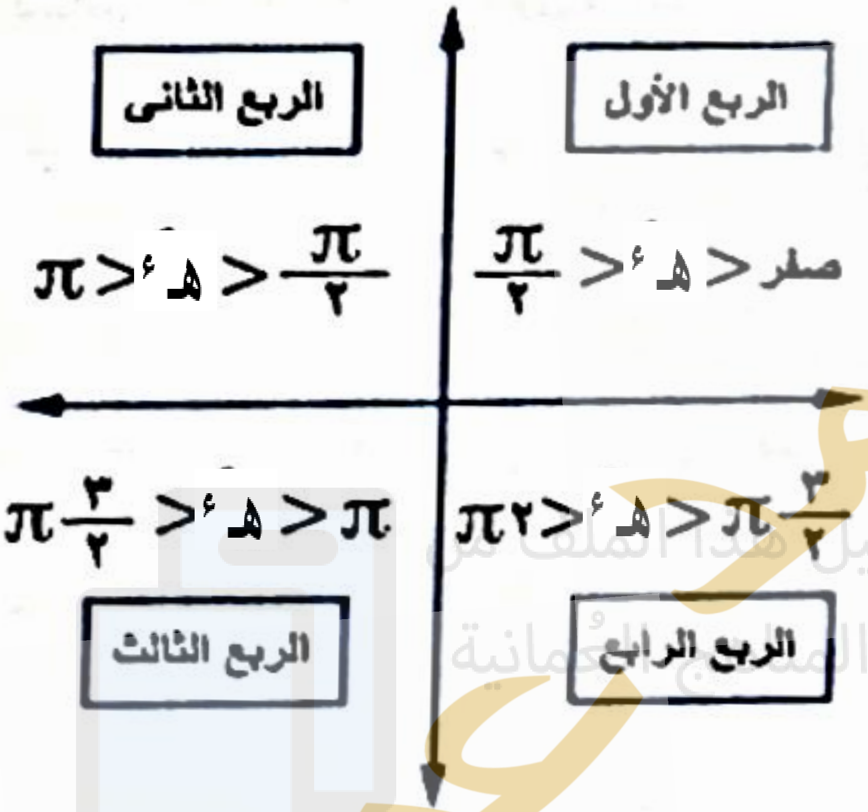
عيِّن الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

١ ٢٠٢ء

٢ −٣,٧ء

٣ $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}\pi$

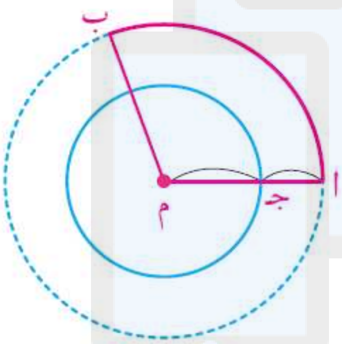
تذكر أن :


الربع الأول
صفر < هـ < $\frac{\pi}{2}$
الربع الثانى
$\frac{\pi}{2}$ < هـ < π
الربع الثالث
π < هـ < $\frac{3}{2}\pi$
الربع الرابع
$\frac{3}{2}\pi$ < هـ < 2π

مثال

قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم. فأوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر.

الحل



يبين الشكل المقابل المسار الدائري لحركة القمر:

∵ طول نصف قطر دائرة مسار القمر م ا = م جـ + جـ ا

∴ م ا = ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∵ القمر يقطع المسار الدائري (دورة كاملة) في ٣ ساعات، وهذا يقابل زاوية مركزية = 2π

∴ القمر يقطع قوسًا طوله $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة في الساعة الواحدة، وهذا يقابل زاوية مركزية = $\frac{2\pi}{3}$

نستخدم صيغة طول القوس: ح = هـ ء × نق

بالتعويض عن نق = ١٠٠٠٠ كم: ح = $\frac{2\pi}{3}$ × ١٠٠٠٠

هـ ء = $\frac{2\pi}{3}$ ح ≃ ٢٠٩٤٤ كم

مثال
أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها ١٥٢,٤٣٨ مرسومة في دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم

الحل

$$هـ^ء = س° \times \frac{\pi}{١٨٠°}$$

$$= ١٥٢,٤٣٨ \times \frac{\pi}{١٨٠°} = ٢,٦٦^ء$$

∴ ح = هـ^ء × نق = ٢,٦٦ × ١٠,٥ = ٢٨ سم تقريبا

مثال
أوجد كلا من القياس الدائري و القياس الستيني لزاوية مركزية تحصر قوسا طوله ١٢,٦ سم في دائرة طول نصف قطرها ٧,٢ سم

الحل

$$هـ^ء = \frac{ل}{نق} = \frac{١٢,٦}{٧,٢} = ١,٧٥^ء$$

$$س° = ١,٧٥ \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ١٠٠,٢٦٧٥°$$

مثال
أوجد محيط الدائرة التي بها زاوية محيطية قياسها ٣٠ درجة يقابلها قوس طوله ٥ سم

الحل

قياس الزاوية المحيطية = ٣٠ درجة

∴ قياس الزاوية المركزية المناظرة لها ٦٠ درجة

$$هـ^ء = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{\pi}{٣}$$

$$\therefore نق = \frac{ل}{هـ^ء} = ٥ \div \frac{\pi}{٣} = \frac{١٥}{\pi}$$

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٣٠ سم

مثال

زاويتان مجموع قياسيهما الدائري $\frac{١}{٧}$ ٣ء والفرق بين قياسيهما الستيني ٣٠ درجة
أوجد قياس كلا منهما بالقياس الدائري و القياس الستيني

الحل

∵ $\frac{١}{٧}$٣ء = $\frac{٢٢}{٧} \times \frac{١٨٠°}{\pi}$ = ١٨٠°

وبفرض أن الزاويتين هما أ ، ب حيث : ق(∠أ) > ق(∠ب)

∴ أ + ب = ١٨٠

أ ـ ب = ٣٠

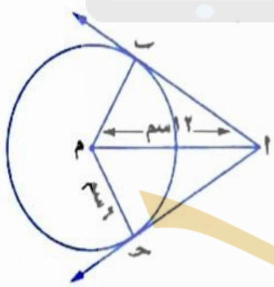
∴ أ = ١٠٥ درجة ، ب = ٧٥ درجة

∴ ق(∠أ) بالتقدير الدائرى = ١٠٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٨٣ء

، ق(∠ب) بالتقدير الدائرى = ٧٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٣١ء

مثال

فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم

فإذا كان : أ م = ١٢ سم

فأوجد طول القوس $\overset{\frown}{بحـ}$ الأكبر لأقرب عدد صحيح.

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة م ∴ $\overline{محـ} \perp \overleftrightarrow{أحـ}$

فى Δ أ م حـ : ∵ ق(∠أ حـ م) = ٩٠° ، م حـ = $\frac{١}{٢}$ أ م

∴ ق(∠حـ أ م) = ٣٠° ∴ ق(∠أ م حـ) = ٦٠°

، ∵ $\overleftarrow{مأ}$ ينصف ∠ب م حـ ∴ ق(∠ب م حـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠ب م حـ) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

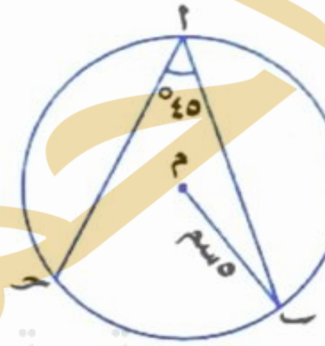
، هـ ء = س° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ هـ ء = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٤}{٣}$ π

، ∵ ل = هـ ء × نق ∴ طول $\overset{\frown}{بحـ}$ الأكبر = $\frac{٤}{٣}$ π × ٦ = ٨ π = ٢٥ سم

تدريب

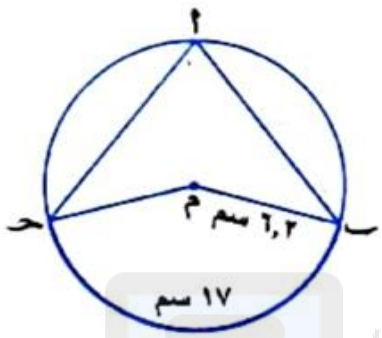
في كل شكل من الأشكال الآتية أوجد المطلوب تحت كل رسم

(١)



طول $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

*(٢)



ق (∠ أ)

تدريبات

(١) أوجد بدلالة π القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

(أ) ١٢٥ درجة (ب) ١١٢,٣٨ درجة (جـ) ــ ٢٣٥ درجة

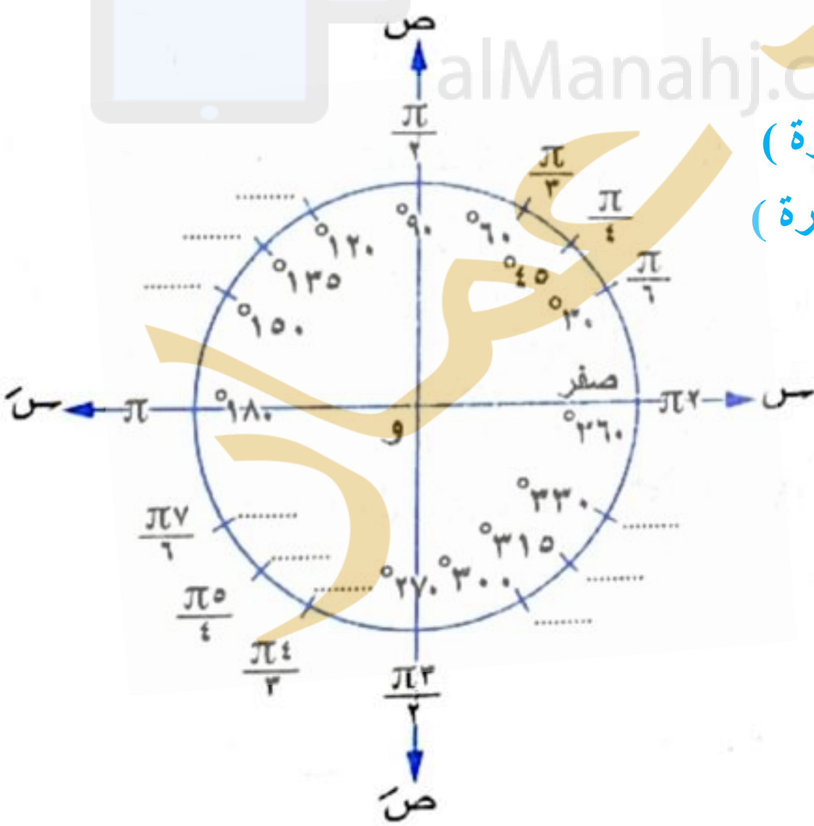
(د) ٤٨,٢ درجة (هـ) ٢١٥,٣٨ درجة (و) ــ ١٧,٥ درجة

(٢) أوجد القياس الستيني لكل من الزوايا التي قياساتها الدائرية كالآتي :

(١) $\frac{١١}{١٥}\pi$ (٢) $٠,٧٢\,\pi$ (٣) ٠,٤٩ ء

(٤) -١,٦٧ ء (٥) ٢,٢٧ ء (٦) $-٣\frac{١}{٢}$ ء

(٣) الشكل المقابل يوجد بعض الزوايا
كتب قياسها بالراديان (خارج الدائرة)
و الآخر كتب بالدرجات (داخل الدائرة)
أكتب قياسات زوايا الشكل المقابل
أمام كل قياس زاوية مناظرة لها



(٤) أوجد القياس الستيني و القياس الدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوسا طوله (ل) في دائرة طول نصف قطرها (نق) في كل من الحالات الاتية :

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم

(٢) ل = ١٤ سم ، نق = ٧ سم

(٣) ل = ٢ π سم ، نق = ٦ سم

(٤) ل = ١٥,٧٢ سم ، نق = ٩,١٧ سم

(٥) أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها و طول القوس المحصور (ح) في كل من الحالات الآتية : (ل)

(أ) هـ^{ء} = $\frac{٩}{٨}\pi$ ، ل = ٢٢,٥ سم

(ب) هـ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم

(جـ) هـ = ــ ٢٨٦,٧° ، ل = ٤٣,٩٢ سم

(د) هـ^{ء} = ٠,٧٦٧^{ء} ، ل = ٤٣,٩٢ سم

(٦) أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) و يقابل زاوية مركزية قياسها هـ في كلا من الحالات الآتية

(١) نق = ١٢,٥ سم ، هـ = ١,٦^{ء}

(٢) نق = ١٣ سم ، هـ = ٠,٩٨٧^{ء}

(٣) نق = ٢٠ سم ، هـ = ٩٨,٤٣°

(٤) نق = ١٧,٢ سم ، هـ = ٧٠٠°

(٥) نق = ٣١,٦ سم ، هـ = ــ ٣٧١°

(٧) اختر الإجابة الصحيحة مما بين المتعدد فيما يلي :

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٢٥ \pi}{٩}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١ \pi}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) الزاوية التى قياسها $\frac{-٩ \pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) الزاوية التى قياسها الدائرى $\frac{٨ \pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٨٠°

(٥) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) ٢π (ب) π (جـ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ (د) ٣π

(٦) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى $١٨٠^\circ \times (ن - ٢)$ حيث ن عدد الأضلاع

فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٧ \pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣ \pi}{٥}$ (د) $\frac{٢ \pi}{٣}$

(٧) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى .... سم

(أ) ٥π (ب) ٤π (جـ) ٣π (د) ٢π

(٨) القوس الذى طوله ٥π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥ \pi}{١٢}$

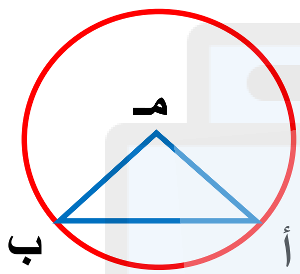
(١٠) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{١}{١٠}$ π فإن طول قوسه يساوي

(أ) ٤,٦ سم (ب) ٤,٤ سم (جـ) ٤,٢ سم (د) ٤,٨ سم

(١١) أ ب جـ د شكل رباعي دائري ، ق (< أ) = ٦٠ ° فإن ق (< جـ) يساوي

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{٦}$

(١٢) في الشكل المقابل :



لإيجاد طول $\overset{\frown}{أب}$ يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) Δ أ م ب متساوي الأضلاع محيطه ٣٠ سم فقط.

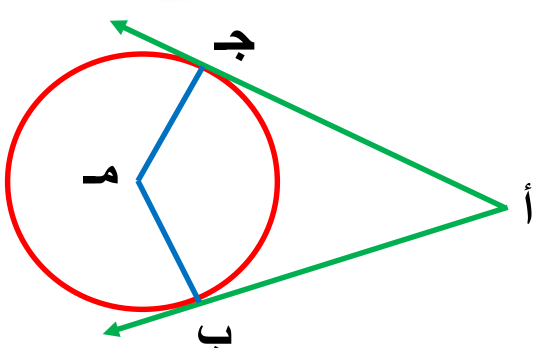
(ب) محيط الدائرة = ١٠ π سم فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شيء مما سبق.

(١٣) القياس الدائري للزاوية الخارجية عن الشكل السباعي المنتظم يساوي ....

(أ) $\frac{١}{٧}$ π (ب) $\frac{٢}{٧}$ π (جـ) $\frac{٣}{٧}$ π (د) $\frac{٤}{٧}$ π



(١٤) في الشكل المقابل

إذا كان $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ مماسين للدائرة م وكان

ق(< أ) = $\frac{٥}{١٢}$ π وكان محيط الدائرة = ٩٦ سم

فإن طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{بجـ}$ = ...

(أ) ــ ٢ (ب) $\frac{٢٨}{\pi}$ (جـ) ٢٨ (د) ٢٠ π

(١٥) الزاوية التى قياسها $٣٠^\circ + ١٨٠^\circ (٢ن+١)$ حيث ن $\in$ ص تكافئ زاوية قياسها الدائرى هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) π (جـ) $\frac{٧}{٦}\pi$ (د) $\frac{٥}{٣}\pi$

(١٦) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{٣}{٨}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٣٠ ° (ب) ٦٧,٥ ° (جـ) ١٣٥ ° (د) ٤٣ ° تقريبا

(١٧) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ طول قوسها. (ب) $\frac{١}{٢}$ طول قوسها.

(جـ) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.

(١٨) إذا كان طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٦٠ ° في دائرة طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٨٠ ° في دائرة أخري فإن النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين هي ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(١٩) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعي كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه يساوي ....

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٢٠) أسطوانة تدور ٤٥ دورة في الدقيقة حول محورها فإن قياس الزاوية التي تدورها نقطة علي سطحها الجانبي في الثانية الواحدة يساوي ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢π

(٢١) القياس الموجب للزاوية التي يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تماما يساوي

(أ) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{٧\pi}{١٢}$

(٢٢) إذا قطع القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٧٢° في دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم و ثني ليكون دائرة فإن طول نصف قطر الدائرة الناتجة يساوي

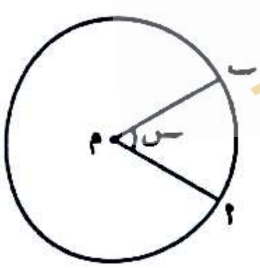
(أ) ١,٤ سم   (ب) ٢,٨ سم   (جـ) ٥,٦ سم   (د) ٧ سم

(٢٣) في الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ١٠ سم

فإذا كان ٥ < طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$ < ٦

فإن قيمة س يمكن أن تكون ....



(أ) ٩٠°   (ب) ٦٠°   (جـ) ٢٨°   (د) ٣٤°

(٨) أوجد محيط الدائرة التي فيها قوس طوله ١٢ سم و يقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥ °

" الإجابة ٤٨ سم "

(٩) أوجد القياس الدائري و الستيني لزاوية مركزية تحصر قوسا طوله ٣ أمثال طول نصف قطر دائرتها .

" الإجابة ٣ ء ، ١٧١,٨ "

(١٠) إذا كان قياس زاوية مركزية في دائرة يساوي ١٠٥ ° و تحصر قوسا طوله $\frac{٧}{٣}\pi$ سم .

أوجد طول قطر الدائرة

" الإجابة ٨ سم "

(١١) مثلث قياس احدي زاوياه ٦٠ ° و قياس زاوية أخري منه يساوي $\frac{١}{٤}\pi$

أوجد القياس الدائري و القياس الستيني لزاويته الثالثة

" الإجابة ٧٥ ° ، $\frac{١}{١٢}\pi$ "

(١٢) شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}$ ء وقياس زاوية أخرى منه $٢\frac{٤}{٩}$ ء وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥°

أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

«٧٠° ، $\frac{١١}{٩}$ ء»

(١٣) زاويتان مجموع قياسيهما ٧٠° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٥}$ أوجد قياسيهما بالتقدير الستينى والدائرى.

«٥٣° ، ١٧° ، $\frac{٥٧}{١٨٠}\pi$ ، $\frac{١٧}{١٨٠}\pi$»

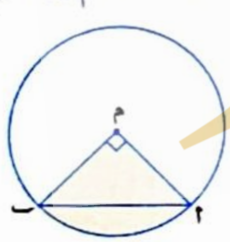
(١٤) زاويتان متكاملتان الفرق بين قياسيهما $\frac{\pi}{٣}$ أوجد قياسى الزاويتين بالتقديرين الستينى والدائرى.

«١٢٠° ، ٦٠° ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{١}{٣}\pi$»

(١٥) إذا كانت مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية

فى م تساوى ٣٢ سم^٢

فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.



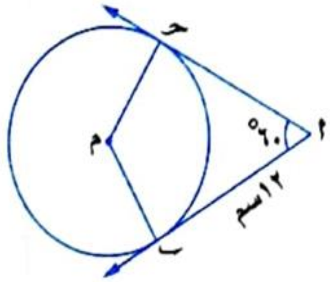
«٢٨,٥٧ سم»

(١٦) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م

، ق (∠حـ أ ب) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{ب حـ}$



«٢٩ سم»

(١٧) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = ٢٤ سم ، ب حـ = ١٢ سم فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التي تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث مقربًا الناتج لرقم عشري واحد.

«١٢,٦ سم ، ٢٥,١ سم ، ٣٧,٧ سم»

(١٨) $\overline{س ص}$ قطر في الدائرة م طوله ١٨ سم ، رسم الوتر ص ع بحيث ق (∠س ص ع) = ١٠

أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{س ع}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

«٣,١٤ سم»

(١٩) دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم تمر برؤوس مثلث أ ب جـ فإذا كان :

ق (∠ أ ب جـ)= ٥٤ ٥ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٥٤ ٥

فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التي تنقسم إليها الدائرة برؤوس هذا المثلث

" الإجابة ١٥,٧ سم ، ١٤,١ سم ، ١٧,٣ سم "