١-٥ قاعدة مشتقة ضرب دالتَين

نتيجة ١

قاعدة مشتقة ضرب دالتَين:

إذا كانت ع، ل دالتَين بدلالة س، فإن: $\frac{د}{د س}$(ع ل) = ع $\frac{د ل}{د س}$ + ل $\frac{د ع}{د س}$

مثال: إذا كانت د(س) = (س + ١)(س − ٢) أوجد دَ(س)

الطريقة الأولى: د(س) = س^{٢} − ٢س + س − ٢

د(س) = س^{٢} − س − ٢

دَ(س) = ٢س − ١

الطريقة الثانية: د(س) = $\underbrace{(س + ١)}_{الأولى}\underbrace{(س − ٢)}_{الثانية}$

دَ(س) = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

= (س + ١) × ١ + (س − ٢) × ١

= س + ١ + س − ٢ = ٢س − ١

مناقشة الأمثلة ١، ٢، ٣ ص٢٠ − ٢٢

تمارين ٥-١

١) استخدم قاعدة مشتقة ضرب دالتَين لتجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

ب ص = $\underbrace{٥س}_{الأولى}$ $\boxed{(٢س + ١)^{٣}}$ ← الثانية

$\frac{د ص}{د س}$ = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

= ٥س × ٣(٢س + ١)^{٢} × ٢ + (٢س + ١)^{٣} × ٥

= ٣٠س (٢س + ١)^{٢} + ٥(٢س + ١)^{٣}

= ٥(٢س + ١)^{٢} (٦س + ٢س + ١)

= ٥(٢س + ١)^{٢} (٨س + ١)

أ. المتوكلية

ز) $ص = (س - ٣)^٢ (س + ٢)^٥$

$\underbrace{(س-٣)^٢}_{الأولى}\ \underbrace{(س+٢)^٥}_{الثانية}$

$\frac{دص}{دس}$ = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

$= (س-٣)^٢ \times ٥(س+٢)^٤ \times ١ + (س+٢)^٥ \times ٢(س-٣) \times ١$

$= ٥(س-٣)^٢ (س+٢)^٤ + ٢(س-٣)(س+٢)^٥$

$= (س-٣)(س+٢)^٤ \big(٥(س-٣) + ٢(س+٢) \big)$

$= (س-٣)(س+٢)^٤ (٥س - ١٥ + ٢س + ٤)$

$= (س-٣)(س+٢)^٤ (٧س - ١١)$

٢) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = س^٢ \sqrt{س + ٤}$ عند النقطة (-٣، ٩).

ميل المماس عند النقطة (-٣،٩) هو $\frac{دص}{دس}$ عند س = -٣

$ص = س^٢ \sqrt{س+٤} = \underbrace{س^٢}_{الأولى}\ \underbrace{(س+٤)^{\frac{١}{٢}}}_{الثانية}$

$\frac{دص}{دس}$ = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

$= س^٢ \times \frac{١}{٢}(س+٤)^{-\frac{١}{٢}} \times ١ + (س+٤)^{\frac{١}{٢}} \times ٢س$

$= \frac{س^٢}{٢\sqrt{س+٤}} + ٢س\sqrt{س+٤}$

$= \frac{س^٢ + ٤س(س+٤)}{٢\sqrt{س+٤}} = \frac{٥س^٢ + ١٦س}{٢\sqrt{س+٤}}$

عند س = -٣ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{٥(-٣)^٢ + ١٦ \times -٣}{٢\sqrt{-٣+٤}} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ميل المماس عند (-٣،٩) يساوي $\frac{-٣}{٢}$

أمل المغربية

٣) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $(٢ - \text{س})^{٣}(\text{س} + ١)^{٤}$ عند س = ١

نحتاج الميل ونقطة

نجد إحداثيات النقطة بالتعويض عند س = ١ في معادلة المنحنى

عند س = ١ ، $\text{ص} = (٢ - ١)^{٣}(١ + ١)^{٤} = ١٦$

∴ المطلوب معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $(\overset{\text{س}_١}{١} ، \overset{\text{ص}_١}{١٦})$

ميل المماس عند النقطة (١ ، ١٦) هو $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ١

$$\text{ص} = \underbrace{(٢ - \text{س})^{٣}}_{\text{الأولى}}\underbrace{(\text{س} + ١)^{٤}}_{\text{الثانية}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢ - \text{س})^{٣} \times ٤(\text{س} + ١)^{٣} \times ١ + (\text{س} + ١)^{٤} \times ٣(٢ - \text{س})^{٢} \times -١$$

$$= ٤(٢ - \text{س})^{٣}(\text{س} + ١)^{٣} - ٣(٢ - \text{س})^{٢}(\text{س} + ١)^{٤}$$

عند س = ١ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤(٢ - ١)^{٣}(١ + ١)^{٣} - ٣(٢ - ١)^{٢}(١ + ١)^{٤}$

$$= ٣٢ - ٤٨ = -١٦$$

معادلة المماس : $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

$$\text{ص} - ١٦ = -١٦(\text{س} - ١)$$

$$\text{ص} - ١٦ = -١٦\text{س} + ١٦$$

لم يطلب التمرين ٣ استخدام صيغة محددة. في هذه الحالة من الأفضل كتابة معادلة المستقيم بالصيغة أ س + ب ص = جـ

$$١٦\text{س} + \text{ص} = ٣٢$$

٤) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\underbrace{(\text{س} + ٢)}_{\text{الأولى}}\underbrace{(\text{س} - ١)^{٣}}_{\text{الثانية}}$ عند النقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع محور الصادات.

بطريقة أخرى المطلوب إيجاد ميل المماس عند س = ٠

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س} + ٢) \times ٣(\text{س} - ١)^{٢} \times ١ + (\text{س} - ١)^{٣} \times ١$$

$$= ٣(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{س} - ١)^{٣}$$

عند س = ٠ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(٠ + ٢)(٠ - ١)^{٢} + (٠ - ١)^{٣} = ٦ - ١ = ٥$

أمل المقرشية

٥) أوجد الإحداثي السيني للنقاط الواقعة على منحنى الدالة ص = (٣ − س)^{٣} (س + ١)^{٢} حيث ميل مماس المنحنى يساوي صفرًا.

ميل المنحنى يقال تجاوزاً للتعبير عن ميل المماس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

(٣ − س)^{٣} × ٢(س + ١) × ١ + (س + ١)^{٢} × ٣(٣ − س)^{٢} × −١ = ٠

٢(٣ − س)^{٣} (س + ١) − ٣(٣ − س)^{٢} (س + ١)^{٢} = ٠

(٣ − س)^{٢} (س + ١) [٢(٣ − س) − ٣(س + ١)] = ٠

(٣ − س)^{٢} (س + ١) [٦ − ٢س − ٣س − ٣] = ٠

(٣ − س)^{٢} (س + ١) (٣ − ٥س) = ٠

(٣ − س)^{٢} = ٠ (√) أو س + ١ = ٠ أو ٣ − ٥س = ٠

٣ − س = ٠ | س = −١ | ٣ = ٥س $\boxed{÷٥}$

س = ٣ | | س = $\frac{٣}{٥}$

∴ ميل المماس يساوي صفر عند س = −١ ، $\frac{٣}{٥}$ ، ٣

أحلام المقرشية

٦) أوجد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = (س + ٢) $\sqrt{١ - ٢س}$ حيث ميل مماس المنحنى يساوي صفرًا.

$$ص = (س + ٢)(١ - ٢س)^{\frac{1}{٢}}$$

$$\frac{دص}{دس} = (س + ٢) \times \frac{1}{٢}(١ - ٢س)^{-\frac{1}{٢}} \times -٢ + (١ - ٢س)^{\frac{1}{٢}} \times 1$$

$$= \frac{-(س + ٢)}{\sqrt{١ - ٢س}} + \sqrt{١ - ٢س}$$

$$= \frac{-س - ٢ + ١ - ٢س}{\sqrt{١ - ٢س}}$$

$$= \frac{-٣س - ١}{\sqrt{١ - ٢س}}$$

$$\frac{دص}{دس} = ٠$$

$$\frac{-٣س - ١}{\sqrt{١ - ٢س}} = ٠$$

$$-٣س - ١ = ٠$$

$$-٣س = ١ \quad \boxed{\div -٣}$$

$$س = \frac{-١}{٣}$$

أ/ حل ملهم الرشيدة

★ **٧)** إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = (س − ١)^{٢} (٥ − ٢س) + ٣ نقطتين حرجتين ا، ب.

أ أوجد الإحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقطتين ا، ب.

ب أوجد مساحة المثلث ل و ن، حيث و نقطة الأصل، والنقطتَين ل، ن نقطتَي تقاطع المستقيم ا ب مع المحورين.

ج حدد نوع كل من النقطتين الحرجتين ا، ب، واستخدم هذه المعلومات لترسم منحنى الدالة ص = (س − ١)^{٢} (٥ − ٢س) + ٣

$\boxed{\text{أ}}$

توجد نقاط حرجة عند د(س) = ٠.

ص = $\underbrace{(\text{س} - ١)^{٢}}_{\text{الأولى}}$ $\underbrace{(٥ - ٢\text{س})}_{\text{الثانية}}$ + ٣

دص/دس = (س − ١)^{٢} × −٢ + (٥ − ٢س) × ٢(س − ١) × ١ + صفر

٠ = −٢(س − ١)^{٢} + ٢(س − ١)(٥ − ٢س) $\boxed{\div -٢}$

(س − ١)^{٢} − (س − ١)(٥ − ٢س) = ٠

(س − ١) [(س − ١) − (٥ − ٢س)] = ٠

(س − ١) [س − ١ − ٥ + ٢س] = ٠

(س − ١)(٣س − ٦) = ٠

س − ١ = ٠   أو   ٣س − ٦ = ٠ ⟸ ٣س = ٦ $\boxed{\div ٣}$

$\boxed{\text{س} = ١}$ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$

عند س = ١ ، ص = (١ − ١)^{٢} (٥ − ٢ × ١) + ٣ = ٣

عند س = ٢ ، ص = (٢ − ١)^{٢} (٥ − ٢ × ٢) + ٣ = ٤

ا (١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٤)

أ/ حلا المعتر شيدة

(ب) نجد معادلة المستقيم أ ب

أ(١، ٣) ، ب(٢، ٤)

ميل المستقيم $= \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \dfrac{٤ - ٣}{٢ - ١} = ١$

معادلة المستقيم :

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٣ = ١(س - ١)$

$ص = س + ٢$

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور س نضع ص = ٠

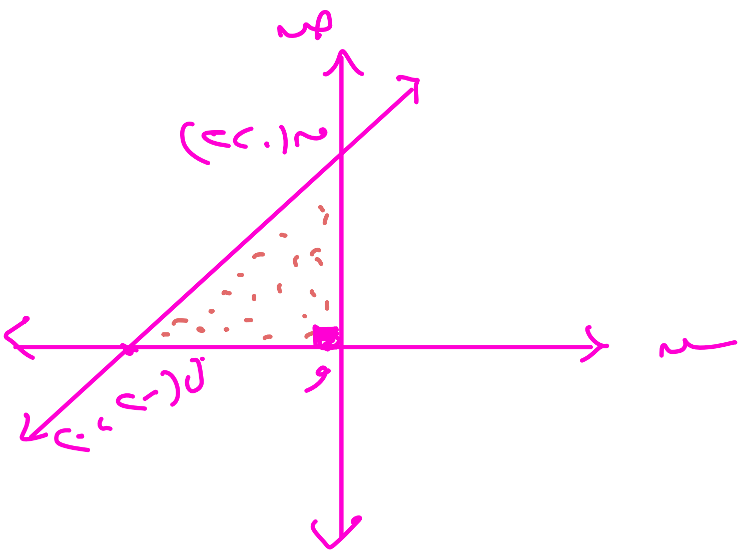
$٠ = س + ٢ \Longleftarrow س = -٢$

∴ ل(−٢، ٠)

لإيجاد نقطة تقاطع المنحنى مع محور ص نضع س = ٠

$ص = ٠ + ٢ = ٢$

هـ(٠، ٢)



مساحة △ ل و هـ $= \frac{١}{٢}$ ق × ع

$= \frac{١}{٢} × ٢ × ٢$

= ٢ وحدة مربعة

أ/ أمل المعترشية

4

ص = (س − ١)^{٢} (٥ − ٢س) + ٣

النقاط الحرجة توجد عند دص/دس = ٠ أي أ(١، ٣) ، ب(٢، ٤) هما النقطتان الحرجتان

لتحديد نوع النقاط الحرجة إما نستخدم اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية

دص/دس = −٢(س − ١)^{٢} + ٢(س − ١)(٥ − ٢س)

= ٢(س − ١)[−(س − ١) + ٥ − ٢س]

= ٢(س − ١)(−٣س + ٦) = (٢س − ٢)(−٣س + ٦)

= −٦س^{٢} + ١٢س + ٦س − ١٢

= −٦س^{٢} + ١٨س − ١٢

د^{٢}ص/دس^{٢} = −١٢س + ١٨

عند س = ١ ، د^{٢}ص/دس^{٢} = −١٢ × ١ + ١٨ = ٦ > ٠

∴ أ(١، ٣) نقطة صغرى

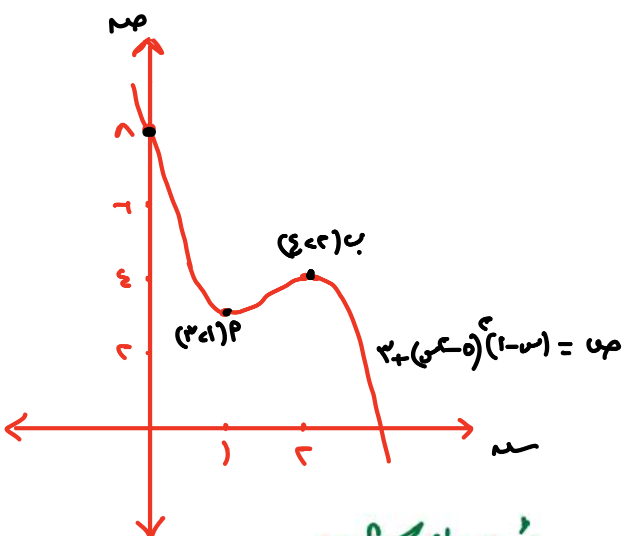
عند س = ٢ ، د^{٢}ص/دس^{٢} = −١٢ × ٢ + ١٨ = −٦ < ٠

∴ ب(٢، ٤) نقطة عظمى

لرسم المنحنى نجد نقطة التقاطع مع محور ص بوضع س = ٠

ص = (٠ − ١)^{٢}(٥ − ٢ × ٠) + ٣ = ٥ + ٣ = ٨

نقطة تقاطع المنحنى مع محور ص هي (٠، ٨)



الأولى
الثانية

٨) دالة معادلتها ص = (س − ٣)^{٢} (س + ٤):

أ) أوجد قيمة الإحداثي السيني لكل نقطة حرجة.

ب) حدد نوع كلّ نقطة حرجة.

ج) ارسم منحنى الدالة.

$\boxed{أ}$ النقاط الحرجة توجد عند $\frac{دص}{دس} = ٠$

$\frac{دص}{دس} = (س - ٣)^{٢} \times ١ + (س + ٤) \times ٢(س - ٣) \times ١$

$٠ = (س - ٣)^{٢} + ٢(س - ٣)(س + ٤)$

$٠ = (س - ٣)\left(س - ٣ + ٢(س + ٤)\right)$

$٠ = (س - ٣)(٣س + ٥)$

س = ٣ أو س = $-\frac{٥}{٣}$

$\boxed{ب}$ النقاط الحرجة (٣، ٠) ، $\left(-\frac{٥}{٣}، \frac{١٣٧٢}{٢٧}\right)$

لتحديد نوع النقطة الحرجة نستخدم اختبار المشتقة الأولى أو الثانية

$\frac{دص}{دس} = (س - ٣)(٣س + ٥)$

$= ٣س^{٢} + ٥س - ٩س - ١٥$

$= ٣س^{٢} - ٤س - ١٥$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٦س - ٤$

عند س = ٣ ، $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٦ \times ٣ - ٤ = ١٤ > ٠$

(٣، ٠) نقطة صغرى

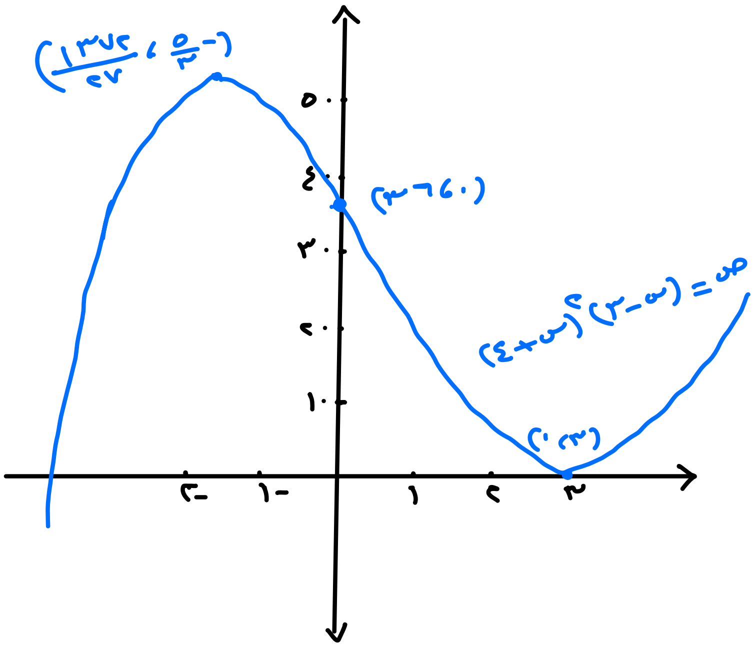
عند س = $-\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٦ \times -\frac{٥}{٣} - ٤ = -١٤ < ٠$

$\left(-\frac{٥}{٣}، \frac{١٣٧٢}{٢٧}\right)$ نقطة عظمى

أ/ طلق الرشيدة

ج) لرسم الشكل نجد نقطة تقاطع الشكل مع محور ص بوضع س = ٠.

ص = (٠ - ٣)^{٢} (٠ + ٤) = ٣٦



أمل المعتز شيبة

كتاب النشاط

١) أوجِد د′(س)، وحلل الناتج إلى العوامل في كلّ ممّا يأتي:

٢) $\text{د(س)} = \underbrace{(\text{س} - ٣)^{٧}}_{\text{الأولى}}\underbrace{(\text{س} + ٥)^{٤}}_{\text{الثانية}}$

$\text{د}'(\text{س}) = \text{الأولى} \times \text{مشتقة الثانية} + \text{الثانية} \times \text{مشتقة الأولى}$

$= (\text{س} - ٣)^{٧} \times ٤(\text{س} + ٥)^{٣} \times ١ + (\text{س} + ٥)^{٤} \times ٧(\text{س} - ٣)^{٦} \times ١$

$= ٤(\text{س} - ٣)^{٧}(\text{س} + ٥)^{٣} + ٧(\text{س} - ٣)^{٦}(\text{س} + ٥)^{٤}$

$= (\text{س} - ٣)^{٦}(\text{س} + ٥)^{٣}\left[٤(\text{س} - ٣) + ٧(\text{س} + ٥)\right]$

$= (\text{س} - ٣)^{٦}(\text{س} + ٥)^{٣}\left[٤\text{س} - ١٢ + ٧\text{س} + ٣٥\right]$

$= (\text{س} - ٣)^{٦}(\text{س} + ٥)^{٣}(١١\text{س} + ٢٣)$

٢) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي:

د) $\text{ص} = (١ - ٣\text{س})\sqrt{٢\text{س} + ٥}$ المجال $\text{س} \geq -\frac{٥}{٢}$

$\text{ص} = \underbrace{(١ - ٣\text{س})}_{\text{الأولى}}\underbrace{(٢\text{س} + ٥)^{\frac{١}{٢}}}_{\text{الثانية}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (١ - ٣\text{س}) \times \frac{١}{٢}(٢\text{س} + ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ + (٢\text{س} + ٥)^{\frac{١}{٢}} \times -٣$

$= \frac{١ - ٣\text{س}}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}} - ٣\sqrt{٢\text{س} + ٥}$

$= \frac{١ - ٣\text{س} - ٣(٢\text{س} + ٥)}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}$

$= \frac{١ - ٣\text{س} - ٦\text{س} - ١٥}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}} = \frac{-٩\text{س} - ١٤}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}$

$= -\frac{٩\text{س} + ١٤}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}$

أ/ أمل العتوشية

٣) أوجِد معادلة المماس على المنحنى $\text{ص} = \underbrace{\text{س}^{٢}}_{\text{الأولى}}\underbrace{(\text{س} + ١)^{٤}}_{\text{الثانية}}$ عند النقطة (١، ١٦).

لتكوين معادلة المماس نحتاج لإيجاد ميل المماس عند س = ١

ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{٢} \times ٤(\text{س}+١)^{٣} \times ١ + (\text{س}+١)^{٤} \times ٢\text{س}$

$= ٤\text{س}^{٢}(\text{س}+١)^{٣} + ٢\text{س}(\text{س}+١)^{٤}$

عند س = ١ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤(١)^{٢}(١+١)^{٣} + ٢\times١(١+١)^{٤} = ٣٢ + ٣٢ = ٦٤$

معادلة المماس:

$\text{ص} - ١٦ = ٦٤(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = ٦٤\text{س} - ٦٤ + ١٦$

$\text{ص} = ٦٤\text{س} - ٤٨$

٤) أوجِد إحداثيات النقطة الحرجة الواقعة على المنحنى $\text{ص} = \text{س}\sqrt{٢\text{س} + ٣}$

المجال $\text{س} \geq -\frac{٣}{٢}$

الجذر درجته زوجي

النقاط الحرجة تكون عند $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$\text{ص} = \underbrace{\text{س}}_{\text{الأولى}}\underbrace{(٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}}_{\text{الثانية}}$ والعلاقة بين الأولى والثانية علاقة ضرب

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \frac{١}{٢}(٢\text{س}+٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ + (٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}} \times ١$

$= \frac{\text{س}}{\sqrt{٢\text{س}+٣}} + \sqrt{٢\text{س}+٣}$

$= \frac{\text{س} + ٢\text{س} + ٣}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}$

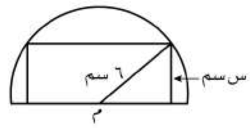
$= \frac{٣\text{س} + ٣}{\sqrt{٢\text{س}+٣}} = ٠$

$٣\text{س} + ٣ = ٠ \Leftarrow ٣\text{س} = -٣ \Leftarrow \text{س} = -١$ نعوض في معادلة المنحنى

$\text{ص} = -١ \times \sqrt{٢\times -١ + ٣} = -١$ ∴ النقطة الحرجة هي (−١، −١)

أحلام القرشية

٥) يبيّن الرسم المجاور مستطيلًا داخل نصف دائرة نصف قطرها ٦ سم، ومركزها م.

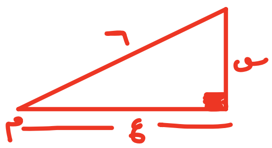


إذا علمت أن عرض المستطيل س سم، فبيّن أن مساحة المستطيل تساوي $٢س\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$. احسب القيمة العظمى لهذه المساحة، وقيمة س عندها.

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$ص = ٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}} \times س$

$ص = ٢س\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$



من فيثاغورث :

$ع^{٢} = ٦^{٢} - س^{٢}$

$ع = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

القيمة العظمى تقع عند النقاط الحرجة

أي عند $\frac{دص}{دس} = ٠$

$ص = \underbrace{٢س}_{\text{الأولى}} \underbrace{(٣٦ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}_{\text{الثانية}}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س \times \frac{١}{٢}(٣٦ - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times -٢س + (٣٦ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times ٢$

$= \frac{-٢س^{٢}}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} + ٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$= \frac{-٢س^{٢} + ٢(٣٦ - س^{٢})}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$

$\frac{٧٢ - ٤س^{٢}}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} = ٠$ ×

$٧٢ - ٤س^{٢} = ٠ \Leftarrow ٧٢ = ٤س^{٢}$ $\boxed{\div ٤}$

$س^{٢} = ١٨ \Leftarrow س = \sqrt{١٨}$

$ص = ٢ \times \sqrt{١٨}\sqrt{٣٦ - ١٨} = ٣٦$

∴ القيمة العظمى للمساحة = ٣٦ سم² وقيمة س عندها = $\sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$

٧) جسم حجمه ح معطى بالمعادلة ح = س$^{٢}\sqrt{٨ - س}$. استخدم المشتقة لتجد القيمة العظمى لـ ح، وقيمة س عندها .

$$ح = س^{٢} (٨ - س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{دح}{دس} = س^{٢} \times \frac{١}{٢} (٨ - س)^{\frac{-١}{٢}} \times -١ + (٨ - س)^{\frac{١}{٢}} \times ٢س$$

$$= \frac{-س^{٢}}{٢\sqrt{٨ - س}} + ٢س\sqrt{٨ - س}$$

$$= \frac{-س^{٢} + ٤س(٨ - س)}{٢\sqrt{٨ - س}}$$

$$\cdot = \frac{٣٢س - ٥س^{٢}}{٢\sqrt{٨ - س}}$$

$$٣٢س - ٥س^{٢} = \cdot$$

$$س(٣٢ - ٥س) = \cdot$$

$س = \cdot$ أو $س = \frac{٣٢}{٥} = ٦٫٤$

مرفوضة

نعوض في معادلة الحجم :

$$ح = \left(\frac{٣٢}{٥}\right)^{٢}\sqrt{٨ - \frac{٣٢}{٥}}$$

$$= \frac{١٠٢٤}{٢٥}\sqrt{\frac{٨}{٥}}$$

∴ القيمة العظمى $= \frac{١٠٢٤}{٥}\sqrt{\frac{٨}{٥}}$ وتوجد عند $س = ٦٫٤$

أحلام القرشية

٨) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} $\sqrt{١ + س}$ ، فبيّن أن د$'$(س) = $\frac{\text{س(أ + ب س)}}{٢\sqrt{١ + س}}$ ، حيث أ ، ب عددان ثابتان، وأوجد قيمتَي أ ، ب.

د(س) = س^{2} (س + 1)$^{\frac{1}{2}}$

دَ(س) = س^{2} × $\frac{1}{2}$ (س + 1)$^{-\frac{1}{2}}$ × 1 + (س + 1)$^{\frac{1}{2}}$ × 2 س

= $\frac{\text{س}^{2}}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$ + 2 س $\sqrt{\text{س} + 1}$

= $\frac{\text{س}^{2} + 4\,\text{س}\,(\text{س} + 1)}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$

= $\frac{5\,\text{س}^{2} + 4\,\text{س}}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$

= $\frac{\text{س}\,(5\,\text{س} + 4)}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$

أمل المقرشية

= $\frac{\text{س}\,(4 + 5\,\text{س})}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$ = $\frac{\text{س}\,(\text{أ} + \text{ب س})}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$

بالمقارنة أ = 4 ، ب = 5

٩) ⓘ إذا علمت أن أ > ب، وأن ل، ك عددان صحيحان موجبان، فأوجِد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة الواقعة على منحنى الدالة ص = (س − أ)^ل (س − ب)^ك في الفترة أ > س > ب.

الأولى ← الثانية

$$\frac{دص}{دس} = (س-أ)^{ل} \times ك(س-ب)^{ك-1} \times 1 + (س-ب)^{ك} \times ل(س-أ)^{ل-1} \times 1$$

$$= ك(س-أ)^{ل}(س-ب)^{ك-1} + ل(س-أ)^{ل-1}(س-ب)^{ك}$$

$$= (س-أ)^{ل-1}(س-ب)^{ك-1}\left[ك(س-أ) + ل(س-ب)\right]$$

$$= (س-أ)^{ل-1}(س-ب)^{ك-1}\left[ك\,س - ك\,أ + ل\,س - ل\,ب\right]$$

$$0 = (س-أ)^{ل-1}(س-ب)^{ك-1}\left[س(ك+ل) - ك\,أ - ل\,ب\right]$$

س − أ = ٠ ⟸ س = أ مرفوضة لأن س < أ

أو س − ب = ٠ ⟸ س = ب مرفوضة لأن س > ب

أو $س(ك+ل) - ك\,أ - ل\,ب = 0$

$$س(ك+ل) = ل\,ب + ك\,أ$$

$$س = \frac{ل\,ب + ك\,أ}{ل+ك}$$

أ > س > ب حيث س تمثل إحداثي النقطة التي تقسم داخليًا قطعة مستقيمة طرفاها أ، ب بنسبة ل إلى ك

أحمد المقرشية

ب ارسم منحنى الدالة عندما ل = ٢، ك = ٣

نضع ﻫ = ٢ ، ب = ٥

ص = (س − ٢)^٢ (س − ٥)^٣

لرسم منحنى الدالة نجد :

① نقاط تقاطع المنحنى مع محور ص بوضع س = ٠

ص = − ٥٠٠

② نقاط تقاطع المنحنى مع محور س بوضع ص = ٠

٠ = (س − ﻫ)^٢ (س − ب)^٣

(س − ﻫ)^٢ = ٠ ⟸ س = ﻫ

(س − ب)^٣ = ٠ ⟸ س = ب

③ النقطة الحرجة

س = $\frac{ﻫ ك + ل ب}{ك + ل}$ = $\frac{٣ﻫ + ٢ب}{٥}$

ص = $\underbrace{\left(\frac{٣ﻫ + ٢ب}{٥} - ﻫ\right)^٢}_{\neq ٠}$ $\left(\frac{٣ﻫ + ٢ب}{٥} - ب\right)^٣$

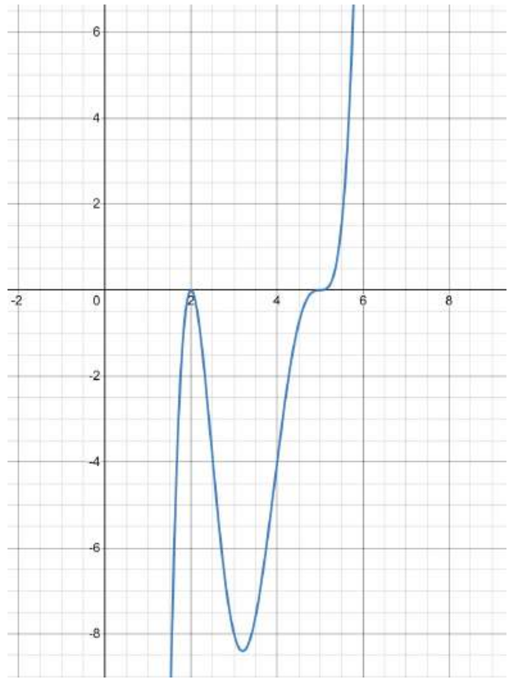
= $\left(\frac{٢ب - ٢ﻫ}{٥}\right)^٢$ $\left(\frac{٣ﻫ - ٣ب}{٥}\right)^٣$ < ٠

موجب ←   سالب ←

لرسم ص = (س − ٢)^٢ (س − ٥)^٣ بدقة ندرس المشتقة الأولى ونجد القيم العظمى والصغرى والتزايد والتناقص وندرس المشتقة الثانية ونجد نقاط الانقلاب والتقعر لأعلى ولأسفل ثم نأخذ نقط مساعدة مثل نقاط التقاطع مع محور س و ص

أحمد المقرشية

التمثيل البياني للدالة $ص = (س-٢)^{٢}(س-٥)^{٣}$ ببرنامج Desmos



ج باستخدام التمثيل البياني لمنحنى الدالة أو أي طريقة أخرى، حدد شرطًا على ل (و/أو) ك لتحديد متى تكون هذه النقطة الحرجة نقطة صغرى.

ك عدد فردي

أحلام القرشية