٣-١ب نهاية الدالة النسبيّة

بسط ومقام

الدالة النسبيّة rational function: هي دالة يمكن كتابتها في صورة نسبة بين دالتين كثيرات الحدود.

بعض الأمثلة على الدوال النسبية:

$ع(س) = \frac{س^2 - 4}{س^2 - 9}$ ، $ق(س) = \frac{3س^2}{س^2 + 8}$ ، $د(س) = \frac{3س - 8}{س - 2}$ ، $هـ(س) = \frac{س^2 - 9}{س - 3}$ ،

فيما يأتي بيان الدالتَين $د(س) = \frac{3س - 8}{س - 2}$

$د(2) = \frac{6 - 8}{2 - 2} = \frac{-2}{0}$ (غير معرفة) $د(2)$ = غير موجودة

المجال $س \in ح$ ، $س \neq 2$ أو $ح - \{2\}$

نبحث وجود نهاية عند $س = 2$

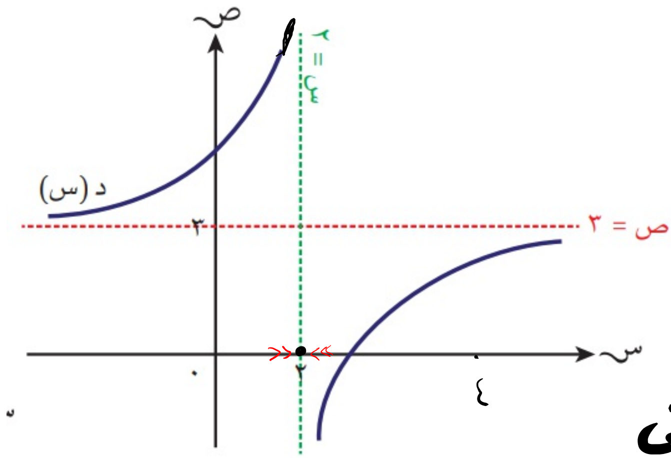
س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	----	----	٢		١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	-١٧	-١٩٧	-١٩٩٧	-١٩٩٩٧	----	----			٢٠٠٠٣	٢٠٠٣	٢٠٣	٢٣

اليمنى اليسرى

$\lim_{س \to 2^+} د(س) = -\infty$ $\lim_{س \to 2^-} د(س) = \infty$

$\therefore \lim_{س \to 2^+} د(س) \neq \lim_{س \to 2^-} د(س)$

$\therefore \lim_{س \to 2} د(س)$ غير موجودة



$س = 2$ خط تقارب رأسي

$ص = 3$ خط تقارب أفقي

د(س) غير معرفة عند س =٢، د (س) = ٣ لا حلول لها.

$هـ(س) = \frac{س^2 - 9}{س - 3}$:

$هـ(3) = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ كمية غير معينة

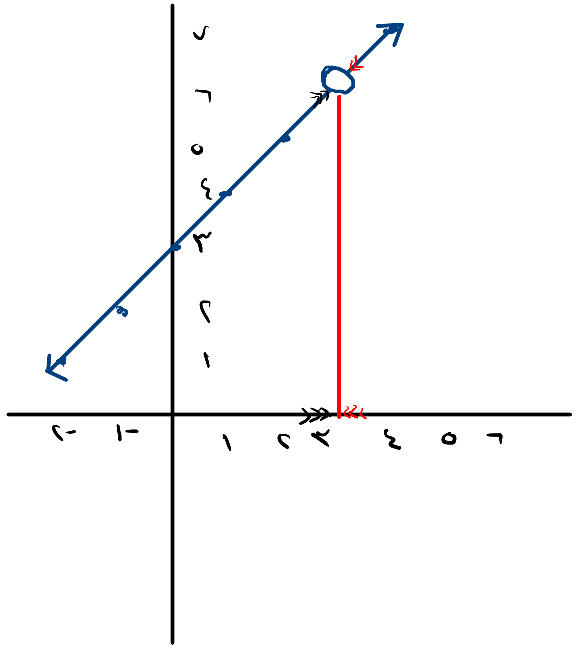
المجال $ح - \{3\}$

$س \in ح$ ، $س \neq 3$ (الدالة غير معرفة عند $س = 3$)

$هـ(س) = \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س - 3)}$

$ص = س + 3$ $س \neq 3$

س	١	٢	٤	٠	-١	-٢
ص	٤	٥	٧	٣	٢	١



$\lim_{س \to 3^+} هـ(س) = 6$ $\lim_{س \to 3^-} هـ(س) = 6$

$\therefore \lim_{س \to 3^+} هـ(س) = \lim_{س \to 3^-} هـ(س) = 6$

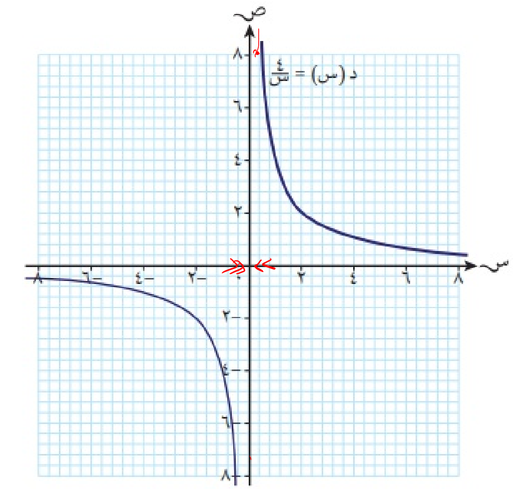
$\therefore \lim_{س \to 3} هـ(س) = 6$

المنحنيان في بيان الدالة د (س) يقتربان أكثر فأكثر من المستقيمين المنقطين، ولكن لا يصلان إليهما أبدًا. يسمى كل من هذين المستقيمين **بخط التقارب asymptote**، ويشير خط التقارب الرأسي إلى قيم س التي تكون الدالة عندها غير معرّفة.

النقطة الناقصة في منحنى الدالة هـ(س) تعرف **بالفجوة hole**.

يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالة د(س) = $\frac{٤}{س}$: = $\frac{س + ٤}{س - ١}$

س = ٠
ص = ٠



من جهة اليمين	
س	د(س)
١	٤
٠,٥	٨
٠,٠٥	٨٠
٠,٠٠٥	٨٠٠
	∞

من جهة اليسار	
س	د(س)
-١	-٤
-٠,٥	-٨
-٠,٠٥	-٨٠
-٠,٠٠٥	-٨٠٠
	-∞

ب اشرح، باستخدام الرموز، سبب عدم وجود $\lim_{س \to ٠}$ د(س).

ج اكتب معادلتَي خطي التقارب الرأسي والأفقي.

$\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = ∞ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = −∞

∴ $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) ≠ $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س)

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة

معادلة التقارب الافقي ص = ٠

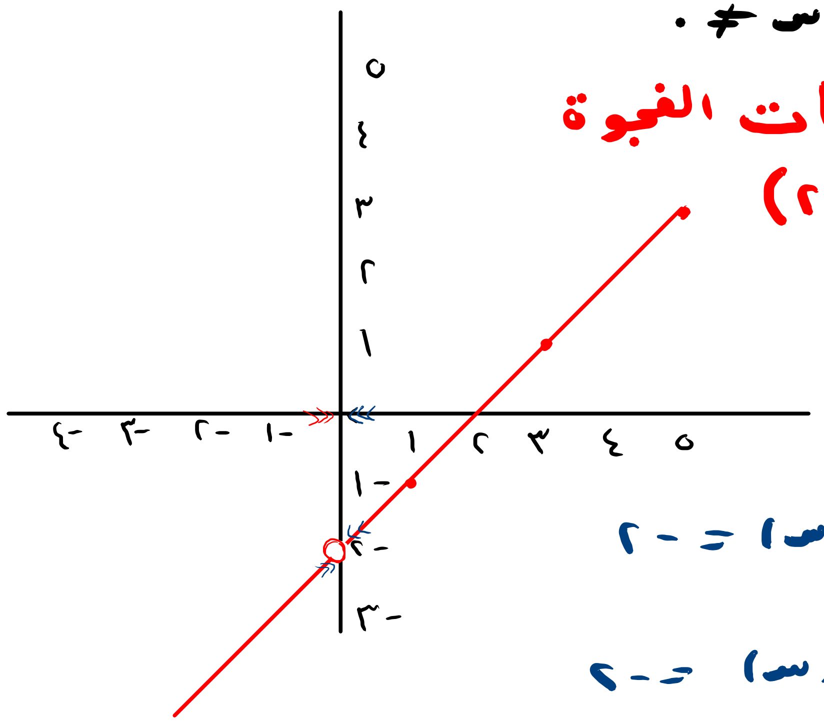
معادلة التقارب الرأسي س = ٠

٢) د(س) = $\frac{س^٢ - ٢س}{س}$ المجال ح − {٠} او س ∈ ح ، س ≠ ٠

د(س) = $\frac{س(س - ٢)}{س}$ = س − ٢ ، س ≠ ٠

ص = س − ٢ ، س ≠ ٠

س	١	٣	٥
ص	-١	١	٣



احداثيات الفجوة (٠، -٢)

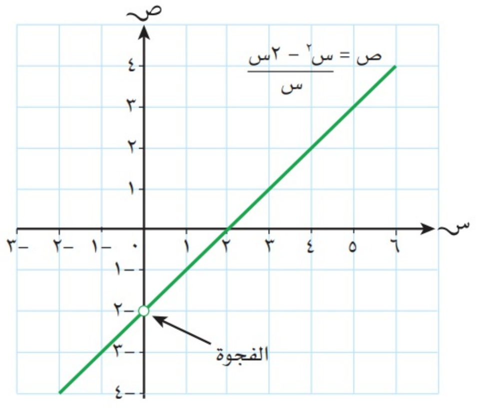
$\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ؟

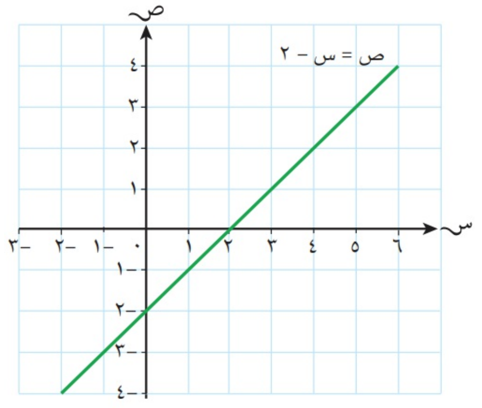
$\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = -٢ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = -٢

∴ $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = -٢

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = -٢

قارن التمثيلين البيانيين الموضحين أدناه:





فيما يلي جدول القيم للدالة النسبية $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$:

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	−٣	−٢	−١	٠	١	غير معرّفة	٣	٤	٥	٦	٧

أ أوجد إحداثيات الفجوة الموجودة في منحنى الدالة د(س).

ب بيّن أن $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) موجودة، وأوجد قيمتها.

$د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} = س + ١$

الاحداثي السيني للفجوة = ١

الاحداثي الصادي للفجوة

ص = س + ١

ص = ١ + ١ = ٢

الفجوة (١ ، ٢)

من جهة اليمين

س	$د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$
١,١	٢,١
١,٠١	٢,٠١
١,٠٠١	٢,٠٠١
١,٠٠٠١	٢,٠٠٠١

إذا جعلنا قيمة س تقترب من ١ بالتناقص من جهة اليمين، نجد أن $\lim\limits_{س \to ١^{+}}$ د(س) = ٢

من جهة اليسار

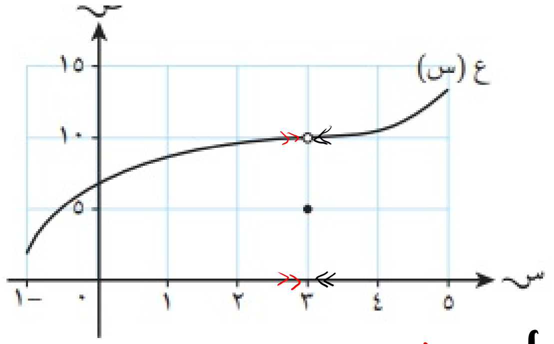
س	$د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$
٠,٩	١,٩
٠,٩٩	١,٩٩
٠,٩٩٩	١,٩٩٩
٠,٩٩٩٩	١,٩٩٩٩

إذا جعلنا قيمة س تقترب من ١ بالتزايد من جهة اليسار، نجد أن $\lim\limits_{س \to ١^{-}}$ د(س) = ٢

$\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) موجودة لأن $\lim\limits_{س \to ١^{+}}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ١^{-}}$ د(س)

∴ $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) = ٢

باستخدام التمثيل البياني المقابل:



أ أوجد ع(٣). = ٥

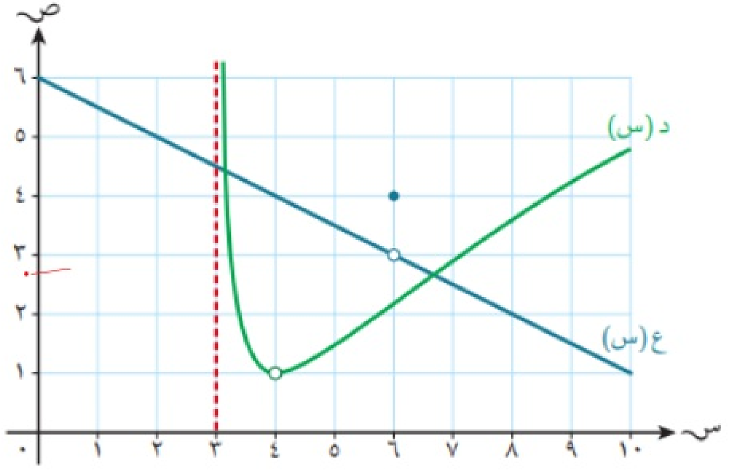
ب قدّر قيمة $\lim\limits_{س \to ٣}$ ع(س).

الحـلّ:

$\lim\limits_{س \to ٣^{+}}$ ع(س) = ١٠ $\lim\limits_{س \to ٣^{-}}$ ع(س) = ١٠

∵ $\lim\limits_{س \to ٣^{+}}$ ع(س) = $\lim\limits_{س \to ٣^{-}}$ ع(س) = ١٠

∴ $\lim\limits_{س \to ٣}$ ع(س) = ١٠



أ استخدم التمثيلَين البيانيَين حيث أمكن لتقدّر قيمة:

١) ع(٦) = ٤   ٢) $\lim\limits_{س \to ٦}$ ع(س) = ٣

٣) د(٤) = غ٠م   ٤) $\lim\limits_{س \to ٤}$ د(س) = ١

ب علامَ يدلك المستقيم المنقط الذي معادلته س = ٣ حول تمثيل الدالة د(س)؟

خط تقارب رأسي للدالة د(س)

إذا كانت الدالة ع (س) = $\frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤}$: = $\frac{(س - ٣)(س - ٤)}{س - ٤}$

ص = س − ٣

أ اشرح سبب أن الدالة ع(س) غير معرّفة عند س = ٤

ب استخدم جدولًا لتجد نهاية ع(س) عندما تقترب س إلى ٤ من:

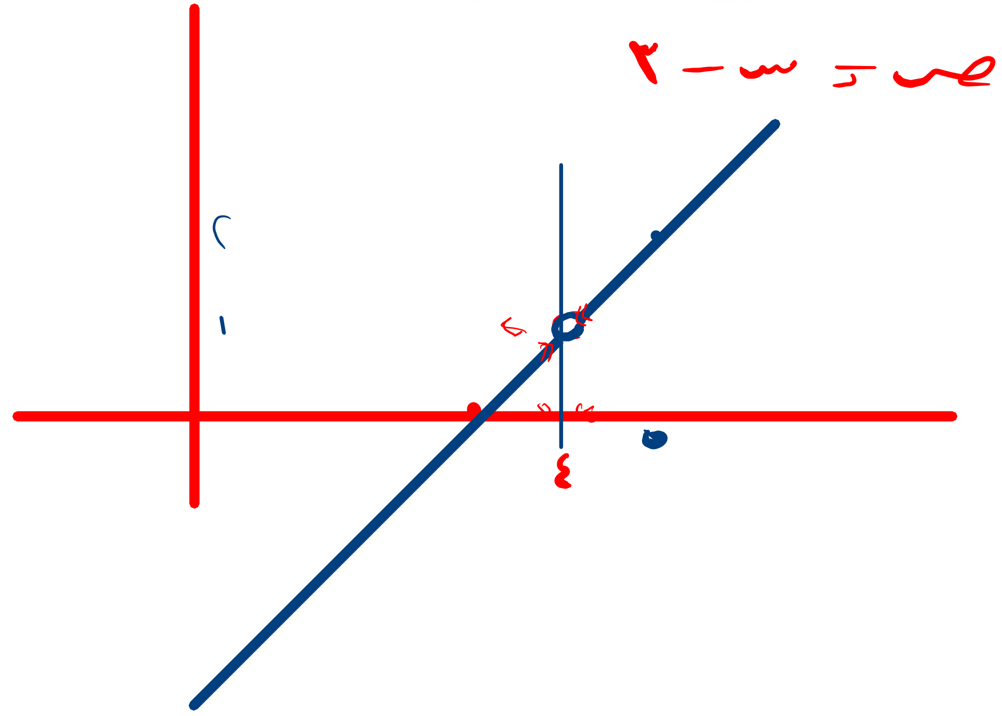
(١،٤)

١) جهة اليسار.

٢) جهة اليمين.

ج أعطِ سبب وجود نهاية الدالة ع(س) عند س = ٤

ص = س − ٢



إذا كانت الدالة د (س) = $\frac{٢س - ١}{س}$:

أ انسخ وأكمل الجدولين الآتيين اللذين يبيّنان قيمة د (س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، ومن جهة اليمين:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٠,١	−٨
٠,٠٥	−١٨
٠,٠١	−٩٨
٠,٠٠٥	−١٩٨
٠,٠٠١	
٠,٠٠٠٥	

من جهة اليسار	
س	د(س)
−٠,١	٨
−٠,٠٥	١٨
−٠,٠١	٩٨
−٠,٠٠٥	
−٠,٠٠١	
−٠,٠٠٠٥	

ب اذكر ما إذا كان ممكنًا إيجاد أي نهاية من النهايتين الآتيتين، وأعطِ سببًا لكل إجابة:

١) $\lim_{س \leftarrow ٠^{+}}$ د (س). = −∞

٢) $\lim_{س \leftarrow ٠^{-}}$ د (س). = ∞

ج ماذا تستنتج عن $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س)؟ غ.م