تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العُمانية

موقع
المناهج العمانية

www.alManahj.com/om

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/om

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر اضغط هنا

https://almanahj.com/om/12

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر في مادة رياضيات بحتة ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/om/12pure_math

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر في مادة رياضيات بحتة الخاصة بـ الفصل الأول اضغط هنا

https://almanahj.com/om/12pure_math1

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر اضغط هنا

https://almanahj.com/om/grade12

* لتحميل جميع ملفات المدرس عبد العزيز الخطيب اضغط هنا

للتحدث إلى بوت على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/omcourse_bot

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

المراجعة النهائية

تمارين إثرائية

علي

almanahj.com/om

وحدة النهايات والاتصال

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

الأسئلة

١)أوجد $\lim_{س \to 0} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{٨} - \frac{١}{(٢+س)^{٣}}\right)$ دورة شتوية ٢٠١٣

٢)أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س+٣} - \sqrt{٤س+١}}{س-٢}$ دورة صيفية ٢٠١٣

٣)أوجد $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س}-٢}{\frac{س}{٢}-٤}$ دورة شتوية ٢٠١٤

٤)أوجد $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س+١|-٥}{س^{٣}+٨}$ دورة شتوية ٢٠١٤

٥)إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + \frac{١}{س}\left[\frac{س}{٣}\right] + ١٤ & ، ٣ \geq س \geq ٠ \\ \frac{|س-٣|}{س^{٢}-٩} & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$

فأوجد $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ دورة شتوية ٢٠١٤

٦)إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{|س-٣|} & ، س < ٣ \\ جس^{٢} - ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$ دورة شتوية ٢٠١٣

وكانت $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة فما قيمة الثابت جـ ؟

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٧)أوجد $\lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{س + \sqrt{٢س^{٢} - ٩}}$ دورة شتوية ٢٠١٥

٨)أوجد $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} - ٩} - \frac{س + ٣}{س - ٣} \right)$ دورة صيفية ٢٠١٥

٩)أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س - \sqrt{س + ١}}{٩ - ٣س}$ دورة شتوية ٢٠١٦

١٠)أوجد $\lim_{س \to -٢٧} \frac{\sqrt{٩ - س} - ٦}{٣ + \sqrt[٣]{س^{٢}}}$ دورة صيفية ٢٠١٦

١١)أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س^{٢} - ٤}$ دورة شتوية ٢٠١٧

١٢)أوجد $\lim_{س \to ١} \frac{((س + ١)^{٢} - ٤)^{٤}}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٢}}$ دورة صيفية ٢٠١٧

١٣)أوجد $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{\sqrt{س} + ١} \right)$ دورة صيفية ٢٠١٨

١٤)إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٦س + ٩} + أس - ٣}{س} =$ صفر فما قيمة الثابت (أ) دورة شتوية ٢٠١٨

١٥)إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أس^{٢} + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$ فما قيمة كل من أ، ب دورة شتوية ٢٠٠٨

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٦)ليكن ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، \quad س < ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال الدالة ق(س) لجميع قيم س الحقيقية .

١٧)إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} [س] + س & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ \sqrt{س} + \frac{٣}{٥}س^{٢} & ، \quad ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) علي (-١ ، ٢) دورة صيفية ٢٠٠٨

١٨)إذا كانت ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٣س - ٥}{س^{٢} - ٢س + ١٢}$ متصلة علي ح فاوجد مجموعة قيم الثابت أ دورة صيفية ٢٠٠٨

١٩)إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + \sqrt{-س} & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ [س] + ٥س - ٠,٢ & ، \quad ١ \leq س \leq ١,٨ \end{cases}$

فابحث في اتصال الدالة ق(س) علي الفترة [-١,٨] دورة شتوية ٢٠٠٩

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢٠)إذا كانت $\lim_{س \to ١}$ $\frac{ق(س)-٦}{س-١} = ٨$ وكانت $\lim_{س \to ١}$ $\frac{س^{٢}+٢س-٣}{ق(س)-٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة الثابت ب

دورة شتوية ٢٠٠٩

٢١)إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} \sqrt[٣]{س} + |س| - ٢ & ٠ \leq س < ٢ \\ \frac{٤}{س-١} & ٣ > س \geq ٠ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الدالة ق(س) علي [−٢،٣]

دورة صيفية ٢٠٠٩

٢٢)إذا كانت هـ(س) دالة كثيرة حدود وكانت $\lim_{س \to ٠}$ $\left(\frac{هـ(س)+٥}{س}\right) = \frac{١}{٢}$ وكانت

$\lim_{س \to ٠}$ (هـ(س) − ٥ + ٣ب) = ٢ فأوجد قيمة ب

دورة صيفية ٢٠٠٩

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢٣)إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} + س^{٢} ، ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٢ ، ٣ < س < ٣ \\ ٣ ، س = ٣ \end{cases}$

وكانت $ق(س)$ متصلة عند س =٢ فأجب عما يلي :-

(أ)أوجد قيمة الثابت أ

(ب) ابحث في اتصال الدالة $ق(س)$ علي $[٠ ، ٣]$ دورة شتوية ٢٠١٠

٢٤)إذا كانت $ق(س)$ كثيرة حدود وكانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$

وكانت $ق(س) - ٢س + ٣ب = ٧$ فما قيمة الثابت ب

٢٥)ابحث في اتصال الدالة $ق(س)$ حيث $ق(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ ، $-٢ \leq س < -١$

$س[س] + ١$ ، $-١ \leq س < ١$

علي الفترة $[-٢ ، ٢]$ دورة شتوية ٢٠١٠

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١}{س} \left(١ - \frac{١}{\sqrt{١ + س}} \right)$

٢٧) إذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{أ س^{٢} - ب س - ٥}{س + ١} = -٧$ فأوجد قيمة كل من الثابت أ ، ب دورة صيفية ٢٠١١

٢٨) إذا كان $ل(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س + ٢}$ ، $هـ(س) = [س]$

فابحث في اتصال الدالة $ق(س) = ل(س) \times هـ(س)$ علي الفترة $[٢، ٠]$ دورة شتوية ٢٠١٢

٢٩) أوجد قيمة $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

٣٠) ليكن $ق(س) = \begin{cases} ٥س - ٩ & ، س \geq ٢ \\ \left[٢ - \frac{١}{٢} س \right] & ، ٢ > س \geq ٤ \\ |س - ٤| & ، س < ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال الدالة $ق(س)$ عليح

٣١) أوجد قيمة $\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$ دورة صيفية ٢٠١٢

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٣٢)ليكن ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س + ١ & ، \quad س \prec ٣ \\ [س + ١] & ، \quad ٣ \leq س \prec ٤ \\ ٩ - ٢س & ، \quad س \leq ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال الدالة ق(س) علي ح .

٣٣)إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} + س^{٢} + ٢س - ٤}{س - ١} & ، \quad س \neq ١ \\ ٥س - ١ & ، \quad س = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الدالة ق(س) عند س = ١

شتوية ٢٠١٣

٣٤)إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \quad س \geq ٢ \\ [س + ٣] & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الدالة ق(س) عند س = ٢

٣٥)إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} \left| \dfrac{س}{٢} - ١ \right| & ، \quad -١ \leq س \prec ٣ \\ \left[\dfrac{١}{٢} س + ٣ \right] & ، \quad ٣ \leq س \prec ٤ \end{cases}$

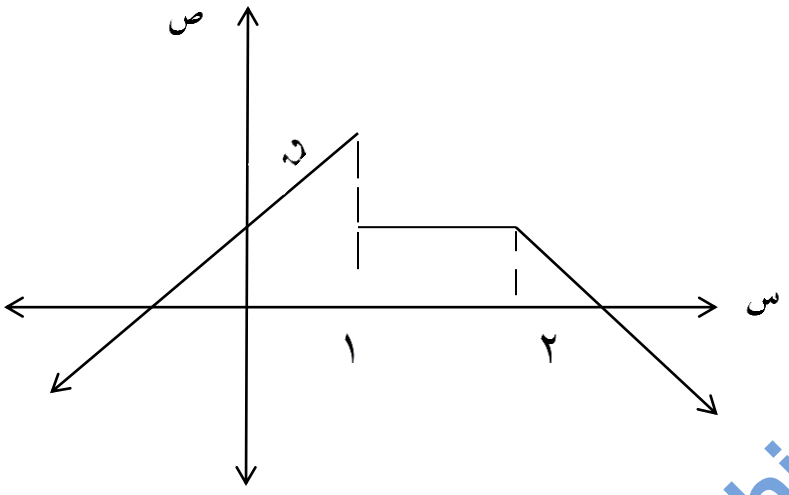
فابحث في اتصال الدالة ق(س) عند س = ٣

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

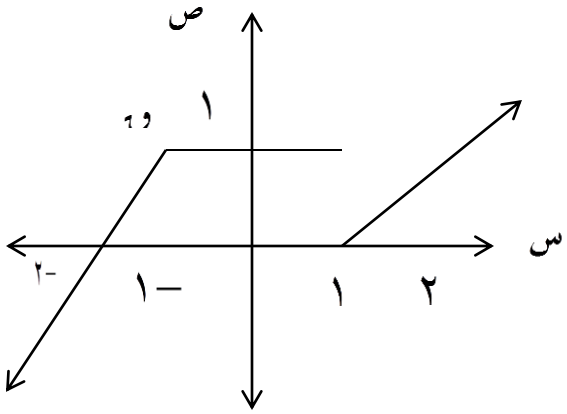
اختر الاجابة الصحيحة من بين البدائل المعطاة

١)إذا كان الشكل المجاور يمثل منحني الدالة من المعرفة عل ح فإن مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ١ هي:-



- ○]٢،١[
- ○ {٠} ∨ [٢،١]
- ○]٢،١[
- ○ {٠} ∨ [٢،١[

٢)إذا كان الشكل المجاور يمثل منحني الدالة د المعرفة علي ح فإن مجموعة قيم $س_{١}$ التي تجعل $\lim_{س \to س_{١}}$ د(س) = ١



- ○]-١،١[
- ○]-١،١]
- ○]-١،١] ∨ {٠}
- ○]-١،١[∨ {٠}

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

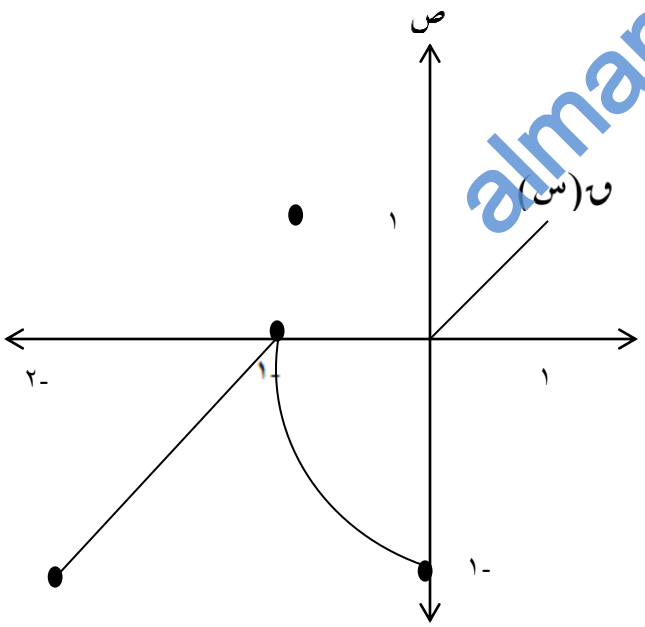
٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ تساوي :ـ

○ صفر ○ $\sqrt{٦}$ ○ ٦ ○ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢٥)^{س} - (٥)^{س}}{(٥)^{س} - ١}$ تساوي :ـ

○ ١- ○ صفر ○ ١ ○ غير موجودة

٥)إذا كان الشكل المجاور يمثل منحني الدالة د(س) المعرفة علي]-٢،١[فإن مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ د(س) غير موجودة هي :ـ



○ {١-، ٠}

○ {٢-، ١-، ٠، ١}

○ {٠، ١}

○ {١-، ٠، ١}

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٦)إذا كانت ق(س) دالة كثيرة حدود وكانت $\lim_{س\to 0} \frac{٢ق(س)}{س} = ٤$ فإن $\lim_{س\to 0} \frac{(س+١)^{٢}-١}{ق(س)}$

○ ٤ ○ ١ ○ $\frac{١}{٤}$ ○ ٢

٧) $\lim_{س\to 0} \frac{٦س^{٤}+١٨س^{٢}}{٢س^{٢}-٣س^{٣}}$

○ ٦- ○ ٢- ○ ٣ ○ ٩

٨)إذا كان ق(س) = ٣ ، س = ١

[س] + ٥ ، ١ < س < ٢

٤ ، س = ٢

فإن ق(س) متصلة علي فترة

○ [٢،١] ○]٢،١[○]٢،١] ○ [٢،١[

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٩)إذا كان $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٥} + ٣}{س^{٢} + ٢}$ فإن $\lim_{س \to ٥} د(س)$

○ $\frac{٣}{٢٧}$ ○ صفر ○ غير موجودة ○ $\frac{١}{٤}$

١٠)إذا كانت $د(س) = \begin{cases} [س] + ب & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ \frac{١}{س} & ، \ ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

فأوجد قيمة الثابت ب التي تجعل د (متصلة) عند س = ٢

○ -١ ○ -٤ ○ ٣ ○ ٤

١١)إذا كانت د(س) متصلة عند س = ٣ وكان د(٣) = -١ فإن $\lim_{س \to ٣} د(س) =$

○ $\frac{١}{٢}$ ○ -١ ○ $-\frac{١}{٢}$ ○ ١

١٢)إذا كانت د(س) متصلة عند س = ٤ وكان د(٤) = ٦ وكانت $\lim_{س \to ٤^{+}} د(س) = ٤ب$ فإن قيمة ب =

○ $\frac{٣}{٢}$ ○ ٢ ○ $\frac{١}{٢}$ ○ -٢

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٣)إذا كانت ق(س) كثيرة حدود وكانت $\lim_{س \to ٠} (ق(س) - ٥) = ٣$ فإن $\overline{|ق(س)|}_{٢} =$

○ غير موجودة ○ ٤ ○ ٤- ○ ١٦

١٤)إذا كانت ق(س) كثيرة حدود وكانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{س} = ٣$ فإن $\lim_{س \to ٢} \frac{ق^{٢}(س)}{س} =$

○ ٣٦ ○ ٦ ○ ١٨ ○ ٩

١٥)إذا كانت ق(س) متصلة عند س = ١ وكان ق(١) = ٤ فأوجد $\lim_{س \to ١^{+}} \left(\overline{|ق(س)|}_{١} + \frac{|س - ١|}{س - ١} \right)$

○ غير موجودة ○ ٢ ○ ١ ○ ٣

١٦)إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{ل(س) - ٤}{س} = ٨$ وكان ل(س) دالة كثيرة حدود فإن $\lim_{س \to ٠} (ل(س) + ١٠) =$

○ ٦ ○ ١٨ ○ ١٤ ○ ٤

١٧)إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} + (أ + ١٣)س + أ}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$ فأوجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

○ ١٠- ○ ١٣- ○ ٣٠- ○ ٣٠

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

إجابات التمارين الإثرائية علي

وحدة النهايات والإتصال

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١) $\lim_{س\to٠} \frac{١}{س} \times \frac{٨-(٢+س)^{٣}}{٨\times(٢+س)^{٣}} = \lim_{س\to٠} \frac{١}{س} \times \frac{(٢+س)-((٢+س)٢+٤)(٢+س)^{٢}}{٨\times(٢+س)^{٣}}$

$= \lim_{س\to٠} \frac{١}{س} \times \frac{(-س-٢-٢)(٤+٤+٢س+٤+س^{٢})}{٨\times(٢+س)^{٣}}$

$= \frac{-١\times(٤+٤+٢\times٠+٤)}{٨\times(٠+٢)^{٣}} = \frac{-١٢}{٦٤} = \frac{-٣}{١٦}$

---

٢) $\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{٣س+٣}-\sqrt{٤س+١}}{س-٢} \times \frac{\sqrt{٣س+٣}+\sqrt{٤س+١}}{\sqrt{٣س+٣}+\sqrt{٤س+١}}$

$= \lim_{س\to٢} \frac{٣س+٣-(٤س+١)}{(س-٢)(\sqrt{٣س+٣}+\sqrt{٤س+١})}$

$= \lim_{س\to٢} \frac{(-س-٢)}{(س-٢)(\sqrt{٣س+٣}+\sqrt{٤س+١})}$

$= = \frac{-١}{\sqrt{٣+٢\times٣}+\sqrt{١+٢\times٤}} = \frac{-١}{٣+٣} = \frac{-١}{٦}$

---

٣) $\lim_{س\to٨} \frac{\sqrt[٣]{س}-٢}{\frac{س}{٢}-٤} \times \frac{\sqrt[٣]{س}^{٢}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}{\sqrt[٣]{س}^{٢}+٢\sqrt[٣]{س}+٤}$

$= \lim_{س\to٨} \frac{-س-٨}{\frac{١}{٢}(-س-٨)(\sqrt[٣]{س}^{٢}+٢\sqrt[٣]{س}+٤)}$

$= \frac{-١}{\frac{١}{٢}(٤+٤+٤)} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}\times١٢} = \frac{-١}{٦}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٤) $\lim_{س\to -٢} \frac{|٣س+١|-٥}{س^{٣}+٨} = \lim_{س\to -٢} \frac{-(٣س+١)-٥}{س^{٣}+٨} = \lim_{س\to -٢} \frac{-٣س-٦}{س^{٣}+٨}$

$= \lim_{س\to -٢} \frac{-٣(س+٢)}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)} = \frac{-٣}{٤+٤+٤} = \frac{-٣}{١٢} = -\frac{١}{٤}$

---

٥) $\lim_{س\to ٣^{-}} ق(س) = \lim_{س\to ٣^{-}} \left(٢س^{٢} + \frac{١}{س} + \left[\left[\frac{س}{٣}\right]\right]\right) = ١٨ + \frac{١}{٣} + ٠ = ١٨\frac{١}{٣}$

$\lim_{س\to ٣^{+}} ق(س) = \lim_{س\to ٣^{+}} \frac{|س-٣|}{س^{٢}-٩} = \lim_{س\to ٣^{+}} \frac{(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{١}{٦}$

$\lim_{س\to ٣^{-}} ق(س) \neq \lim_{س\to ٣^{+}} ق(س) \therefore \lim_{س\to ٣} ق(س)$ غير موجودة

---

٦) $|س-٣| = س-٣$ عندما $س \to ٣^{+}$

$\lim_{س\to ٣^{-}} ق(س) = \lim_{س\to ٣^{+}} ق(س)$ $\lim_{س\to ٣^{-}} (جس^{٢}-٤) = \lim_{س\to ٣^{+}} \frac{٣-س}{س-٣}$

$٩جـ - ٤ = -١ \longleftarrow ٩جـ = -١+٤ \longleftarrow ٩جـ = ٣ \longleftarrow جـ = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٧) $\lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{\sqrt{٢س^{٢} + س}} \times \frac{\sqrt{٢س^{٢} - ٩} - س}{\sqrt{٢س^{٢} - ٩} - س}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س - \sqrt{٢س^{٢} - ٩})}{س^{٢} - (٢س^{٢} - ٩)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س - \sqrt{٢س^{٢} - ٩})}{٩ - س^{٢}}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(\cancel{س + ٣})(س - \sqrt{٢س^{٢} - ٩})}{(\cancel{س + ٣})(٣ - س)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{-٣ - \sqrt{٢(-٣)^{٢} - ٩}}{٣ + ٣}$

$= \frac{-٣ - ٣}{٦} = \frac{-٦}{٦} = -١$

---

٨) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٢٧}{(س - ٣)(س + ٣)} - \frac{(س + ٣)}{س - ٣} \times \frac{س + ٣}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٢٧ - (س^{٢} + ٣س + ٣س + ٩)}{(س + ٣)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{س^{٢}} + ٢٧ - \cancel{س^{٢}} - ٣س - ٣س - ٩}{(س + ٣)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{١٨ - ٦س}{(س + ٣)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٦(\cancel{٣ - س})}{(\cancel{س - ٣})(س + ٣)}$

$= \frac{-٦}{٦} = -١$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٩) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س\sqrt{س+١}}{٩ - ٣س} \times \frac{٦ + س\sqrt{س+١}}{٦ + س\sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^{٢}(س+١)}{(٩ - ٣س)(٦ + س\sqrt{س+١})}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^{٣} - س^{٢}}{٣(٣ - س)(٦ + س\sqrt{س+١})}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(-س^{٢} - ٤س - ١٢)(س - ٣)}{٣(٣ - س)(٦ + س\sqrt{س+١})}$

$= \frac{(-٩ - ١٢ - ١٢)(-١)}{٣(٦ + ٣\sqrt{٣+١})} = \frac{٣٣}{٣٦} = \frac{١١}{١٢}$

قسمة تركيبية

$-س^{٣} - س^{٢} + ٣٦$

$-١ \quad -١ \quad -٣٦$ ←٣

$-١ \quad -٤ \quad -١٢ \quad ٠$

$-س^{٢} - ٤س - ١٢$

$(س - ٣)$

---

١٠) $\lim_{س \to -٢٧} \frac{٦ - \sqrt[٣]{س} - ٩}{\sqrt[٣]{س} + ٣} \times \frac{٦ + \sqrt[٣]{س} - ٩}{٦ + \sqrt[٣]{س} - ٩} \times \frac{\sqrt[٣]{س}^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س} - ٩}{\sqrt[٣]{س}^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س} - ٩}$

$= \lim_{س \to -٢٧} \frac{(٩ + ٩ + ٩)(٣٦ - س - ٩)}{(٦ + ٦)(س + ٢٧)}$

$\lim_{س \to -٢٧} \frac{(٢٧)(\cancel{٢٧ - س})}{(١٢)(\cancel{٢٧ + س})} = \frac{٢٧}{١٢} = \frac{٩}{٤}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١١)قسمة تركيبه

	١	٣	٤-	١٢-	لـ٢
		٠	٢	١٠	١٢
	١	٥	٦	٠	

$$(س^{٢}+٥س+٦)(س+٢)$$

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢}\frac{(س^{٢}+٥س+٦)(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}=\frac{٤+١٠+٦}{٤}=\frac{٢٠}{٤}=٥$$

---

١٢)١) $((س+١)^{٢}-٤)^{٤}$ البسط $=((س+١-١)(س+١+٢))^{٤}$

$=((س-١)(س+٣))^{٤}=(س-١)^{٤}(س+٣)^{٤}$

٢) $(س-٢س+١)^{٢}$ المقام $=((س-١)^{٢})^{٢}=(س-١)^{٤}$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س\leftarrow ١}\frac{(س-١)^{٤}(س+٣)^{٤}}{(س-١)^{٤}}=(١+٣)^{٤}=٤^{٤}=٢٥٦$$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٣) $\lim_{س\to١} \frac{١}{س-١}\left(\frac{٢-(س+\sqrt{س})}{(٢)(س+\sqrt{س})}\right) = \lim_{س\to١} \frac{١}{س-١}\left(\frac{-(س+\sqrt{س}-٢)}{(٢)(س+\sqrt{س})}\right)$

$= \lim_{س\to١} \frac{١}{(\sqrt{س}-١)(\sqrt{س}+١)} \times \left(\frac{-(\sqrt{س}-١)(\sqrt{س}+٢)}{(٢)(س+\sqrt{س})}\right)$

$= \frac{١\times(-(٢+١))}{(٢)(١+١)(١+١)} = \frac{-٣}{٨}$

١٤) $\lim_{س\to٠} \frac{\sqrt{٦س+٩}-٣}{س} + \lim_{س\to٠} \frac{\sqrt{٦س+٩}+٣}{\sqrt{٦س+٩}+٣} = \lim_{س\to٠} \frac{٦س+٩-٩}{س(\sqrt{٦س+٩}+٣)} + ٢$

$= \frac{٦}{٦} + ٢ = ٠ \leftarrow ١+٢ = ٠ \leftarrow ٢ = -١$

١٥) ∵ ناتج التعويض في المقام = صفر والنهاية موجودة ∴ ناتج التعويض في البسط يعطي صفر .

$٢\times١^{٢} + ٢ب\times١ + ٢ = ٠ \leftarrow ٢ + ٢ب + ٢ = ٠ \quad ٢ب = -٢-٢ = -٢$

$\therefore \lim_{س\to١} \frac{٢س^{٢} + (-٢-٢)س + ٢}{س-١} \leftarrow \lim_{س\to١} \frac{٢س^{٢} - ٢س - ٢س + ٢}{س-١}$

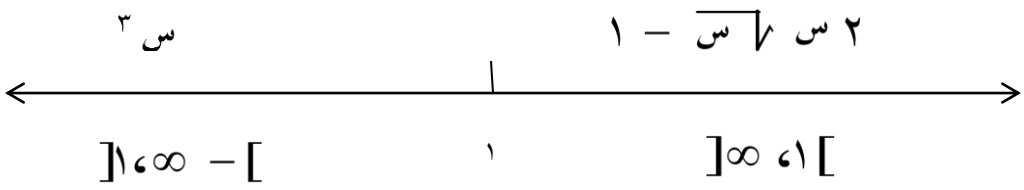
$\lim_{س\to١} \frac{٢س^{٢}-٢س}{س-١} + \lim_{س\to١} \frac{-٢س+٢}{س-١} \leftarrow \lim_{س\to١} \frac{٢س(س-١)}{(س-١)} + \lim_{س\to١} \frac{-٢(س-١)}{(س-١)}$

$= ٢\times١ + ب = ٠ \leftarrow ٢ = ١ \leftarrow ٢ = -ب - ٢ \leftarrow ٢ب = -٢ - ٣ \leftarrow ٢ب = -٥ \leftarrow ب = \frac{-٥}{٢}$ ∴ ٢ب = -٣

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

(١٦



أولا بحث الاتصال علي الفترات المفتوحة

]−∞ ، ١[ن(س) = س ٣ حدودية فهي متصلة .

]١، ∞[ن(س) = ٢س × √س − ١ .

٢س حدودية فهي متصلة ، √س جذرية متصلة علي]١، ∞[لأن مجالها س ≥ ٠ وحاصل ضرب دالتين متصلتين يعطي دالة متصلة . ∴ ن(س) متصلة علي]١، ∞[.

ثانيا :بحث الاتصال عند النقاط عند س =١ ن(١) = ٢ × √١ − ١ = ١

نهـــا ن(س) = ٢ × ١ − ١ = ١ ، نهـــا ن(س) = ١ ٣ = ١
س←١+ س←١−

∴ نهـــا ن(س) = ١ ∴ ن(١) = نهـــا ن(س) ∴ ن(س) متصلة عند س = ١
س←١ س←١

من اولاً وثانياً نستنتج أن ن(س) متصلة علي ح .

almanahj.com/om

*تمارين إثرائية *

علي

وحدة الإشتقاق

المراجعة النهائية

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

تمارين إثرائية

١)اذا كان معدل تغير الاقتران ق(س) علي الفترة [١،٥] يساوي -٢ وعلي الفترة [٥،٧] يساوي ٣ فأوجد معدل تغير الدالة ق(س) علي الفترة [١،٧]

الحل

(١) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١} = -٢$

$ق(٥) - ق(١) = -٢ \times ٤$

$ق(٥) - ق(١) = -٨$ ← ١

(٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٧) - ق(٥)}{٧ - ٥} = ٣$

$ق(٧) - ق(٥) = ٣ \times ٢$

$ق(٧) - ق(٥) = ٦$ ← ٢

$ق(٥) + ق(٧) = ٦$

$ق(٧) - ق(١) = -٨$ ← بالجمع

$ق(٧) - ق(١) = -٢$

(٣) $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٧) - ق(١)}{٧ - ١} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢)إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٣س − ب فأوجد قيمة أ إذا كان معدل تغير الدالة ق(س) علي الفترة [أ، ٢أ] يساوي ١٩

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٢أ) - ق(أ)}{٢أ - أ}$$

$$١٩ = \frac{(٢أ)٣ + ^{٢}(٢أ)أ - (٢أ)٣ - ب - (أ)^{٢}أ + ٣أ - ب)}{أ}$$

$$١٩ = \frac{٤أ^{٣} + ٦أ - ب - أ^{٣} + ٣أ ب}{أ} \leftarrow \frac{٧(٣ + أ^{٢}٣)}{٧} = ١٩$$

$$٣أ^{٢} = ١٩ - ٣ \leftarrow ١٦ = أ^{٢}٣$$

$$أ^{٢} = \frac{١٦}{٣} \qquad أ = \pm \frac{٣}{\sqrt{٣٧}}$$

$$أ = \frac{٤}{\sqrt{٣٧}} \quad ، \quad أ = -\frac{٤}{\sqrt{٣٧}}$$ مرفوض لترتيب الفترات

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٣)اذا كان ن(س) = $\sqrt{س+٢}$ فأوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢) - ن(٢-٣هـ)}{٩هـ - هـ^{٢}}$

الحل

نقوم بترتيب المطلوب

$$-\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢-٣هـ) - ن(٢)}{هـ(٩-هـ)} = -\lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{٩-هـ} \times \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢-٣هـ) - ن(٢)}{هـ}$$

$$= -\frac{١}{٩} \times \frac{-٣}{١} \times ن'(٢) \quad ن'(٢) = \frac{١}{٣}$$

لكن $ن'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$

$$ن'(٢) = \frac{١}{٢\sqrt{٢+٢}} = \frac{١}{٤} \quad \therefore \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٢}$$

٤)أوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٢+هـ} - \sqrt[٣]{٢}}{هـ}$ الحل

من شكل النهاية نستنتج أن ع(س) = $\sqrt[٣]{س}$ = $س^{\frac{١}{٣}}$ وأن المطلوب هو دَ (٢)

$$\therefore ع'(س) = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$$

$$\therefore ع'(٢) = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{٢^{٢}}} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{٤}}$$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٥)اذا علمت أن $ن'(٤) = ٦$ فأوجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٤-٢هـ) - ن(٤+٥هـ)}{هـ}$

الحل

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٤-٢هـ) - ن(٤)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٤) - ن(٤+٥هـ)}{هـ}$$

$$-٢ن'(٤) - ٥ن'(٤) = -٧ن'(٤) = -٧ \times ٦ = -٤٢$$

٦)اذا علمت أن $ص = ع^{٢} + ١$ ، $ع^{٣} - ع = س$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$٣ع^{٢}س = ع + س$ $٣ع^{٢}س - ع = س$ $ع(٣ع^{٢}س - ١) = س$ $ع = \frac{س}{٣ع^{٢}س - ١}$

$$\therefore \frac{د ص}{د ع} = د ع، \frac{د ع}{د س} = \frac{(٣)س - ١ \times (١ - ٣س)}{(١ - ٣س)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س - ١ - ٣س}{(١ - ٣س)^{٢}} = \frac{-١}{(١ - ٣س)^{٢}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = ٢ع \times \frac{-١}{(١ - ٣س)^{٢}}$$

$$= ٢ \times \frac{س}{١ - ٣س} \times \frac{-١}{(١ - ٣س)^{٢}} = \frac{-٢س}{(١ - ٣س)^{٣}}$$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٧)من نقطة علي عمق (٥٥) متراً عن سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلي أعلي بحيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية من قذف الجسيم تعطي ف(ن) = ٦٠ ن – ٥ ن٢ جد سرعة الجسيم لحظة وصوله مستوي الأرض .

الحل

عندما يصل الجسم إلي سطح الأرض تكون ف(ن) = ٥٥

∴ ٦٠ ن – ٥ ن٢ = ٥٥

–٥ ن٢ +٦٠ ن – ٥٥ = ٠ (÷ –٥)

ن٢ – ١٢ن +١١ = ٠

ن =١ ن = ١١

ع(ن) = فَ (ن) = ٦٠ – ١٠ ن

ع(١) = ٦٠–١٠ × ١ = ٥٠

ع (١١) = ٦٠ – ١٠ × ١١ = –٥٠

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٨)أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة ق(س) = س ٢ + ٣ إذا كان العمودي علي هذا المماس يمر بالنقطة $\left(\frac{٩}{٢}، ٠\right)$

الحل

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص) ميل المماس = ق′(س) = ٢س

ميل العمودي = $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س - ٠}$ = $\frac{س^{٢} + ٣ - \frac{٩}{٢}}{س}$ = $\frac{س^{٢} - \frac{٣}{٢}}{س}$

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

$\frac{س^{٢} - \frac{٣}{٢}}{س} = \frac{-١}{٢س}$

٢س ٣ = ٣س = −س ⇐ ٢س ٣ − ٢س = ٠

٢س(س ٢ − ١) = ٠ ⇐ ٢س(س − ١)(س + ١) = ٠

س=٠ س = ١ س= −١

عند س = ٠ ق(٠) = ٣ ⟵ (٠ ، ٣)

ميل المماس = صفر معادلة المماس ص = ٣

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

عند س =١ ق(١) = ٤ النقطة (١ ، ٤)

م = قَ(١) = ٢

معادلة المماس ص–٤ =٢ (س – ١)

عند س = –١ ق(–١) = ٤ النقطة (–١ ، ٤)

م = قَ(–١) = –٢

معادلة المماس ص – ٤ = – ٢ (س + ١)

٩)إذا كان ل(س) = $\sqrt[٤]{(س^{٢}-س+١)^{٣}}$ وكان ن(١) = ٤

ن′(١) = ٢ فجد $\left(\frac{ن}{ل}\right)$َ(١) الحل

ل(١) = $\sqrt[٤]{(١-١+١^{٢})^{٣}}$ = ١

ل(س) = $(س^{٢}-س+١)^{\frac{٣}{٤}}$

ل′(س) = $\frac{٣}{٤}(س^{٢}-س+١)^{-\frac{١}{٤}}$

$= \frac{٣(٢س-١)}{٤(س^{٢}-س+١)^{\frac{١}{٤}}}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

$$ل'(١) = \frac{(١-١\times٢)٣}{\frac{١}{٤}(١+١-١)٤} = \frac{٣}{٤}$$

$$(\frac{ن}{ل})(١) = \frac{ل(١)\times ن'(١) - ن(١)\times ل'(١)}{(ل(١))^{٢}}$$

$$= \frac{\frac{٣}{٤}\times٤ - -٢\times١}{١^{٢}}$$

$$= ٢+٣ = ٥$$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

معدلات زمنية

امتحان ١٤ /٢٠١٥ دور أول

١)مستطيل طوله س = ١٩سم وعرضه ص = ٧سم إذا كان طول المستطيل يتناقص بمعدل ١سم /ث وعرضه يتزايد بمعدل ٢سم/ث فاحسب معدل التغير في المساحة للمستطيل في اللحظة التي يكون فيها المستطيل مربع.

الحل

الطول س $\frac{ د س}{ د ن} = -١$ سم/ث العرض ص $\frac{ د ص}{ د ن} = ٢$ سم/ث

الطول س = ١٩ ١٨ ١٧ ١٦ ١٥

العرض ص = ٧ ٩ ١١٠ ١٣ ١٥

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س × ص

$\frac{ د م}{ د ن} = س \times \frac{ د ص}{ د ن} + ص \times \frac{ د س}{ د ن} = ١٥ \times -١ + ١٥ \times ٢$

$= -١٥ + ٣٠ = ١٥$ سم٢/ث

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

امتحان ٢٠١٤/١٣ تجريبي

٢)نقطة تتحرك علي المنحني ص^{٢} = ٦ ١س فإذا كان معدل تغير احداثيها السيني بالنسبة للزمن (ن) عند النقطة $(٢، \frac{١}{٤})$ يساوي $\frac{٥}{٤}$ سم/ث فإن معدل تغير احداثيها الصادي بالنسبة للزمن (ن) بوحدة سم/ث يساوي :ـ

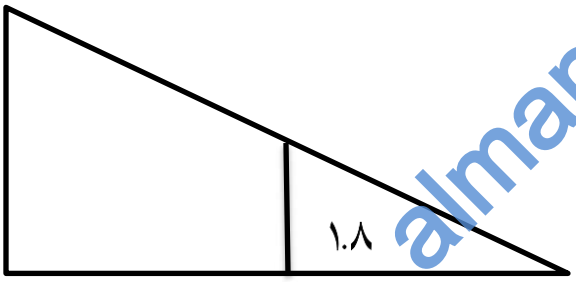
(أ) ١٠ (ب) ٥ (د) $\frac{٤}{٥}$ (هـ) $\frac{٥}{١٦}$

الإجابة ب

٣) يمشي رجل طوله ١,٨ م علي رصيف أفقي بمعدل ٢م/ث مبتعدا عن المصباح الذي يرتفع ٥م عن الرصيف

(أ)أوجد معدل التغير في طول ظل الرجل علي الأرض

(ب)أوجد سرعة رأس الظل علي الأرض



الحل

من التشابة $\frac{١.٨}{٥} = \frac{ص}{س + ص}$

١.٨س + ١.٨ص = ٥ص ← ٥ص − ١.٨ص = ١.٨س

٣.٢ص = ١.٨س ← $\frac{ود ص}{ود ن} ٣.٢ = \frac{ود س}{ود ن} ١.٨$

$\frac{ود ص}{ود ن} = \frac{١.٨}{٣.٢} \times ٢ \leftarrow \frac{٩}{٨} = \frac{١.٨ \times ٢}{٣.٢} = \frac{ود ص}{ود ن}$

(ب)سرعة رأس الظل = $\frac{ود س}{ود ن} + \frac{ود ص}{ود ن}$

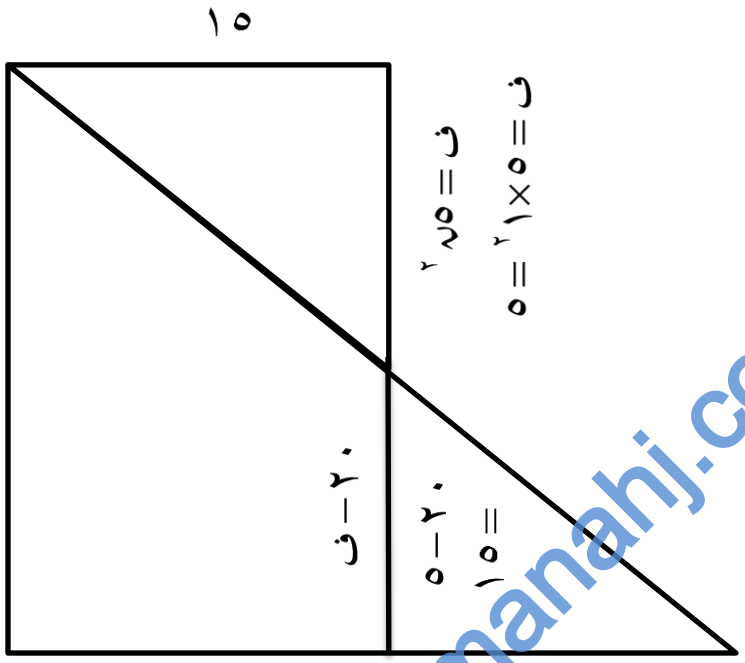
$= ٢ + \frac{٩}{٨}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٤)يقع مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٢٠م سقطت كرة من السكون من نقطة تبعد ١٥م عن المصباح ، أوجد سرعة ظل الكرة علي الأرض بعد ثانية من سقوطها علما بأن المسافة التي يقطعها جسم ساقط هي ف = ٥ن٢

الحل



من التشابة

$$\frac{٢٠}{٢٠ - ٥ ٢} = \frac{١٥ + س}{س}$$

$$٣٠٠ + ٢٠س = ٧٥ ٢ - س ٢ ٥ ٢$$

$$س ٢ ٥ ٢ = \frac{٣٠٠}{٥ ٢} - \frac{٧٥ ٢}{٥ ٢}$$

$$س = ٦٠ ٢ - ١٥$$

$$\frac{ع س}{ع ن} = -١٢٠ ٢ ^{-٣}$$

$$= -١٢٠ = -١٢٠ \times ١ ^{-٣}$$

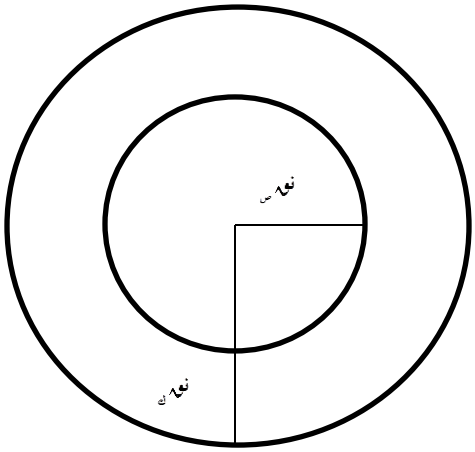
almanahj.com/om

٥)دائرتان متحدتا المركز نصف قطرهما ٦سم ، ٢٤سم ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٢سم/ث وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدل ٤سم/ث

أوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر كل منهما مساويا ١٢سم

(علما بأن مساحة الدائرة = π نق^{٢})

نق$_{ص}$ نصف قطر الصغرى نق$_{ك}$ نصف قطر الكبرى



نق$_{ص}$ = ٦ نق$_{ك}$ = ٢٤

$\frac{د نق_{ص}}{د ن}$ = ٢ $\frac{د نق_{ك}}{د ن}$ = −٤

م = مساحة الدائرة الخارجية − مساحة الدائرة الداخلية

م = π نق$_{ك}^{٢}$ − π نق$_{ص}^{٢}$ $\frac{د م}{د ن}$ = ٢π نق$_{ك}$ $\frac{د نق_{ك}}{د ن}$ − ٢π نق$_{ص}$ $\frac{د نق_{ص}}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن}$ = ٢π × ١٢ × −٤ − ٢π × ١٢ × ٢

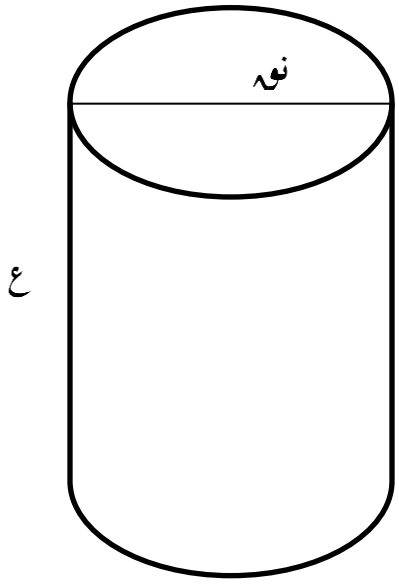
= −٩٦π − ٤٨π = −١٤٤π سم٢/ث

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٦)اسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يساوي $\frac{٧}{٦}$ طول قطرها دائما فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ٠,٠١ سم/ث فجد معدل التغير في حجم هذه الاسطوانه عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم .

الحل



$ع = \frac{٧}{٦} \times ٢نوه = \frac{٧}{٣}نوه \Leftarrow نوه = ع\frac{٣}{٧}$

$\frac{د ع}{د ن} = ٠,٠١$ سم/ث $\quad \frac{د ع}{د ن} = ؟ \quad نوه = ٦$ سم

$ع = \pi نوه^{٢} ع$

$= \pi (ع\frac{٣}{٧})^{٢} ع = \pi ع^{٣} \frac{٩}{٤٩}$ $\quad ع = \frac{٧}{٣} \times ٦ = ١٤$

$\frac{د ع}{د ن} = \pi \times ٣ع^{٢} \times \frac{٩}{٤٩} \frac{د ع}{د ن}$

$= \pi \times \frac{٩}{٤٩} \times ٣ \times ١٤^{٢} \frac{د ع}{د ن}$

$= \pi \frac{٢٧}{٢٥} = \pi ١.٠٨$

almanahj.com/om

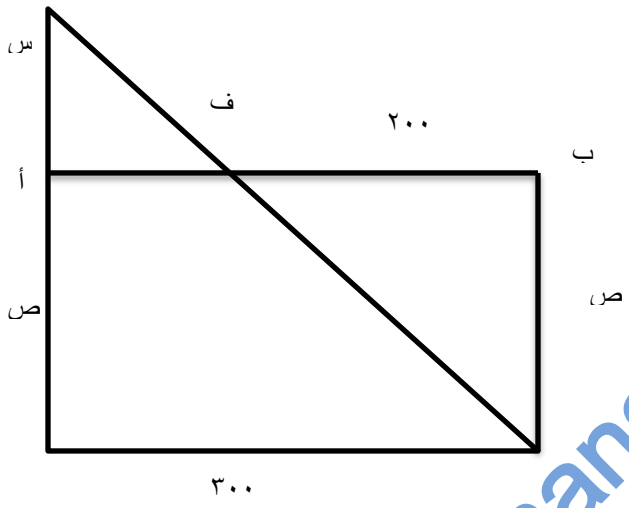
almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٧) انطلق شخص من أ متجها شمالا راكبا دراجة هوائية تسير بسرعة ٦م/ث وبعد ٣٠ ثانية ومن النقطة ب الواقعة علي بعد ٣٠٠ م شرق أ انطلق شخص ثاني متجها جنوبا راكبا دراجة هوائية تسير ٥م/ث

جد معدل تغير المسافة بين الدراجتين بعد ٢٠ ثانية من انطلاق الدراجة التالية .

$ف^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (س + ص)^{٢}$

$٢ف \times \frac{ف}{ع_{ن}} = ٢(س + ص) \times \left(\frac{س}{ع_{ن}} + \frac{ص}{ع_{ن}}\right)$



نوجد س،ص،ف

$س = ٦ \times ٥٠ = ٣٠٠$

$ص = ٥ \times ٢٠ = ١٠٠$

$ف^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (٤٠٠)^{٢}$ بالتعويض

$ف = ٥٠٠$

$(٥ \times ٦) + (١٠٠ + ٣٠٠) \times ٢ = \frac{ف}{ع_{ن}} \times ٥٠٠ \times ٢$

$\frac{ف}{ع_{ن}} = \frac{٢ \times ٤٠٠ \times ١١}{٢ \times ٥٠٠} = \frac{٤٤}{٥}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٨)بركة ماء راكدة ألقي فيها حجر فأحدث موجات دائرية وفي لحظة كانت مساحة إحدى الموجات تزداد بمعدل ٢١ π م٢/د أوجد معدل التغير في محيط تلك الموجه إذا كان نصف القطر عندئذ هو ٧م

الحل

$\frac{د م}{د ن} = ٢١ \pi$ $\quad \frac{د ع}{د ن} = ؟$ $\quad ن = ٧$

محيط الدائرة $= ٢ \pi ن$ $\quad م = \pi ن^{٢}$

$ع = ٢ \pi ن$ $\quad \frac{د م}{د ن} = ٢ \pi ن \frac{د ن}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = ٢ \pi \frac{د ن}{د ن}$ $\quad ١٨ \times \pi ٢ = \pi ١٨^{٣} \frac{د ن}{د ن}$

$= \pi ٢ \times \frac{٣}{٢}$ $\quad \frac{د ن}{د ن} = \frac{١}{٢}$

$= \pi ٣$ م/د

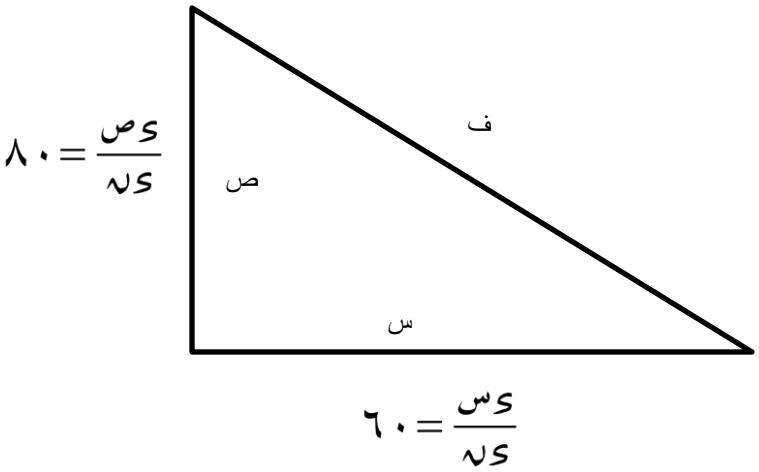
almanahj.com/om

٩)انطلقت سفينتان في نفس الوقت من الميناء أ فسارت الأولي نحو الميناء ب بسرعة ٦٠ كم/س وسارت الثانية نحو الميناء

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

جـ بسرعة ٨٠ كم/س أوجد معدل تغير المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من الإبحار علما بأن الزاوية ب أ جـ قائمة.

الحل



من فيثاغورس $س^{٢} + ص^{٢} = ف^{٢}$

$٢س \frac{س}{ن} + ٢ص \frac{ص}{ن} = ٢ف \frac{ف}{ن}$

بعد ساعتين س = ٢ × ٦٠ = ١٢٠ كم/س

ص = ٢ × ٨٠ = ١٦٠ كم/س

$ف^{٢} = (١٢٠)^{٢} + (١٦٠)^{٢} = ١٤٤٠٠ + ٢٥٦٠٠ = ٤٠٠٠٠$

ف = ٢٠٠ وبالتعويض

$٢ \times ٢٠٠ \times \frac{ف}{ن} = ٢ \times ١٢٠ \times ٦٠ + ٢ \times ١٦٠ \times ٨٠$

$٤٠٠ \frac{ف}{ن} = ١٤٤٠٠ + ٢٥٦٠٠ = ٤٠٠٠٠$

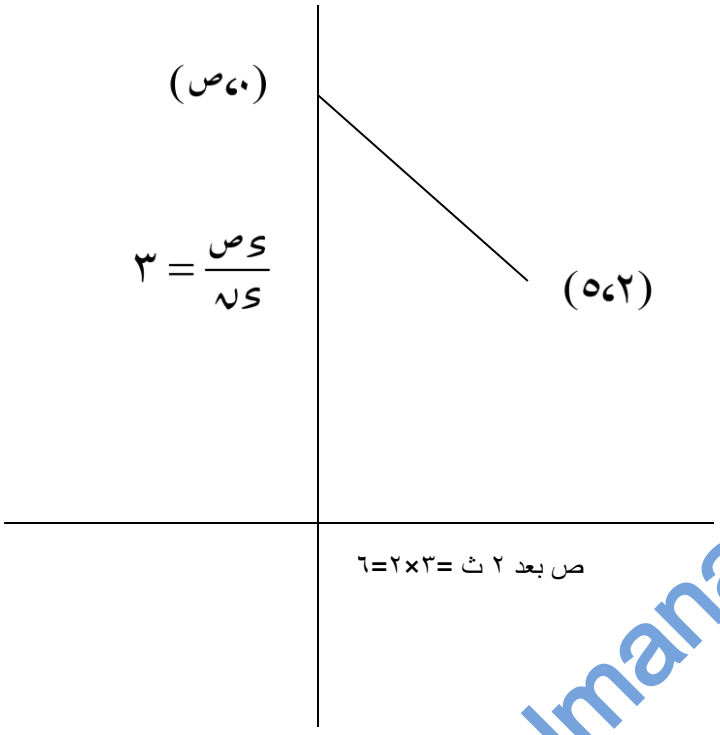
$\frac{ف}{ن} = \frac{٤٠٠٠٠}{٤٠٠} = ١٠٠$ كم/س.

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٠)بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل وفي الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٣سم/ث أوجد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢،٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة .

الحل



$\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٣}{٥}$

$\text{ف} = \sqrt{(٠-٢)^{٢} + (\text{ص}-٥)^{٢}}$

$\text{ف} = \sqrt{٤ + \text{ص}^{٢} - ١٠\text{ص} + ٢٥}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{ص}^{٢} - ١٠\text{ص} + ٢٩}$

$\frac{\text{ف}}{\text{ع}} = \frac{٢\text{ص} - ١٠}{٢\sqrt{\text{ص}^{٢} - ١٠\text{ص} + ٢٩}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$

$= ٣ \times \frac{٢ \times ٦ - ١٠}{٢\sqrt{٣٦ - ٦ \times ٢ + ٢٩}}$

$= ٣ \times \frac{٢}{٢\sqrt{٥}} = \frac{٣}{\sqrt{٥}}$

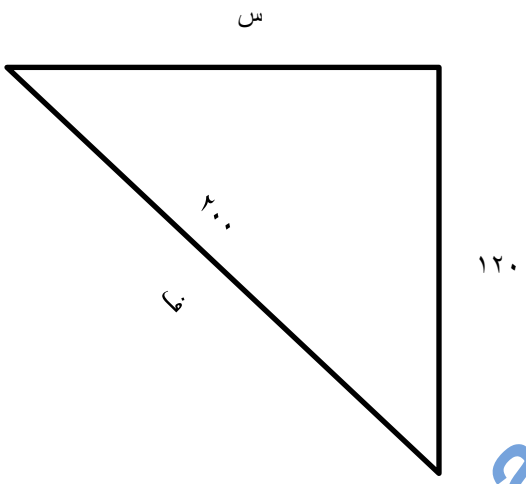
almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١١)يمسك ولد بيده خيط طائرة ورقية مرتفعة ١٢٠م والرياح تأخذ الطائرة من الولد أفقيا بمعدل ٨م/ث ، كم السرعة التي يعطي بها الولد الخيط عندما تبعد الطائرة عنه ٢٠٠م .

الحل

$\frac{\text{ﻫس}}{\text{ﻫن}} = ٨$ ، ف = ٢٠٠ ، $\frac{\text{ﻫف}}{\text{ﻫن}} = ؟$



$ف^{٢} = ١٢٠^{٢} + س^{٢}$

$٢ف\frac{\text{ﻫف}}{\text{ﻫن}} = ٠ + ٢س\frac{\text{ﻫس}}{\text{ﻫن}}$ ←——— (١)

نجد ان $(٢٠٠)^{٢} = (١٢٠)^{٢} + س^{٢}$ ∴ س = ١٦٠

$٢ \times ٢٠٠ \times \frac{\text{ﻫف}}{\text{ﻫن}} = ٢ \times ١٦٠ \times ٨$

$\frac{\text{ﻫف}}{\text{ﻫن}} = \frac{٢ \times ١٦٠ \times ٨}{٢ \times ٢٠٠} = \frac{٣٢}{٥}$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٢)حرك نقطة مادية ب علي منحني الدالة ص = س ٢ في الربع الأول بادئة من نقطة الأصل أ ، فإذا كان الإحداث السيني للنقطة ب يتزايد بمعدل ٢ وحدة /ث وكانت جـ نقطة ثابتة إحداثيها (٨ ، ٠) جد معدل تغير مساحة المثلث أ ب جـ بعد ٢ ثانية من بدء حركة النقطة ب

الحل

$\frac{د م}{د ن}$ Δ ا ب جـ = ؟

ن = ٢

$\frac{د س}{د ن}$ = ٢ وحدة/ث

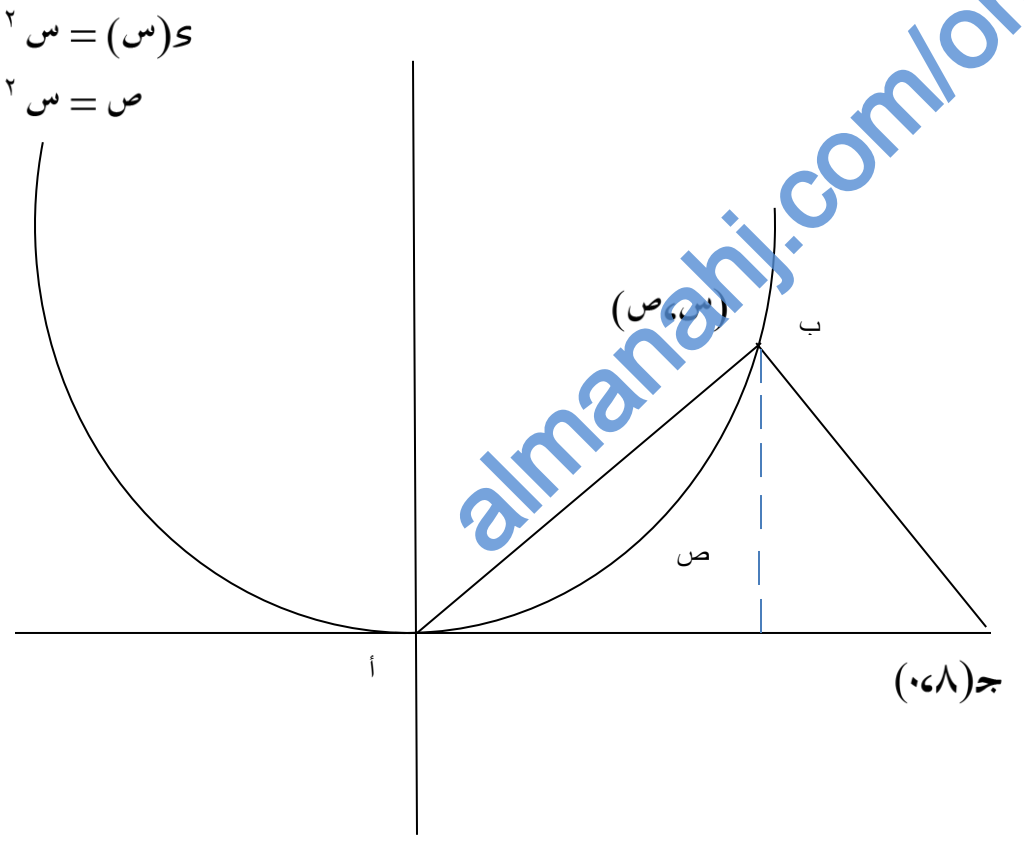
م = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ص

م = ٤ص

م = ٤س ٢

$\frac{د م}{د ن}$ = ٨س $\frac{د س}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن}$ = ٨ × ٤ × ٢ = ٦٤



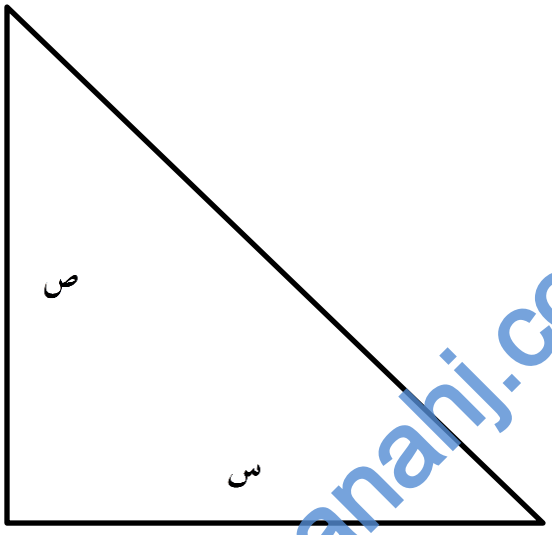
س بعد ٢ ثانية = ٢×٢ = ٤

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٣)في لحظة ما كان طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ١٢سم ، ١٦سم فإذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل ٢سم/ث وطول الضلع الثاني يتناقص بمعدل ١سم/ث بحيث أن المثلث يبقي محافظا علي شكله فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد ٢ ث من تلك اللحظة ؟

الحل



$$\frac{ص}{ن} = -١ \text{سم/ث}$$

$$\frac{س}{ن} = ٢ \text{سم/ث}$$

$$م = \frac{١}{٢} س \times ص$$

$$\frac{م}{ن} = \frac{١}{٢}(س \times \frac{ص}{ن} + ص \times \frac{س}{ن})$$

بعد ٢ ثانية

$$س = ١٢ + (٢ \times ٢) = ١٦$$

$$ص = ١٦ - (١ \times ٢) = ١٤$$

$$\frac{م}{ن} = \frac{١}{٢}(١٦ \times -١ + ١٤ \times ٢)$$

$$= \frac{١}{٢}(-١٦ + ٢٨) = \frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١٤)يضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل ١٢٥ سم٣/ث أوجد معدل الزيادة من مساحة سطح البالون عندما يكون طول قطر البالون ١٠سم.

الحل

$\frac{ع}{ن} = ١٢٥$ $نه = ٥$

$ع = \frac{٤}{٣}\pi نه^{٣}$

$\frac{ع}{ن} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣نه^{٢} \times \frac{نه}{ن}$

$١٢٥ = \frac{نه}{ن} \times ٢٥ \times \pi ٤$

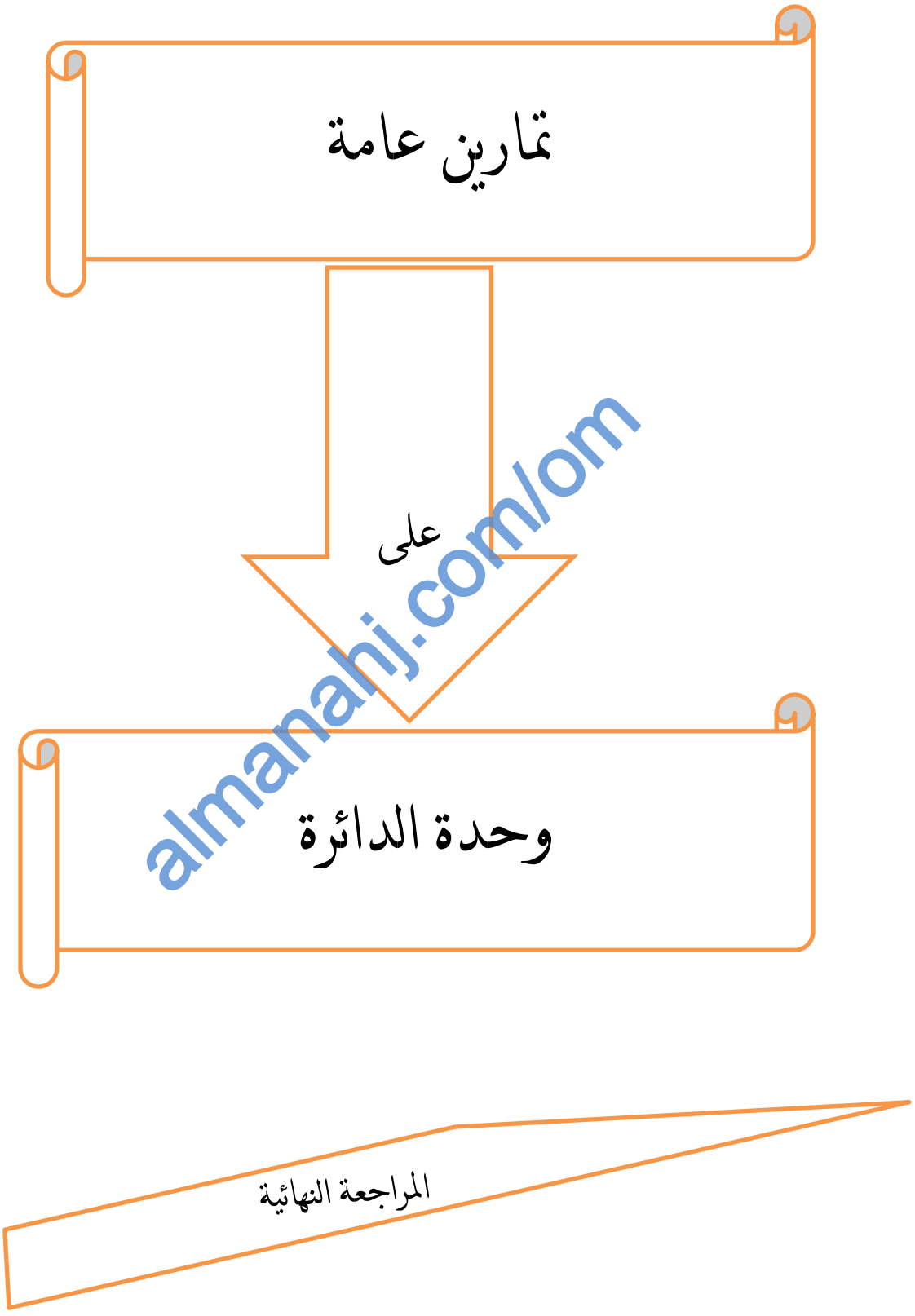
$\frac{نه}{ن} = \frac{١٢٥}{٢٥ \times \pi ٤} = \frac{٥}{\pi ٤}$

$م = ٤\pi نه^{٢}$

$\frac{م}{ن} = ٤\pi \times ٢نه \times \frac{نه}{ن}$

$= ٤\pi \times ٢ \times ٥ \times \frac{٥}{\pi ٤} = ٥٠$

almanahj.com/om



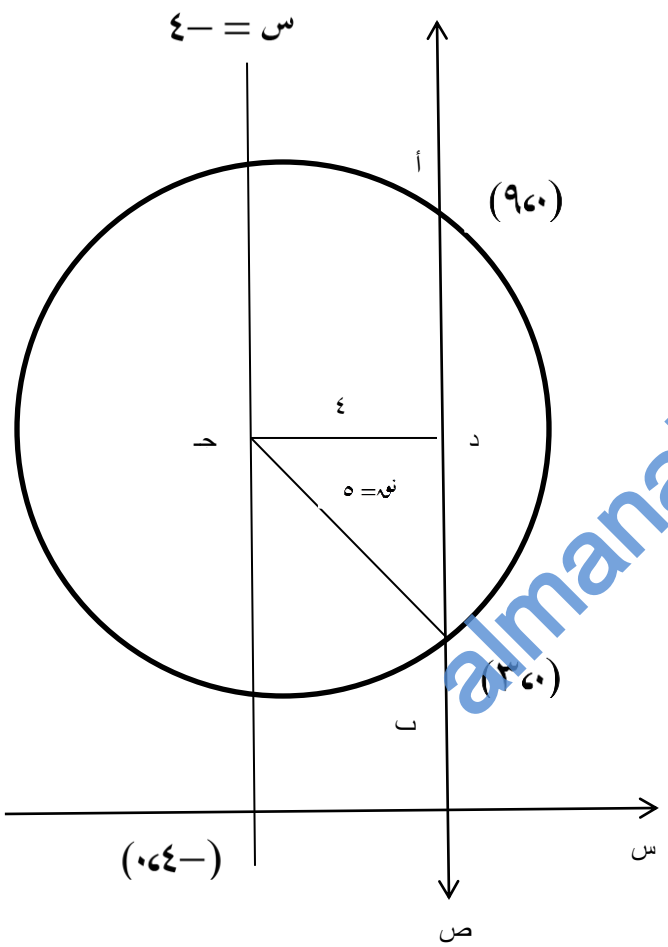
almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

مراجعة على وحدة الدائرة

١)أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها علي المستقيم س = −٤ وتقطع محور الصادات في النقطتين (٠ ، ٣)(٠ ، ٩)

الحل



ا ب = |٣ − ٩| = ٦

وتر في الدائرة جـ د ⊥ علي الوتر أ ب

∴ جـ ينصف ا ب

جـ = ٤

ب = ٣

نوهـ = $\sqrt{١٦+٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

المركز (−٤ ، ٦)

∴ المعادلة (س + ٤)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} = ٢٥

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢)أوجد معادلة الدائرة التي تمر النقطتين (١، ٣) (-٢ ، ١) ومركزها يقع علي المستقيم ص = ٢س + ٣

الحل

معادلة الدائرة في الصورة العامة

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$

∵ الدائرة تمر بالنقطة (١ ، ٣) فهي تحقق معادلتها

$١ + ٩ + ٢ل + ٦ك + جـ = ٠$

$٢ل + ٦ك + جـ = -١٠$ ⟵ (١)

∵الدائرة تمر بالنقطة (-٢ ، ١) فهي تحقق معادلتها

$٤ + ١ - ٤ل + ٢ك + جـ = ٠$

$-٤ل + ٢ك + جـ = -٥$ ⟵ (٢)

∵مركز الدائرة يقع علي المستقيم ص = ٢س +٣ فهو يحقق معادلة المستقيم المركز (ل ، - ك)

$-ك = ٢ \times -ل + ٣$

$٢ل - ك = ٣$ ⟵ (٣)

بحل (١)، (٢)

$٢ل + ٦ك + جـ = -١٠$

$\pm ٤ل \mp ٢ك \mp جـ = \pm ٥$

$٦ل + ٤ك = -٥$ ⟵ (٤)

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

بحل (٣)،(٤)

$\because$ ٢ل − ك = ٣ ⇐ (٣×)

٦ل − ٣ك = ٩

٦ل + ٤ك = −٥

− ٦ل ∓ ٤ك = ±٥

− ٧ك = ١٤

ك = $\frac{١٤}{-٧}$ = −٢

بالتعويض في (٢) ٢ل + ٢ = ٣ ⇐ ٢ل = ١ ⇐ ل = $\frac{١}{٢}$

بالتعويض (١) $\frac{١}{٢}$ × ٢ + ٦ × −٢ + جـ = −١٠

١ − ١٢ + جـ = −١٠

جـ = ١١ − ١٠ ⇐ جـ = ١

المعادلة هي

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ × $\frac{١}{٢}$ س + ٢ × −٢ص + ١ = ٠

س^{٢} + ص^{٢} + س − ٤ص + ١ = ٠

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٣)إذا كانت ٣س^{٢} + ا ص^{٢} − ٥ ١س − ٦ص(٢ا + ب)س ص + ٣ = ٠ تمثل معادلة الدائرة

أوجد أ،ب والمركز ونصف القطر .

الحل

٢ا + ب = ٠ المعادلة تمثل معادلة دائرة ∴ معامل س ص = ٠

وكذل عامل س^{٢} = معامل ص^{٢} ⟸ ا = ٣

٢ × ٣ + ب = ٠ ⟸ ب = −٦

∴ المعادلة ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٥ ١س − ٦ص + ١٢ = ٠

$(١٫\frac{٥}{٢})$٢ نوه = $\sqrt{\frac{٢٥}{٤} + ١ - ١٢} = \frac{٥}{٢} = ٢.٥$

ملحوظة :ـ إذا كان المركز يقع علي السينات فإن الإحداث الصادي للمركز = صفر

إذا كان المركز يقع علي الصادات فإن الاحداثي السيني للمركز = صفر

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٤)أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣، −١) (١، ٥) ويقع مركزها علي السينات .

الحل

المركز علي السينات ⟸ ك = صفر المركز (- ل ، ٠)

وتصبح المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + جـ = ٠$

النقطة (٣، −١) ⟸ $٩ + ١ + ٢ \times -ل + جـ = ٠$

$-٢ل + جـ = -١٠$ ← (١)

النقطة (١،٥) ⟸ $١ + ٢٥ + ٢ل + جـ = ٠$

$٢ل + جـ = -٢٦$ ← (٢)

$-٢ل + جـ = -١٠$

$-٢ل \mp جـ = \pm ٢٦$ $٢ \times -٤ + جـ = -٢٦$

$-٤ل = ١٦$ $جـ = -٢٦ + ٨$

$ل = \frac{١٦}{-٤} = -٤$ $جـ = -١٨$

المعادلة

$س^{٢} + ص^{٢} + ٨س - ٣٤ = ٠$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢٠٠٧ / ٢٠٠٨ دور أول

٥)أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠ ، ٠) ، (٠ ، −٨) ، (−١ ، −١)

الحل

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$

$(٠،٠) \Leftarrow$ $جـ = ٠$

$(٠،-٨) \Leftarrow ٠ = ٦٤ - ١٦ك = ٠ \Leftarrow ك = \frac{٦٤}{١٦} = ٤$

$(-١،-١) \Leftarrow ٢ = ك٠،٠ = جـ \Leftarrow ١ + ١ + -٢ل - ٨ = ٠$

$-٢ل = ٦ \Leftarrow ل = -٣$

∴ المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص = ٠$

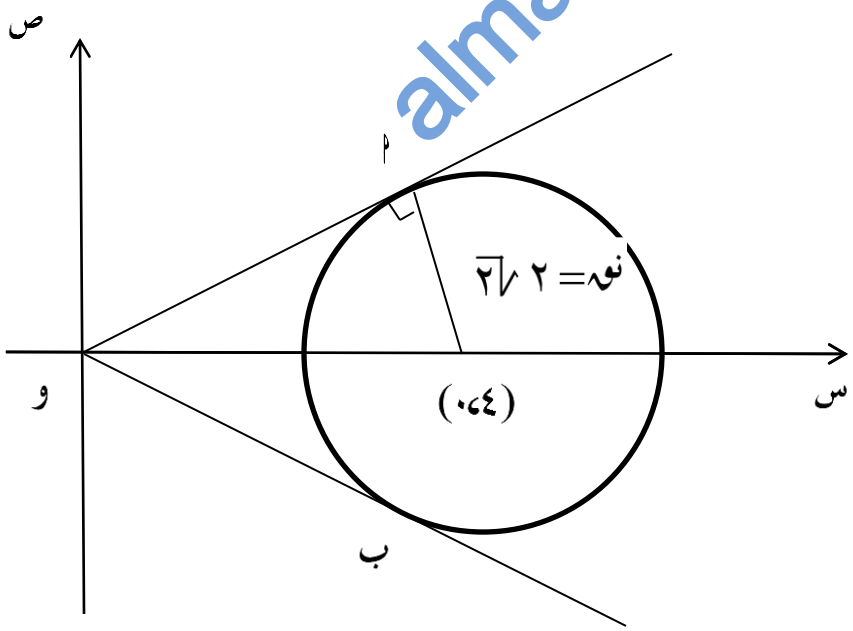
٢٠٠٧ /٢٠٠٨ دور أول

٦)الشكل أدناه يمثل دائرة معادلتها

$(س - ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٨$

أوجد معادلة المماسين

المرسومين لهذه الدائرة من نقطة الأصل



almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

معادلة المستقيم ا وهى ص = م س

أ = م $س_{1}$ = ٤

م س − ص = ٠

ب = −١ $ص_{1}$ = ٠

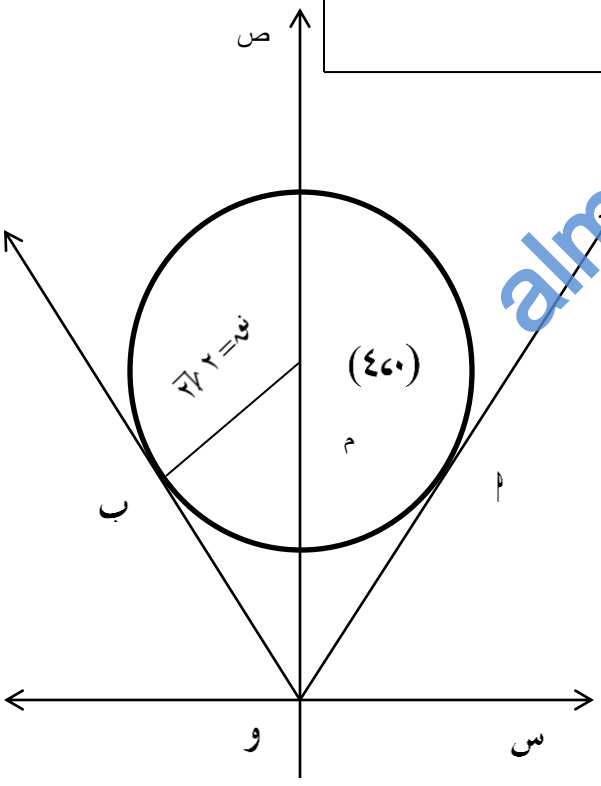
$نق = \frac{|٤م|}{\sqrt{م^{٢}+(-١)^{٢}}} = \frac{|٠+٠\times١-٤م|}{\sqrt{م^{٢}+١}}$

جـ = ٠

$(٢\sqrt{م^{٢}+١}\times٢)^{٢} = (|٤م|)^{٢}$ بالتربيع

$٨(م^{٢}+١) = ١٦م^{٢} \leftarrow ١٦م^{٢}-٨م^{٢}-٨=٠ \leftarrow ٨م^{٢}=٨ \leftarrow م^{٢}=\frac{٨}{٨} \Leftarrow م=\pm١$

معاداة المماس الأول ص = س ، معادلة المماس الثاني ص = − س



٢٠٠٧ / ٢٠٠٨ دور ثاني

٧)الشكل أدناه يمثل دائرة معادلتها $س^{٢}+(ص-٤)^{٢}=٨$

أوجد معادلة المماسين المرسومين لهذه الدائرة من نقطة الأصل .

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

معادلة المستقيم ﻫ و هي ص = م س

أ = م س١ = ٠

ب = −١ ص١ = ٤

م س − ص = ٠

جـ = ٠

$$\text{نق}(\text{ه}) = \frac{|\text{م}\times ٠ + (-١)\times ٤ + ٠|}{\sqrt{\text{م}^{٢} + (-١)^{٢}}} = \frac{|-٤|}{\sqrt{\text{م}^{٢}+١}}$$

$$\sqrt{٢}\,٢ = \frac{٤}{\sqrt{\text{م}^{٢}+١}} \Leftarrow \sqrt{٢}\,٢ \times \sqrt{\text{م}^{٢}+١} = ٤ \quad \text{بالتربيع}$$

$$\frac{\not{٨}}{\not{٨}} \times (\text{م}^{٢}+١) = \frac{١٦}{٨} \leftarrow \text{م}^{٢}+١ = ٢ \leftarrow \text{م}^{٢} = ٢-١ \leftarrow \text{م} = \pm ١$$

معادلة المماس الأول ص = س ، معادلة المماس الثاني ص = − س

٢٠٠٧ /٢٠٠٨ دور ثاني

٨) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠،٠)، (−٢،١)، (١،٢)

٢٠١١ /٢٠١٢ دور أول

٩) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ﻫ(٠،٠) ، ب(٠،٨) ، جـ(٤،٢)

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

٢٠١١ /٢٠١٢ دور ثاني

١٠)أوجد معادلة المماس المشترك للدائرتين

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٤ص + ٤ = ٠$

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٤ص + ٤ = ٠$

علما بأن المماس يمر بنقطة تماسهما

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٤ص + ٤ = ٠$

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٤ص + ٤ = ٠$

$-٨ص = ٠$

$ص = ٠$

بالتعويض في احدي المعادلتين عن ص = ٠

$س^{٢} + ٠ - ٤س - ٠ + ٤ = ٠$

$س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠ \leftarrow (س-٢)^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ٢$

∴ النقطة (٢ ، ٠) هي نقطة التماس المركز (٢، ٢)

ميل نصف قطر التماس $= \frac{٠-٢}{٢-٢} = \frac{٢}{٠}$ كمية غير معرفة

نصف قطر التماس موازي لمحور الصادات وعمودي علي محور السينات

∴ المماس موازاي لمحور السينات .

∴معادلة المماس ص = ٠

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

١١)أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠ ، ٠) (٠ ، ٢) (٦ ، ٠)

---

١٢)أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٢ص − ٤ = ٠ عند النقطة (١ ، ٣)

الحل

مركز الدائرة (٠ ، ١) ، ميل نصف القطر = $\frac{٣-١}{٠-١}$ = ٢ ، ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$

معادلة المماس ص − ص = م(س − س$_{١}$)

ص − ٣ = $\frac{-١}{٢}$(س − ١)

٢ص − ٦ = −س + ١

س + ٢ص − ٧ = ٠ ← معادلة المماس

حل آخر

بالاشتقاق الضمني

٢س + ٢ص صَ − ٢صَ = ٠ (÷ ٢) عند النقطة (١ ، ٣)	∴ معادلة المماس ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)
س + ص صَ − صَ = ٠	ص − ٣ = $\frac{-١}{٢}$(س − ١)
صَ (ص − ١) = − س	٢ص − ٦ = −س + ١
ص′ = $\frac{-س}{ص-١}$	س + ٢ص − ٧ = ٠
صَ$\|_{(٣،١)}$ = $\frac{-١}{١-٣}$ = $\frac{-١}{٢}$	وهي معادلة المماس

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

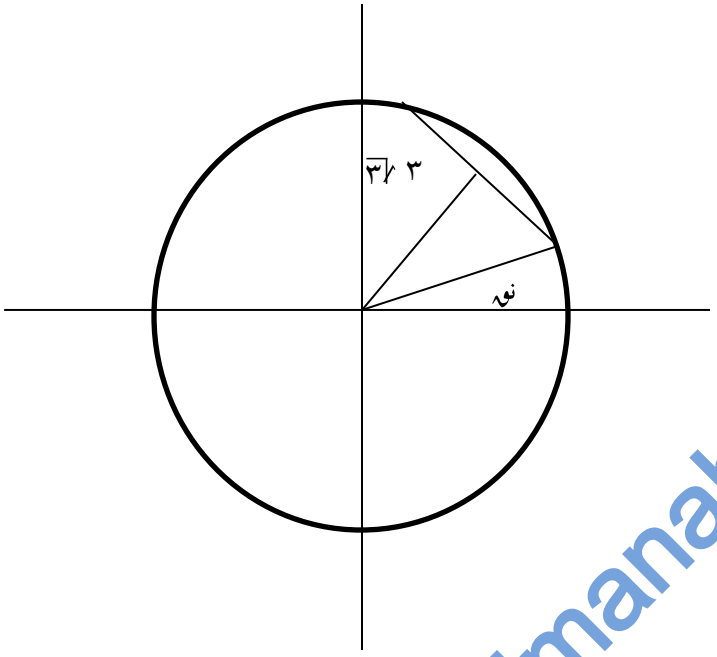
١٣)أوجد معادلة الدائرة إذا كان أ(٣،٢) ب(٤-،٥) نهاية قطريهما ٢٠١٢ /٢٠١٣ دور ثاني

١٤)دائرة مركزها نقطة الأصل أ، $\overline{ب}$ وتر فيها معادلته ٣س + ٤ص − ١٥ = ٠ وطوله ٦ $\sqrt{٣}$

٢٠١٢ / ٢٠١٣ دور ثاني

أوجد معادلة الدائرة .

الحل



مركز الدائرة (٠ ، ٠)

البعد بين المركز والوتر

$$= \frac{|٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ - ١٥|}{\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}}$$

$$= \frac{١٥}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

من فيثاغورس $نق^{٢} = (٣\sqrt{٣})^{٢} + ٣^{٢}$

$$= ٢٧ + ٩ = ٣٦$$

$نق = ٦$

∴ معادلة الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٦$

أ=٣ $س_{١} = ٠$

ب = ٤ $س_{٢} = ٠$

جـ = -١٥

almanahj.com/om

١٥)بين أن المستقيم يقطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ حيث معادلة المستقيم ص + س = ٤

الحل

مركز الدائرة (٠ ، ٠) نق = ٤ أ = ١ س$_{١}$ = ٠

البعد بين المستقيم ومركز الدائرة = $\frac{|٤-+٠\times١+٠\times١|}{\sqrt{٩+٩}}$ ب = ١ ص$_{١}$ = ٠

= $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ < نق = ٤ ∴ المستقيم قاطع للدائرة جـ = -٤

---

١٦)أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٧ ، -٤) ، (٢ ، ٧) ومركزها يقع علي المستقيم ٣ س − ٢ ص − ٨ = ٠

الحل

نفرض أن المركز (د،هـ) بعد المركز عن النقطة (٧،-٤)=بعد المركز عن النقطة (٧،٢)

$$\sqrt{(٧-د)^{٢}+(٤+هـ)^{٢}} = \sqrt{(٧-د)^{٢}+(٢-هـ)^{٢}}$$

$$(٧-د)^{٢}+(٤+هـ)^{٢} = (٧-د)^{٢}+(٤-هـ)^{٢}$$

$$هـ^{٢}+٨هـ+١٦ = هـ^{٢}-٤هـ+٤$$

٨هـ + ٤هـ + ١٦ − ٤ = ٠ ← ١٢هـ + ١٢ = ٠ هـ = −١ ⇐ (١)

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

المركز يقع علي المستقيم ٣س − ٢ص − ٨ = ٠ فهو يحقق معادلته .

$$٣ى - ٢هـ - ٨ = ٠$$

$$٣ى - ٢ \times -١ - ٨ = ٠$$

$$٣ى + ٢ - ٨ = ٠ \leftarrow ٣ى = ٦ \leftarrow ى = ٢$$

$$نهـ = \sqrt{(٧ - ٢)^{٢} + (هـ + ٤)^{٢}}$$

$$= \sqrt{(٧ - ٢)^{٢} + (-١ + ٤)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ٩} = \sqrt{٣٤}$$

∴ معادلة الدائرة هي المركز (+٢، −١) $نهـ = \sqrt{٣٤}$

$$(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٣٤$$

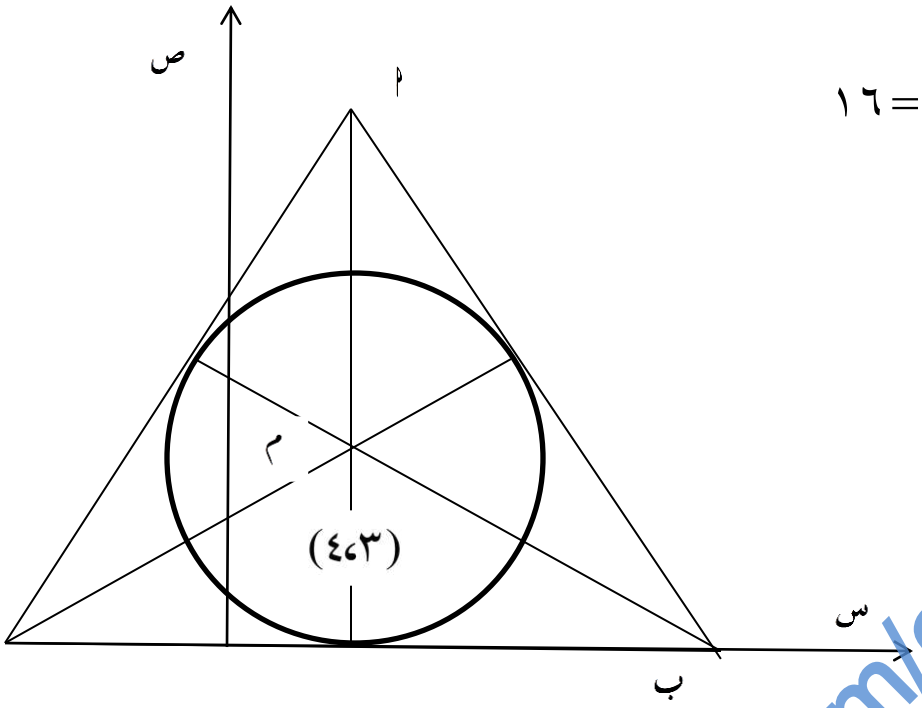
---

١٧)دائرة معادلتها $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$ تمس أضلاع المثلث ا ب جـ متطابق الأضلاع .أوجد معادلة المحل الهندسي لحركة رؤس المثلث بحيث تبقي علي بعد ثابت من مركز الدائرة (علما بأن القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة وتقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

الحل ← الصفحة التالية

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية



الدائرة $(س-٢)^{٢}+(ص-٤)^{٢}=١٦$

المركز (٣، ٤) نق$=٤$

من خواص المثلث متضابق الأضلاع أن نقطة التقاء المتوسطات (و) تقسم القطعة المتوسطه بنسبة ٢: ١ من جهة الرأس

$\therefore$ أ م $=٢\times٤=٨$

نفرض أن (س ، ص) إحداثي أحد رؤس المثلث المتطابق الأضلاع

$$\sqrt{(س-أ)^{٢}+(ص=٤)^{٢}}=٨$$

$$(س-٣)^{٢}+(ص-٤)^{٢}=٦٤$$

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

قانون :ـ (١) طول الجزء المقطوع من محور الصادات

اذا قطعت دائرة محمور الصادات فإن طول الجزء المقطوع من محور الصادات هو

$$= ٢ \sqrt{\text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$$

(٢)طول الجزء المقطوع من محور السينات

اذا قطعت دائرة محور السينات فإن طول الجزء المقطوع من محور السينات هو

$$= ٢ \sqrt{\text{ك} - \text{جـ}}$$

مثال :ـ اثبت أن الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ١٠ص + ١٦ = ٠$ تمس محور السينات في النقطة (٤ ، ٠) ثم أوجد طول الجزء الذي تقطعه هذه الدائرة من محور الصادات

الحل

لايجاد طول الجزء المقطوع من محور السينات

$$= ٢ \sqrt{\text{ك} - \text{جـ}} = ٢ \sqrt{١٦ - ١٦} = \text{صفر}$$

اي ان الدائرة تمس فقط عند محور السينات ولا تقطع .

almanahj.com/om

almanahj.com/om موقع المناهج العُمانية

∵ المركز $(-\frac{١}{٢}\times -٨ء - ١٠\times\frac{١}{٢} - ٤ء - ٥) = (٥ - ٤ء)$

نوه $= \sqrt{١٦ - ٢٥ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∵البعد بين المركز ونقطة التماس (٤ ، ٠)

البعد $= \sqrt{(٤-٤)^{٢} + (٠-٥-)^{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∴ البعد =نوه ∴ الدائرة تمس السينات عند (٤ ، ٠)

طول الجزء المقطوع من المحور الصادي

$= ٢\sqrt{ك^{٢} - جـ} = ٢\sqrt{١٦ - ٢٥} = ٢\sqrt{٩} = ٢ \times ٣ = ٦$

almanahj.com/om