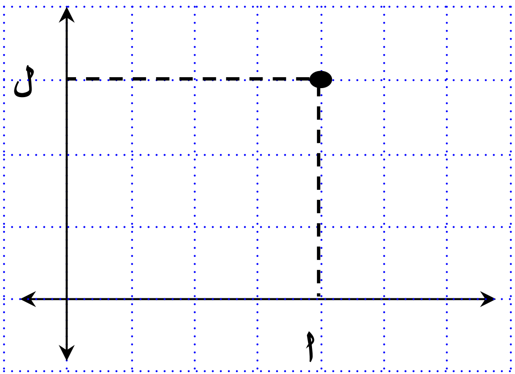
نهاية دالة عند نقطة

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة :-

يقال ان للدالة د(س) نهاية مقدارها "ل" عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب س من أ من اليمين تساوي نهاية الدالة عندما تقترب س من أ من اليسار وتساوي مقداراً ثابتاً مقداره ل ويمكن التعبير عن ذلك بالرموز التالية :-

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل \Leftrightarrow \underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل$$

ويمكن تفسير ذلك من خلال الرسم التالي :-



لاحظ اذا اقتربت س من أ من جهة اليمين فان د(س) تقترب من ل

وكذلك اذا اقتربت س من أ من جهة اليسار فان د(س) تقترب من ل

وبالتالي $\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل$

مثال (١) أوجد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ د(س)$ اذا كانت $د(س) = ٣س + ٦$ ؟

الحل

نرسم جدولاً بسيطاً على النحو التالي :-

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	...	٣,٩٩	٣,٩٥	٣,٩
د(س)							

ثم نأخذ قيما لـ س تقترب من ٤ من اليمين وقيما لـ س تقترب من ٤ من اليسار ثم نحسب د(س) لكل هذه القيم فنلاحظ أن $\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س) = ١٤$ و $\underset{س \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س) = ١٤ \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ د(س) = ١٤$

مثال (٢) باستخدام الجداول بين أن $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٨$ للدالة $د(س) = \begin{cases} س + ٥ & س > ٣ \\ ٣س - ١ & س < ٣ \end{cases}$

الحل

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	......	٢,٩٩	٢,٩٥	٢,٩
د(س)	٨,٣	٨,٠٣	٨,٠٠٣		٧,٩٩	٧,٩٥	٧,٩

وهذا يعني ان $\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٨$

مثال (٣) استخدام الجدول التالي وبين أن نهـا$_{س\leftarrow ١}$ د(س) غير موجودة

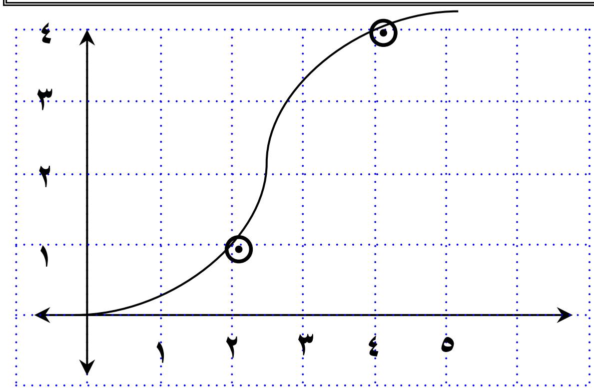
س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	٠٠٠٠٠٠	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩٧
د(س)	٦,٢	٦,٠٢	٦,٠٠٢		٤,٩٩	٤,٩٨	٤,٩٧

الحل

لاحظ ان نهـا$_{س\leftarrow ١^+}$ د(س) = ٦ و نهـا$_{س\leftarrow ١^-}$ د(س) = ٥ $\Leftarrow$ $\therefore$ نهـا$_{س\leftarrow ١}$ د(س) غير موجودة

هكذا نلاحظ انه إذا كانت نهـا$_{س\leftarrow أ^+}$ د(س) $\neq$ نهـا$_{س\leftarrow أ^-}$ د(س) فهذا يعني أن نهـا$_{س\leftarrow أ}$ د(س) غير موجودة

يمكن من خلال الرسم ايجاد نهاية الدالة عند نقطة



مثال (٤) من خلال الرسم المجاور أوجد

١ - نهـا$_{س\leftarrow ٢}$ د(س) نلاحظ من الرسم أن نهـا$_{س\leftarrow ٢^+}$ د(س) = ١ ،

نهـا$_{س\leftarrow ٢^-}$ د(س) = ١ $\Leftarrow$ نهـا$_{س\leftarrow ٢}$ د(س) = ١

٢ - نهـا$_{س\leftarrow ٤}$ د(س) نلاحظ من الرسم أن نهـا$_{س\leftarrow ٤^+}$ د(س) = ٤ ، نهـا$_{س\leftarrow ٤^-}$ د(س) = ٤ $\Leftarrow$ نهـا$_{س\leftarrow ٤}$ د(س) = ٤

٣ - د(٢) = ١ من الرسم لاحظ أن نهـا$_{س\leftarrow ٢}$ د(س) = د(٢) = ١

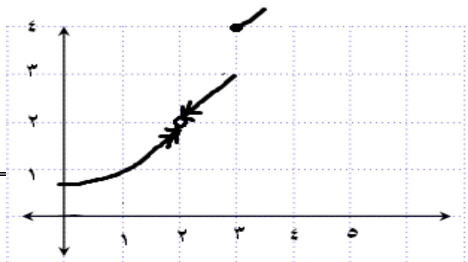
٤ - د(٤) = ٤ من الرسم لاحظ أن نهـا$_{س\leftarrow ٤}$ د(س) = د(٤) = ٤

سؤال: هل يشترط أنه إذا كانت نهـا$_{س\leftarrow أ}$ د(س) = جـ فهل هذا يعني أن د(أ) = جـ ؟

سنجيب علي التساؤل من خلال المثال التالي :-

مثال (٥) من خلال الرسم المجاور أوجد ما يلي:-

١ - نهـا$_{س\leftarrow ٢}$ د(س) ٢ - د(٢) ٣ - نهـا$_{س\leftarrow ٣}$ د(س) ٤ - د(٣)



الحل

١ - من خلال الرسم نجد أن نهـا$_{س\leftarrow ٢^+}$ د(س) = ٢ ، نهـا$_{س\leftarrow ٢^-}$ د(س) = ٢ $\Leftarrow$ نهـا$_{س\leftarrow ٢}$ د(س) = ٢

٢ - من خلال الرسم نجد أن د(٢) = غير معرفة ، وبالتالي د(٢) $\neq$ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س)

هل هذا يعتبر إجابة للسؤال السابق ؟

٣ - $\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٤ ، $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣ $\Leftarrow$ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

٤ - د(٣) = ٤ $\Leftarrow$ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) $\neq$ د(٣)

يمكن ان نقول بدلاً من عمل الجداول والبحث في النهاية من اليمين واليسار أن الأصل في النهاية هو التعويض المباشر فإذا كانت الإجابة رقماً فهذا الرقم هو مقدار النهاية وبالتالي يمكن تعميم ذلك علي كافة كثيرات الحدود سواء كانت ثابتة أو خطية أو تربيعية أو ٠٠٠٠٠ الخ وهذا يعني أن د(س) اذا كانت كثيرة حدود فهذا يعني أن د(أ) = $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ د(س)

مثال (٦) أوجد **١** - $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ س^{٣} + ٢ **٢** - $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ س^{٥} + ٤س **٣** - $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ $\sqrt{س^{٣} + ٣س}$

الحل

١ - $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ س^{٣} + ٢ الحل بالتعويض المباشر ١^{٣} + ٢ = ٣

٢ - $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ س^{٥} + ٤س الحل بالتعويض المباشر (٢)^{٥} + ٤(٢) = ٣٢ + ٨ = ٤٠

٣ - $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ $\sqrt{س^{٣} + ٣س}$ الحل بالتعويض المباشر = $\sqrt{١^{٣} + ٣(١)}$ = $\sqrt{١ + ٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

نهاية الدوال المعرفة على أكثر من قاعدة:- أما بالنسبة للدوال المتشعبة والمعرفة علي أكثر من قاعدة حيث أ هي نقطة التشعب فهذا يعني أنه لإيجاد $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ د(س) نبحث في النهاية من اليمين ومن اليسار

مثال (٧) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢ + س & س \leq -١ \\ س^{٢} & س > -١ \end{cases}$

أوجد ١ - $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ د(س) ٢ - $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}$ د(س) ٣ - $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}$ د(س)

الحل

١- لإيجاد $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ د(س) وحيث أن -١ نقطة تشعيب للدالة د(س) وحيث أن د(س) لها قاعدة ٢ + س لقيم س ≤ -١ والقاعدة س^{٢} لقيم س > -١

٢ + س | س^{٢}
س ≤ -١ | -١ | س > -١

❖ نجد $\underset{س\to -١^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) أي قاعدة الأكبر = $\underset{س\to -١^{+}}{\text{نهــا}}$ $س^{٢}$ = $(-١)^{٢}$ = ١

❖ نجد $\underset{س\to -١^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س) أي قاعدة الأصغر = $\underset{س\to -١^{-}}{\text{نهــا}}$ ٢ + س = ٢-١ = ١

⇐ $\underset{س\to -١^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) = $\underset{س\to -١^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س) وبالتالي $\underset{س\to -١}{\text{نهــا}}$ د(س) = -١

٢ - لإيجاد $\underset{س\to ٤}{\text{نهــا}}$ د(س) نلاحظ أن العدد ٤ يقع علي يمين س = -١ وبالتالي نطبق في قاعدة اليمين(الأكبر)

⇐ $\underset{س\to ٤}{\text{نهــا}}$ د(س) = $\underset{س\to ٤}{\text{نهــا}}$ $س^{٢}$ = $(٤)^{٢}$ = ١٦

٣ - لإيجاد $\underset{س\to -٣}{\text{نهــا}}$ د(س) نلاحظ أن العدد -٣ يقع علي يسار س = -١ وبالتالي نطبق في قاعدة اليسار(الأصغر)

⇐ $\underset{س\to -٣}{\text{نهــا}}$ د(س) = $\underset{س\to -٣}{\text{نهــا}}$ ٢ + س = ٢ - ٣ = -١

مثال (٨) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س & س < ٢ \\ ٥س - ٢ & س > ٢ \end{cases}$ أوجد ١ - $\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) ٢- د(٢)

الحل

١- لإيجاد $\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) وحيث أن ٢ نقطة تشعيب للدالة د(س) وحيث أن د(س) لها قاعدة $س^{٢}$ + ٢س لقيم س < ٢ والقاعدة ٥س - ٢ لقيم س > ٢

$$\xleftarrow{\quad س^{٢}+٢س \quad (س<٢)\quad} \;|\; ٢ \;|\; \xrightarrow{\quad ٥س-٢ \quad (س>٢)\quad}$$

❖ نجد $\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) أي قاعدة الأكبر = $\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ٥س - ٢ = ٥(٢) - ٢ = ١٠-٢ = ٨

❖ نجد $\underset{س\to ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س) أي قاعدة الأصغر = $\underset{س\to ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ $س^{٢}$ + ٢س = $(٢)^{٢}$ + ٢×٢ = ٤+٤ = ٨

⇐ $\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) = $\underset{س\to ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س) وبالتالي $\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٨

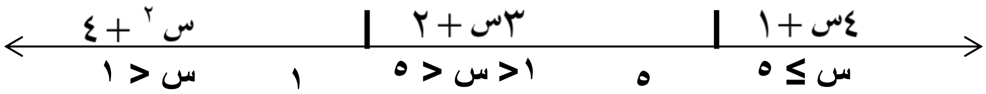
٢ - د(٢) غير معرفة حسب الدالة اعلاه حيث ان الدالة غير موجودة عند س =٢

مثال (٩) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٤ & س < ١ \\ ٣س + ٢ & ١ < س < ٥ \\ ٤س + ١ & س \geq ٥ \end{cases}$

أوجد ما يلي:- ١ - $\underset{س\to ١}{\text{نهــا}}$ د(س) ٢ - $\underset{س\to ٥}{\text{نهــا}}$ د(س) ٣ - $\underset{س\to ١٠}{\text{نهــا}}$ د(س) ٤ - د(١) ٥ - د(٥)

الحل

- لإيجاد $\text{نهـــا}_{\text{س←١}}$ د(س) وكون العدد ١ نقطة تشعيب للدالة د(س) وحيث أن د(س) لها قاعدتين مختلفتين علي يمينه ويساره

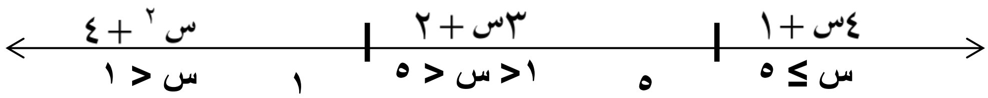


نجد $\text{نهـــا}_{\text{س←١}^{+}}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س←١}^{+}}$ ٣س + ٢ = ٣(١) + ٢ = ٣+٢ = ٥

$\text{نهـــا}_{\text{س←١}^{-}}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س←١}^{-}}$ س^٢ + ٤ = (١)^٢ + ٤ = ١+٤ = ٥

⇐ $\text{نهـــا}_{\text{س←١}^{+}}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س←١}^{-}}$ د(س) وبالتالي $\text{نهـــا}_{\text{س←١}}$ د(س) = ٥

- لإيجاد $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}}$ د(س) وكون العدد ٥ نقطة تشعيب ايضاً للدالة د(س) وحيث أن د(س) لها قاعدتين مختلفتين علي يمينه ويساره

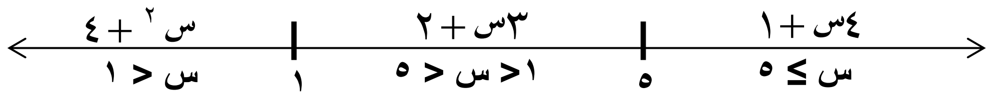


نجد $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}^{+}}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}^{+}}$ ٤س + ١ = ٤(٥) + ١ = ٢٠+١ = ٢١

$\text{نهـــا}_{\text{س←٥}^{-}}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}^{-}}$ ٣س + ٢ = ٣(٥) + ٢ = ١٥+٢ = ١٧

⇐ $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}^{+}}$ د(س) ≠ $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}^{-}}$ د(س) وبالتالي $\text{نهـــا}_{\text{س←٥}}$ د(س) غير موجودة

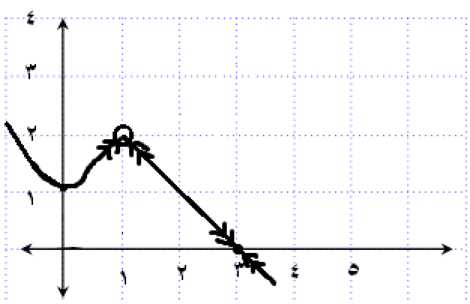
- لإيجاد $\text{نهـــا}_{\text{س←١٠}}$ د(س) وكون العدد ١٠ يقع في القاعدة الأخيرة ٤س + ١ إذا بالتعويض المباشر في القاعدة الأخيرة



نجد $\text{نهـــا}_{\text{س←١٠}}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س←١٠}}$ ٤س + ١ = ٤(١٠) + ١ = ٤٠+١ = ٤١

- د (١) = غير معرفة لأنه لا يوجد تساوى في الدالة السابقة
- د (٥) = ٤س + ١ = ٤(٥) + ١ = ٢٠ + ١ = ٢١ حيث إشارة التساوي في القاعدة الأخيرة

مثال (١٠) من خلال الرسم المجاور أوجد ما يلي:-



١ - $\text{نهـــا}_{\text{س←١}}$ د(س)

٢ - $\text{نهـــا}_{\text{س←٣}}$ د(س)

٣ - د(١)　　٤ - د(٣)

الحل

١- من خلال الرسم نجد أن $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ د(س) = ٢ ، $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ د(س)= ٢ ⟸ $\lim_{س \leftarrow ١}$ د(س) = ٢

٢- من خلال الرسم نجد أن $\lim_{س \leftarrow ٣^+}$ د(س) = ٠ ، $\lim_{س \leftarrow ٣^-}$ د(س)= ٠ ⟸ $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د(س) = ٠

٣ - د(١) من الرسم القيمة غير معرفة ٤ - د(٣) = ٠

نهاية دوال الجذور التربيعية:-

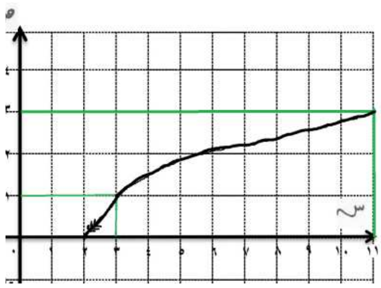
مثال (١١) أوجد $\lim_{س \leftarrow ٢} \sqrt{س - ٢}$ ؟

الحل

يجب الحذر عند التعامل مع هذه الدوال فللوهلة الأولي اذا تم التعويض تكون النتيجة صفر حسب المثال أعلاه وهذه إجابة خاطئة توضيح السبب لاحظ أن الدالة أعلاه مجالها معرف فقط اذا كانت س-٢ ≤ صفر ⟸ $\boxed{س \leq ٢}$ أي أن الدالة معرفة فقط عند قيم ⟸ $\boxed{س \leq ٢}$ وماعدا ذلك فإن الدالة غير معرفة واذا قمنا برسم تقريبي

س	٢	٣	١١	١٨
د(س)	٠	١	٣	٤

هذا الجدول للمساعدة في الرسم فقط



$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ د(س) = صفر بينما

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ د(س) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة

⟸ $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ د(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ د(س) ⟸ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س)غير موجودة

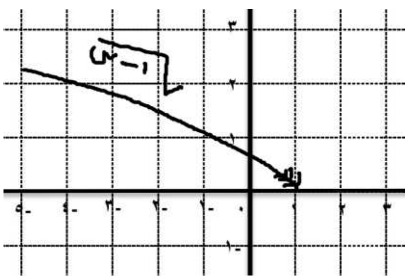
بينما $\lim_{س \leftarrow ٦} \sqrt{س - ٢}$ بالتعويض المباشر = $\sqrt{٦ - ٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ بالتعويض المباشر

مثال (١٢) أوجد $\lim_{س \leftarrow ١} \sqrt{١ - س}$ ؟

الحل مجال الدالة ١ – س ≤ صفر ⟸ – س ≤ – ١ بالضرب × -١ ⟸ س ≥ ١ أي ان الدالة معرفة على جميع قيم س ≥ ١ وبالتالي

$\lim_{س \leftarrow ١^-}$ د(س)= صفر بينما $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ د(س) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة

⟸ $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ د(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ د(س) ⟸ $\lim_{س \leftarrow ١}$ د(س) غير موجودة



مثال (١٣) اذا كانت د(س)= $\sqrt{س - ب}$ فمتي تكون $\lim_{س \leftarrow أ}$ د(س) موجودة ؟

الحل

مجال الدالة س – ب ≥ صفر ⇐ س ≥ ب بالتعويض عن س بـ أ ⇐ $\boxed{أ \geq ب}$

وهذا يعني ان النهاية دائماً تكون موجودة في حالة ⇐ $\boxed{أ \geq ب}$

مثال (١٤) اذا كانت $\lim_{س \leftarrow ١}$ ٢س^{٢} + أس = ٨ فما قيمة أ ؟

الحل

٢(١)^{٢} + أ(١) = ٨ ⇐ ٢ + أ = ٨ ⇐ $\boxed{أ = ٦}$

مثال (١٥) اذا كانت $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ٢س – س^{٣} + جـ = ٣جـ فما قيمة جـ؟

الحل

٢(٢) – ٢^{٣} + جـ = ٣جـ ⇐ ٤ – ٨ + جـ = ٣جـ ⇐ –٤ = ٢جـ ⇐ $\boxed{جـ = -٢}$

مثال (١٦) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢س + أ & س \geq ١ \\ ٢ب + ٣س & س < ١ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \leftarrow ١}$ د(س) موجودة وكانت د(٤) = ١٠ أوجد كلاً من أ ، ب؟

الحل

من المعطيات د(٤) = ١٠ تطبق في قاعدة المساواة د(٤)=٢س + أ = ٢ × ٤ + أ ⇐ ٨ + أ = ١٠ ⇐ $\boxed{أ = ٢}$

من المعطيات كون النهاية موجودة ⇐ $\lim_{س \leftarrow ١^{+}}$ د(س) = $\lim_{س \leftarrow ١^{-}}$ د(س)

$\lim_{س \leftarrow ١^{+}}$ ٢س + أ = $\lim_{س \leftarrow ١^{-}}$ ٢ب + ٣س

٢ × ١ + أ = ٢ب + ٣ × ١ ⇐ ٢ + ٢ = ٢ب + ٣ ⇐ ٤ = ٢ب + ٣ ⇐ ٤ – ٣ = ٢ب

⇐ ١ = ٢ب ⇐ $\boxed{ب = \frac{١}{٢}}$

تطبيقات على الدوال المتشعبة

١- دالة القيمة المطلقة |د(س)| **٢- دالة اكبر عدد صحيح [س]**

لإيجاد نهاية الدالة المطلقة خاصة عند نقاط التشعيب يفضل أن نقوم بالخطوات التالية

١ – مساواة د(س) بالصفر لإيجاد نقاط التشعيب والتي عندها تختلف قاعدة الدالة د(س)

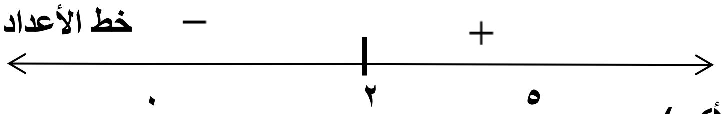
٢ – نقوم بتشعيب الدالة مع الأخذ بعين الاعتبار والانتباه الي القاعدة التي ستكون الي يسار نقطة التشعيب وكذلك القاعدة التي ستكون الي يمين نقطة التشعيب (ويمكن الاستعانة بخط الأعداد لتأكيد الحل)

مثال (١٧) أوجد نهـا (س←٢) |٦س – ١٢| ؟

الحل

١- نوجد أصفار د(س) ⇐ د(س) = ٠ ⇐ ٦س – ١٢ = ٠ ⇐ ٦س = ١٢ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٢}$

اذا لتشعيب الدالة العلوية



تكون القاعدة الموجبة إلي يمين س =٢ (عند إشارة الأكبر)

وتكون القاعدة السالبة إلي يسار س =٢ (عند إشارة الأصغر)

نعوض برقماً أكبر من ٢ ليكون ٥ ←+

نعوض برقماً أصغر من ٢ ليكون ٠ ← -

∴د(س)= { ٦س – ١٢ س ≥ ٢ ⇐ القاعدة الموجبة
{ ١٢ – ٦س س < ٢ ⇐ القاعدة السالبة

∴ لإيجاد نهـا (س←٢) د(س)

نأخذ النهاية من اليمين نهـا (س←٢⁺) د(س)= نهـا (س←٢⁺) ٦س – ١٢ = ٦×٢ – ١٢ = ١٢ – ١٢ = صفر

نأخذ النهاية من اليسار نهـا (س←٢⁻) د(س)= نهـا (س←٢⁻) ١٢ – ٦س = ١٢ – ٦×٢ = ١٢ – ١٢ = صفر

∴ نهـا (س←٢) د(س) = صفر

لاحظ لإيجاد نهـا (س←٥) د(س) = نهـا (س←٥) ٦س – ١٢ = ٦×٥ – ١٢ = ٣٠ – ١٢ = ١٨

وأيضا لإيجاد نهـا (س←-١) د(س) = نهـا (س←-١) ١٢ – ٦س = ١٢ – ٦(–١) = ١٢ + ٦ = ١٨

مثال (١٨) اذا كانت د(س)=|٣س + ٢| أوجد $\underset{س\leftarrow -٢}{نهـا}$ د(س) ؟

الحل

١- نوجد أصفار د(س) ⟸ د(س) = ٠ ⟸ ٣س + ٢ = ٠ ⟸ ٣س = −٢ ⟸ $\boxed{س = \frac{-٢}{٣}}$

اذا لتشعيب الدالة العلوية

خط الأعداد

- ، +

−٢ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، ٠

تكون القاعدة الموجبة إلي يمين س = $\frac{-٢}{٣}$ (عند إشارة الأكبر)

نعوض برقماً أكبر من $\frac{-٢}{٣}$ ليكون ٠ ← +

تكون القاعدة السالبة إلي يسار س = $\frac{-٢}{٣}$ (عند إشارة الأصغر)

نعوض برقماً أصغر من $\frac{-٢}{٣}$ ليكون −٢ ← -

$$د(س) = \begin{cases} ٣س + ٢ & س \geq \frac{-٢}{٣} \Leftarrow \text{القاعدة الموجبة} \\ -٢ - ٣س & س < \frac{-٢}{٣} \Leftarrow \text{القاعدة السالبة} \end{cases}$$

∴ لإيجاد $\underset{س\leftarrow -٢}{نهـا}$ د(س)

نأخذ النهاية من اليسار $\underset{س\leftarrow -٢^-}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س\leftarrow -٢^-}{نهـا}$ −٢ − ٣س = −٢ − ٣ × (−٢) = −٢ + ٦ = ٤ وهو المطلوب

مثال (١٩) أوجد ما يلي $\underset{س\leftarrow ١}{نهـا}$ د(س) ، $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـا}$ د(س) ، $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س)

اذا علمت أن د(س)=|٨ − ٤س| ؟

انتبه لهذا السؤال جيدا

الحل

١- نوجد أصفار د(س) ⟸ د(س) = ٠ ⟸ ٨ − ٤س = ٠ ⟸ ٤س = ٨ ⟸ $\boxed{س = \frac{٨}{٤}}$ ⟸ $\boxed{س = ٢}$

خط الأعداد

+ ، −

٢

∴ نقطة التشعيب هي $\boxed{س = ٢}$

لاحظ أنه علي يمين س = ٢ القاعدة السالبة وعلي يسار س = ٢ القاعدة الموجبة

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ٨ & س \geq ٢ \Leftarrow \text{القاعدة السالبة} \\ ٨ - ٤س & س < ٢ \Leftarrow \text{القاعدة الموجبة} \end{cases}$$

١- لإيجاد $\underset{س\leftarrow ١}{نهـا}$ د(س) نطبق في القاعدة الثانية (الموجبة)= $\underset{س\leftarrow ١}{نهـا}$ ٨ − ٤س = ٨ − ٤ × ١ = ٤

٢- لإيجاد $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـا}$ د(س) بحاجة الي النهاية من اليمين والنهاية من اليسار حيث أن س=٢ نقطة تشعيب

$\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\text{د(س)} = \underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ ٤س - ٨ = ٤\times٢ - ٨ = \text{صفر}$ ، $\underset{س\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\text{د(س)} = \underset{س\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ ٨ - ٤س = ٨ - ٤\times٢ = \text{صفر}$

$\Leftarrow \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\text{د(س)} = \text{صفر}$

٣- لإيجاد $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\text{د(س)}$ نطبق في القاعدة الأولي (السالبة) $= \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٤س - ٨ = ٤\times٣ - ٨ = ١٢ - ٨ = ٤$

مثال (٢٠) أوجد $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}}\dfrac{|س-٢|}{س-٢}$ ؟

أسهل طريقة لحل هذه الأسئلة استبدال الدالة المطلقة بالشعبة التي تنتمي اليها بناءً علي قيمة س وهي هنا س=٤

الحل

$\Leftarrow \underset{س\to ٤}{\text{نهـا}}\dfrac{س-٢}{س-٢} = \underset{س\to ٤}{\text{نهـا}}\ ١ = ١$ عند التشعيب $س - ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

$\text{د(س)} = \begin{cases} س-٢ & س \geq ٢ \\ ٢-س & س < ٢ \end{cases}$ وبالتالي عند $\boxed{س = ٤}$ نستبدل الدالة المطلقة بالشعبة $س - ٢$

طريقة أخري تشعب الدالة علي الدالة الأخرى علي النحو التالي :

$\text{د(س)} = \dfrac{|س-٢|}{س-٢} \Leftarrow \text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{س-٢}{س-٢} & س \geq ٢ \\ \dfrac{٢-س}{س-٢} & س < ٢ \end{cases} \Leftarrow \text{د(س)} = \begin{cases} ١ & س \geq ٢ \\ -١ & س < ٢ \end{cases}$

ومن هنا تظهر الإجابة مباشرة

مثال (٢١) أوجد $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\dfrac{|س|}{س}$ ؟

الحل س = ٠ نقطة تشعيب وبعد التشعيب تصبح الدالة على النحو التالي $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{س}{س} & س \geq ٠ \\ \dfrac{-س}{س} & س < ٠ \end{cases}$

$\text{د(س)} = \begin{cases} ١ & س \geq ٠ \\ -١ & س < ٠ \end{cases} \Leftarrow$ التالي $\underset{س\to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\text{د(س)} = \boxed{١}$ و $\underset{س\to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\text{د(س)} = \boxed{-١}$

$\Leftarrow$ وعليه فإن $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\text{د(س)}$ غير موجودة

مثال (٢٢) أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{|٤ - س|}{٨ - ٢س}$ ؟

الحل

بالتعويض المباشر $\frac{|٤ - ٣|}{٨ - ٦} = \frac{١}{٢}$

الحل التفصيلي $٤ - س = ٠ \Leftarrow س = ٤$

$|٤ - س| = \begin{cases} ٤ - س & س \leq ٤ \\ س - ٤ & س > ٤ \end{cases}$ ∴ عندما س ← ٣ نختار القاعدة الأولي الموجبة ٤ − س

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{|٤ - س|}{٨ - ٢س} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{٤ - س}{٨ - ٢س} = \frac{٤ - ٣}{٨ - ٢(٣)} = \frac{١}{٢}$

مثال (٢٣) أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ٤ - |س - ٣|$ ؟

الحل يمكن التعامل مع $٤ - |س - ٣|$ كدالة واحدة وعليه $د(س) = \begin{cases} ٤ - (س - ٣) & س \geq ٣ \\ ٤ - (٣ - س) & س < ٣ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} ٤ - س + ٣ & س \geq ٣ \\ ٤ - ٣ + س & س < ٣ \end{cases} \Leftarrow د(س) = \begin{cases} -س + ٧ & س \geq ٣ \\ ١ + س & س < ٣ \end{cases}$

∴ وبناءً علي أن س=٣ نقطة تشعيب للدالة فإننا نبحث النهاية من اليمين واليسار

١ - $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} ٤ - |س - ٣| = \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} -س + ٧ = -٣ + ٧ = ٤$

٢ - $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} ٤ - |س - ٣| = \underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} ١ + س = ١ + ٣ = ٤$

∴ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} د(س) = \underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} د(س) \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ٤ - |س - ٣| = ٤$

❖ **دالة اكبر عدد صحيح [س]:-**

[س] نأخذ أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي س

أمثلة :- [٣] = ٣   [-٥] = -٥   [٣,١] = ٣   [-٥,٩٩٩] = -٦

اذا لحل مسألة تتضمن الدالة [أس + ب] نقوم بإعادة تعريف الدالة دون استخدام الرمز [ ] علي شكل دالة تشعبية علي النحو التالي :-

١- نجد طول الفترة الجزئية ل= ١ / |أ|

٢- نجد صفر المقدار أس + ب ونضعه علي خط الأعداد ثم نزيد أو نطرح طول الفترة الجزئية لنحصل علي تدرج د(س)

ملاحظات مهمة جداً

١- اذا كان معامل س موجباً تكون المساواة للطرف الأول ونأخذ ناتج تعويض الطرف الأول وتكون قيم د(س) تصاعدية

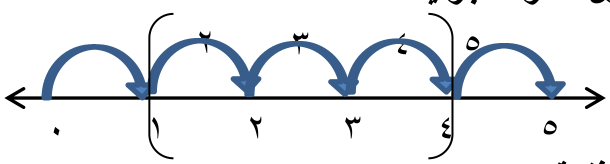
٢- اذا كان معامل س سالباً تكون المساواة للطرف الثاني ونأخذ ناتج تعويض الطرف الثاني وتكون قيم د(س) تنازلية

مثال (٢٤) ١- أكتب الدالة د(س)= [س + ١] ←س ∈ [١ ، ٤] بدون استخدام الرمز [ ]

٢- أوجد نهــا (س←٢) د(س) ، نهــا (س←٣) د(س) ، نهــا (س←٥و٢) د(س)

الحل

١- نوجد طول الفترة الجزئية ل= ١ / |أ| = ١ / |١| = ١ ∴ طول الفترة الجزئية = ١



س + ١ = ٠ ⟸ س = −١

وكون معامل س موجباً نعوض بالطرف الأول أو أي عدد داخل الفترة

∴ د (س) = { ٢ ⟸ ١ ≤ س < ٢ ؛ ٣ ⟸ ٢ ≤ س < ٣ ؛ ٤ ⟸ ٣ ≤ س < ٤ ؛ ٥ ⟸ س = ٤ } المطلوب الأول

٢- نهــا (س←٢) د(س) لاحظ أنه يوجد نقطة تشعيب عند س=٢

⟸ نهــا (س←٢^+) د(س) = نهــا (س←٢) ٣ =٣ ، نهــا (س←٢^-) د(س) = نهــا (س←٢) ٢ = ٢ ⟸ نهــا (س←٢) د(س) غير موجودة

نهــا (س←٣) د(س) لاحظ أنه يوجد نقطة تشعيب عند س=٣ أيضاً

⇐ $\underset{س\to٣^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}$ ٤ = ٤ ، $\underset{س\to٣^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}$ ٣ = ٣ ⇐ $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

، $\underset{س\to٢٫٥}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س\to٢٫٥}{\text{نهـا}}$ ٣ = ٣

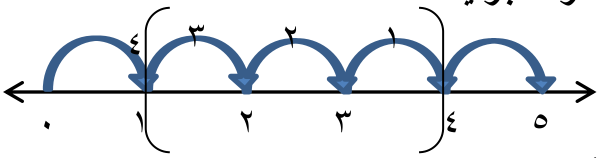
مثال (٢٥) ١- أكتب الدالة د(س)= [٥ − س] ← س ∈ [١ ، ٤] بدون استخدام الرمز [ ]

٢- أوجد $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{س\to٣٫٥}{\text{نهـا}}$ د(س)

الحل

نوجد طول الفترة الجزئية ل= $\frac{١}{|أ|}$ = $\frac{١}{|١|}$ = ١ ∴ طول الفترة الجزئية = ١

٥ − س = ٠ ⇐ س = ٥



لاحظ وكون معامل س سالباً تكون المساواة في الطرف الثاني(الأيسر) والتعويض في الطرف الايسر

∴ د(س) =
- ٤ ⇐ س = ١
- ٣ ⇐ ١ < س ≤ ٢
- ٢ ⇐ ٢ < س ≤ ٣
- ١ ⇐ ٣ < س ≤ ٤

٢- $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة ، $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة ، $\underset{س\to٣٫٥}{\text{نهـا}}$ د(س)= ١

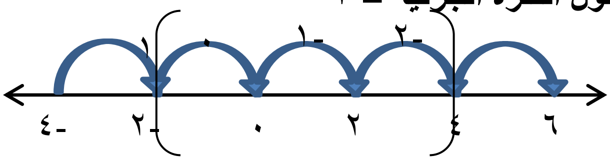
مثال (٢٦) ١- أكتب الدالة د(س)= [$-\frac{١}{٢}$ س] ← س ∈ [-٢ ، ٤] بدون استخدام الرمز [ ]

٢- أوجد $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}$ د(س) ، $\underset{س\to١}{\text{نهـا}}$ د(س)

الحل

نوجد طول الفترة الجزئية ل= $\frac{١}{|أ|}$ = $\frac{١}{|-\frac{١}{٢}|}$ = ٢ ∴ طول الفترة الجزئية = ٢

$-\frac{١}{٢}$ س = ٠ ⇐ س = ٠



لاحظ وكون معامل س سالباً تكون المساواة في الطرف الثاني(الأيسر) والتعويض في الطرف الأيسر

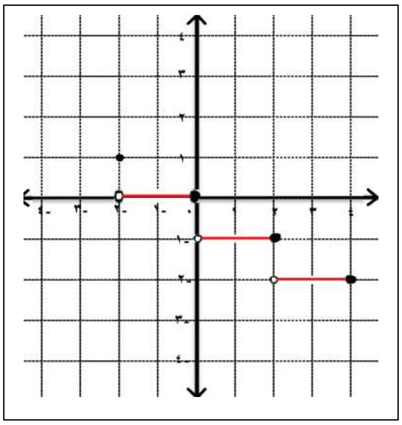
$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ \Leftarrow \text{س} = -٢ \\ ٠ \Leftarrow -٢ < \text{س} \le ٠ \\ -١ \Leftarrow ٠ < \text{س} \le ٢ \\ -٢ \Leftarrow ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

٢- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) ⟸ س = ٢ نقطة تشعيب ⟸ ∴ النهاية غير موجودة

لأن $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = -٢ ، $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = -١ ⟸ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

أما $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) فتقع في الفترة ٠ < س ≤ ٢ وتكون $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = -١

ويمكن رسم(تمثيل) الدالة أعلاه علي النحو المقابل ⟸



القاعدة التي سنتبعها إذا كان السؤال مقالياً نكتب الخطوات كاملة وإذا كان السؤال اختيار من متعدد نحل بالطريقة السريعة وهي التعويض

يمكن إيجاد النهاية بشكل شفوي علي النحو التالي إذا كانت نتيجة التعويض عن س داخل [ ] عدد صحيح فهذا يعني أن النهاية غير موجودة وغير ذلك نعوض ونجد قيمة الصحيح [ ] فتكون هي الناتج (الإجابة)

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ [س + ١] = [٣] وحيث أن الرقم داخل الصحيح عدد صحيح تكون النهاية غير موجودة

$\underset{\text{س}\to ٢,٥}{\text{نهـا}}$ [س + ١] = [٢,٥ + ١] = [٣,٥] = ٣ وهي الإجابة الصحيحة

مثال (٢٧) ١- أكتب الدالة د(س)= [$\frac{١}{٢}$ س + ٣] ، س ∈ [٢ ، ١٧] بدون استخدام الرمز [ ]

٢- أوجد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س)

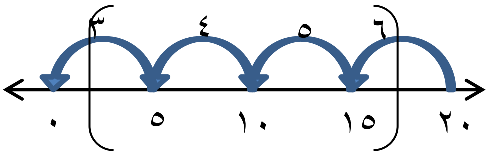
٣- $\underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

٤- أوجد د(١٠)

٥- أرسم رسماً تقريبياً للدالة د(س)

الحل

نوجد طول الفترة الجزئية ل= $\frac{١}{|أ|} = \frac{١}{|\frac{١}{٥}|} = ٥$ ∴ طول الفترة الجزئية = ٥



$\frac{١}{٥}$س + ٣ = ٠ ⇐ $\frac{١}{٥}$س = −٣ ⇐ س = −١٥

لاحظ وكون معامل س موجباً تكون المساواة في الطرف الأول(الأيمن) والتعويض في الطرف الأيمن

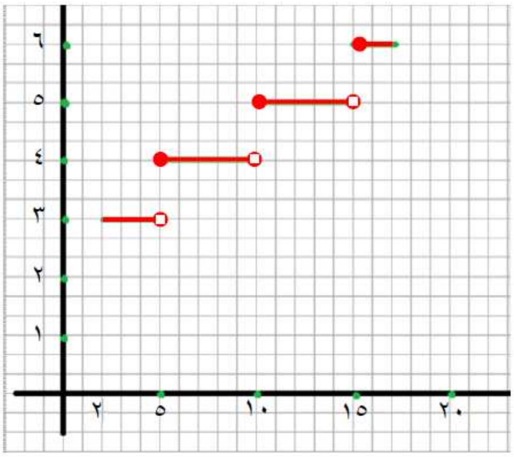
∴ د(س) = $\begin{cases} ٣ \Leftarrow ٢ \leq س < ٥ \\ ٤ \Leftarrow ٥ \leq س < ١٠ \\ ٥ \Leftarrow ١٠ \leq س < ١٥ \\ ٦ \Leftarrow ١٥ \leq س < ١٧ \end{cases}$

٢- $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا}$د(س) ليست نقطة تشعيب إذا النهاية موجودة = ٣ لأن العدد ٣ ينتمي الي الشعبة الأولي

٣- $\underset{س \leftarrow ١٠}{نهـــا}$د(س) غير موجودة لأن العدد ١٠ ينتمي الي طرفي شعبة

٤- د(١٠)= ٥

٥- رسماً تقريباً للدالة د(س)



مثال (٢٨) أوجد $\underset{س \leftarrow ٤٤}{نهـــا}[\frac{١}{٤}س + ٣]$ ، $\underset{س \leftarrow ٤٥}{نهـــا}[\frac{١}{٤}س + ٣]$

الحل

✓ الحل السريع الشفهي بالتعويض $[\frac{١}{٤} \times ٤٤ + ٣] = [١١ + ٣] = [١٤] = ١٤$
كون الناتج عدد صحيح ⇐ النهاية غير موجودة
✓ الحل السريع الشفهي بالتعويض $[\frac{١}{٤} \times ٤٥ + ٣] = [١١\frac{١}{٤} + ٣] = [١٤\frac{١}{٤}] = ١٤$
كون الناتج عدد كسري نجد صحيحه ⇐ وهي الإجابة

مثال (٢٩) ١- أوجد $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـــا}[٩ + \frac{س}{٢}]$ ٢- $\underset{س \leftarrow ٥و٢}{نهـــا}[٢س + ٣]$

٣- أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow ٤و٢}{\text{نهـا}}$ [س + ٦و٠]   ٤- $\underset{\text{س}\leftarrow ٨}{\text{نهـا}}$ [س + ٤]

الحل

١- $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \left[٩ + \frac{\text{س}}{٢} \right]$ نعوض $\left[٩ + \frac{٥}{٢} \right]$ = [٦٥] = ٦ وهي الإجابة

٢- $\underset{\text{س}\leftarrow ٥و٢}{\text{نهـا}}$ [٢س + ٣] نعوض [٥ + ٣] = [٨] كون الناتج عدد صحيح فالنهاية غير موجودة

٣- $\underset{\text{س}\leftarrow ٤و٢}{\text{نهـا}}$ [س + ٦و٠]نعوض [٤و٢ + ٦و٠] = [٣] كون الناتج عدد صحيح فالنهاية غير موجودة

٤- $\underset{\text{س}\leftarrow ٨}{\text{نهـا}}$ [س + ٤] نعوض [٨ + ٤] = [١٢] كون الناتج عدد صحيح فالنهاية غير موجودة

للتأكد $\underset{\text{س}\leftarrow ٨^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س)= [٨ + ٤] = ١٢ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٨^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س)= [٧ + ٤] = ١١

⇐ النهاية غير موجودة عند س = ٨

مثال (٣٠) أوجد ١- $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٧\text{س} - ١}$ ٢- $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ ٣- $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$

الحل ١- $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٧\text{س} - ١}$ حيث أن الدالة جذر تكعيبي فمجال الدالة هو ح أي أن للدالة قيمة عند أي قيمة لـ س وعليه ⇐ نعوض $\sqrt[٣]{٧ \times ٤ - ١}$ = $\sqrt[٣]{٢٨ - ١}$ = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ فتكون هي النهاية

٢- $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ حيث أن الدالة مجالها هو ح أي أن للدالة قيمة عند أي قيمة لـ س وعليه ⇐ نعوض $\sqrt{٢^{٢} + ٥}$ = $\sqrt{٤ + ٥}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ فتكون هي النهاية

٣- $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ انتبه هنا التعويض خطأ لأن المجال ليس ح فالإجابة ليست صفر لإيجاد مجال الدالة

٩ − س^{٢} ≥ صفر   − س^{٢} ≥ − ٩ ⇐ س^{٢} ≤ ٩ ⇐ |س| ≤ ٣

أي أن − ٣ ≤ س ≤ ٣ ⇐ أي أن مجال الدالة هو[-٣ ، ٣]

∴ $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ غير معرفة ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ = ٠

∵ $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}} \neq \underset{\text{س}\leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ ∴ النهاية غير موجودة

أمثلة مختلفة

مثال (٣١) أوجد $\lim\limits_{س \to -٢} ٣س^٢ - ٥|س| + ٣$ ؟

الحل

$|س| = \begin{cases} س & \Leftarrow س \geq ٠ \\ -س & \Leftarrow س < ٠ \end{cases}$ ∴ نعوض في الشعبة السالبة كون -٢ أقل من صفر

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to -٢} ٣س^٢ + ٥س + ٣ = ٣(-٢)^٢ + ٥(-٢) + ٣ = ١٢ - ١٠ + ٣ = ٥$

مثال (٣٢) أوجد $\lim\limits_{س \to -٤} \frac{[\frac{١}{٤}س + ١]}{|س + ٤|}$ ؟

الحل

١ - لاحظ بالنسبة للبسط [٠] غير موجودة ⇐ النهاية غير موجودة

مثال (٣٣) أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{[\frac{١}{٤}س + ١]}{|س + ٤|}$ ؟

الحل

بالنسبة للبسط بالتعويض $[\frac{١}{٤}س + ١] = [\frac{١}{٤} \times ٣ + ١] = [١\frac{٣}{٤}] = ١$

بالنسبة للمقام نختار الشعبة الموجبة س + ٤ كون العدد ٣ أكبر من -٤

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٣} \frac{١}{س + ٤} = \frac{١}{٣ + ٤} = \frac{١}{٧}$

مثال (٣٤) أوجد $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{[\frac{١}{٢}س + ١]}{|س + ٢|}$ ؟

الحل

البسط بالتعويض $[\frac{١}{٢}س + ١] = [\frac{١}{٢} \times -٢ + ١] = [٠]$ ⇐ غير موجودة

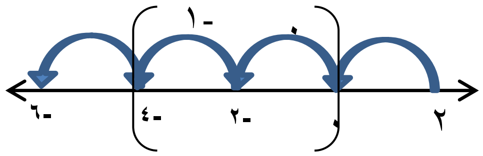
لا داعي لفحص المقام ⇐ النهاية غير موجودة

الحل التفصيلي لو كان السؤال مقالياً

١ - $|\text{س}+٢| = \begin{cases} \text{س}+٢ \Leftarrow \text{س} \geq ٢ \\ -\text{س}-٢ \Leftarrow \text{س} < ٢ \end{cases}$

نوجد طول الفترة الجزئية ل= $\frac{١}{|\text{أ}|} = \frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = ٢$ ∴ طول الفترة الجزئية = ٢

$\frac{١}{٢}\text{س}+١=٠ \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{س} = -١ \Leftarrow \boxed{\text{س} = -٢}$



٢ - $[\frac{١}{٢}\text{س}+١] = \begin{cases} -١ \Leftarrow -٤ \leq \text{س} < -٢ \\ ٠ \Leftarrow -٢ \leq \text{س} < ٠ \end{cases}$

بالنسبة للقيم المطلقة $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}}$ نوجد النهاية يمين ويسار $\underset{\text{س}\to -٢^{+}}{\text{نها}} \text{س}+٢ = \text{صفر}$ ، $\underset{\text{س}\to -٢^{-}}{\text{نها}} -\text{س}-٢ = \text{صفر}$

∴ نعوض صفر في المقام

بالنسبة لصحيح س ⇐ النهاية غير موجودة نوجد النهاية يمين ويسار $\underset{\text{س}\to -٢^{+}}{\text{نها}} [\frac{١}{٢}\text{س}+١] = \text{صفر}$ ، $\underset{\text{س}\to -٢^{-}}{\text{نها}}$

$[\frac{١}{٢}\text{س}+١] = -١$ ⇐ النهاية غير موجودة ⇐ ∴ وعلية يكون $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \frac{[\frac{١}{٢}\text{س}+١]}{|\text{س}+٢|}$ غير موجودة

مثال (٣٥) أوجد $\underset{\text{س}\to -٠.١}{\text{نها}} \frac{[\text{س}]}{|\text{س}|}$ ؟

الحل البسط بالتعويض $[-٠.١] = -١$ المقام $|\text{س}|$ عند س = -٠.١ نطبق في القاعدة السالبة وهي $-\text{س}$

وبالتالي تصبح النهاية علي شكل $\underset{\text{س}\to -٠.١}{\text{نها}} \frac{-١}{-\text{س}} = \underset{\text{س}\to -٠.١}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{-٠.١} = -١٠$

مثال (٣٦) أوجد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}}}$ ؟

الحل $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}}} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ وكون ١ > صفر(صفر الدالة المطلقة) نعوض في الدالة المطلقة

بالقاعدة الموجبة $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{|\text{س}|} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} ١ = ١$

مثال (٣٧) أوجد $\underset{س\to\cdot}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + |س|}{س^{٢} - |س|}$ ؟

الحل

كون نقطة التشعيب س = صفر والنهاية مطلوبة عند س = صفر نلجأ الي تشعيب الدالة

$$\frac{س^{٢}+|س|}{س^{٢}-|س|} = \begin{cases} \frac{س^{٢}+س}{س^{٢}-س} \Leftarrow س \geq \cdot & \text{نأخذ القاعدة الموجبة في الحالتين} \\ \frac{س^{٢}-س}{س^{٢}+س} \Leftarrow س < \cdot & \text{نأخذ القاعدة السالبة في الحالتين} \end{cases}$$

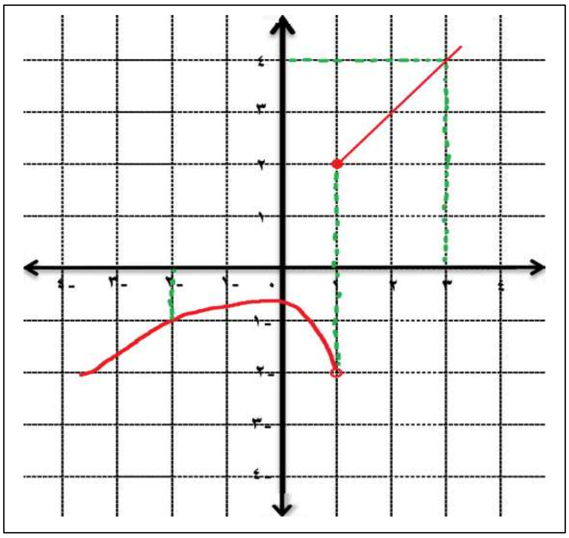
$$= \begin{cases} \frac{س(س+١)}{س(س-١)} \Leftarrow س \geq \cdot \\ \frac{س(س-١)}{س(س+١)} \Leftarrow س < \cdot \end{cases}$$

$$\underset{س\to\cdot^{+}}{\text{نهـا}} \frac{س(س+١)}{س(س-١)} = \underset{س\to\cdot^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\cdot+١}{\cdot-١} = -١ \quad ، \quad \underset{س\to\cdot^{-}}{\text{نهـا}} \frac{س(س-١)}{س(س+١)} = \underset{س\to\cdot^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\cdot-١}{\cdot+١} = -١$$

$$\Leftarrow \underset{س\to\cdot}{\text{نهـا}} د(س) = -١$$

مثال (٣٨) من الرسم المجاور أوجد كل مما يلي ؟

الحل



١ - $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}} د(س) = ٤$

٢ - $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} د(س)$ نبحث النهاية من اليمين ومن اليسار

$\underset{س\to١^{+}}{\text{نهـا}} د(س) = ٢$ ، $\underset{س\to١^{-}}{\text{نهـا}} د(س) = -٢$

$\therefore \Leftarrow \underset{س\to١}{\text{نهـا}} د(س)$ غير موجودة

٣ - $\underset{س\to-٢}{\text{نهـا}} د(س) = -١$

٤ - د(١) = ٢   ٥ - د(٣) = ٤   ٦ - د(-٢) = -١

نظريات النهايات

نظريات في النهايات

١. $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ل = ل \Leftrightarrow ل ، أ \in ح$ (أي أن نهاية الدالة الثابتة تساوي قيمة الدالة)

مثال: $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} ٩٤ = ٩٤$ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{١٢} = \sqrt{١٢}$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ١-\pi = ١-\pi$ ، $\underset{س \leftarrow \sqrt{٣}}{نهـا} ٥٧ = ٥٧$

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} م^٢ + م = م^٢ + م$ بحيث $م \in ح$

٢- إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) =$ موجودة وكان ك $\in$ ح عدداً حقيقياً فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ك د(س) = ك \times \underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س)$

٣- إذا كانت $ب_ن س^ن + ب_{ن-١} س^{ن-١} + \cdots + ب_١ س + ب_٠$ ، $ن \in ص^+$

فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) = د(أ)$ حيث $أ \in ح$.

مثال: $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ٥ س^٢ = ٥ \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} س^٢ = ٥ \times ١ = ٥$

مثال: $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{٨} س^٢ + ٦س^٣ = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{٨} س^٢ + \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ٦س^٣ = \sqrt{٨} \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} س^٢ + ٦ \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} س^٣$

مثال: إذا كان $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ٥أس^٢ + ٢س = ٤$ فما قيمة أ ؟

الحل: $\because \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} ٥أس^٢ + ٢س = ٤ \therefore ٥أ(١)^٢ + ٢ \times ١ = ٤ \Leftarrow ٥أ = ٢ \Leftarrow أ = \frac{٢}{٥} = ٠,٤$

٤- إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) = م$ ، $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = ن$ فإن

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} (د(س) \pm هـ(س)) = \underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) \pm \underset{س \leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = م \pm ن$

٥- إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) =$ م ، $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = ن$ فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} (د(س) \times هـ(س)) =$

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د(س) \times \underset{س \leftarrow أ}{نهـا} هـ(س) = م \times ن$

٦- إذا كانت $\underset{س \to أ}{نهـا} د(س) = م$ ، $\underset{س \to أ}{نهـا} هـ(س) = ن$ فإن $\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \to أ}{نهـا} د(س)}{\underset{س \to أ}{نهـا} هـ(س)} = \frac{م}{ن}$ ، ن ≠ ٠

٧- $\underset{س \to أ}{نهـا} \sqrt{د(س)} = \sqrt{\underset{س \to أ}{نهـا} د(س)} = \sqrt{م}$ ، م ≥ ٠ ، د(س) ≥ ٠

أمثلة سريعة :-

مثال أوجد قيمة $\underset{س \to ٢}{نهـا} ٥س^{٢} \times ٦(س - ٤)$ ؟ نحن نطبق النظرية بشكل بديهي

الحل

$\underset{س \to ٢}{نهـا} ٥س^{٢} \times ٦(س - ٤) = ٥(٢)^{٢} \times ٦(٢ - ٤) = ٥ \times ٤ \times ٦ \times -٢ = ٢٠ \times -١٢ = -٢٤٠$

وحسب النظرية $\underset{س \to ٢}{نهـا} ٥س^{٢} \times ٦(س - ٤) = \underset{س \to ٢}{نهـا} ٥س^{٢} \times \underset{س \to ٢}{نهـا} ٦(س - ٤) = ٢٠ \times -١٢ = -٢٤٠$

مثال أوجد قيمة $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٦س - ٥}{٤ + ٣س}$ ؟ نحن نطبق النظريات بشكل بديهي

الحل $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٦س - ٥}{٤ + ٣س}$ بالتعويض المباشر $= \frac{٦ \times ٣ - ٥}{٤ + ٣ \times ٣} = \frac{١٨ - ٥}{٤ + ٩} = \frac{١٣}{١٣} = ١$

ويمكن تطبيق النظرية فيكون $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٦س - ٥}{٤ + ٣س} = \frac{\underset{س \to ٣}{نهـا} ٦س - ٥}{\underset{س \to ٣}{نهـا} ٤ + ٣س} = \frac{١٣}{١٣} = ١$

مثال أوجد قيمة $\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س - ٤}}{س^{٢} + ١}$ ؟

الحل $\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س - ٤}}{س^{٢} + ١} = \frac{\sqrt{٥ - ٤}}{٥^{٢} + ١} = \frac{١}{٢٦}$ بالتعويض المباشر (ويمكن التجزئة حسب النظرية)

ولكن تذكر $\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{\sqrt{س - ٤}}{س^{٢} + ١}$ هذه النهاية غير موجودة كون النتيجة سالبة تحت الجذر

أمثلة متفرقة علي النظريات

مثال (١) إذا كانت $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} = ٥$ ، $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = -٢$ أوجد ما يلي :-

١- $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٢\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}$

٢- $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٥\text{ق(س)} + ٦\text{هـ(س)}$

الحل

١- $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٢\text{ق(س)} - \text{هـ(س)} = \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٢\text{ق(س)} - \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = ٢\ \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} - \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$

$= ٢ \times ٥ - (-٢) = ١٠ + ٢ = ١٢$

٢- $\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٥\text{ق(س)} + ٦\text{هـ(س)} = \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٥\text{ق(س)} + \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ ٦\text{هـ(س)} = ٥\ \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} + ٦\ \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$

$= ٥ \times ٥ + ٦ \times -٢ = ٢٥ - ١٢ = ١٣$

مثال (٢) إذا كانت $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} = ٨$ ، $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = -٦$ أوجد ما يلي :-

١- $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}$

٢- $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{س ق(س)} + (\text{س}+٥)\text{هـ(س)}$

٣- $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{ق(س)}} + \sqrt{٢\text{هـ(س)} + ١٦}$

الحل

١- $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)} = \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} \times \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = ٨ \times -٦ = -٤٨$

٢- $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{س ق(س)} + (\text{س}+٥)\text{هـ(س)} = \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{س ق(س)} + \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ (\text{س}+٥)\text{هـ(س)}$

$= \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{س} \times \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} + \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ (\text{س}+٥) \times \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = ٧ \times ٨ + ١٢ \times -٦ = ٥٦ - ٧٢ = -١٦$

٣- $\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{ق(س)}} + \sqrt{٢\text{هـ(س)} + ١٦} = \frac{\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{س}^{٢} - ١}{\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}} + \sqrt{٢\ \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} + \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهــا}}\ ١٦}$

$= \frac{(٧)^{٢} - ١}{٨} + \sqrt{٢ \times -٦ + ١٦} = \frac{٤٨}{٨} + \sqrt{-١٢ + ١٦} = ٦ + \sqrt{٤} = ٦ + ٢ = ٨$

مثال (٣) إذا كانت $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\ ٣ = -٩$ ، $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)\ ٢ = ٤$ أوجد ما يلي :-

١- $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\ ٢ + ٣\ \text{هـ}(س) - ٦س^{٢}$

٢- $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{٥\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)}}{س+١}$

٣- $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{\text{ق}(س) + ٦\text{هـ}(س)}}{س+١}$

الحل

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\ ٣ = -٩ \Leftarrow \text{ق}(س)\ \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ ٣ = -٩ \Leftarrow \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \dfrac{-٩}{٣} = -٣$

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)\ ٢ = ٤ \Leftarrow \text{هـ}(س)\ \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ ٢ = ٤ \Leftarrow \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = \dfrac{٤}{٢} = ٢$

١- $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\ ٢ + ٣\text{هـ}(س) - ٦س^{٢} = \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\ ٢ + \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ ٣\ \text{هـ}(س) - \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ ٦س^{٢}$

$= \text{ق}(س)\ \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ ٢ + \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ ٣\ \text{هـ}(س) - ٦\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ س^{٢} = ٢\times -٣ + ٣\times ٢ - ٦(١)^{٢} = -٦ + ٦ - ٦ = -٦$

٢- $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{٥\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)}}{س+١} = \dfrac{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \sqrt{٥\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)}}{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ س+١} = \dfrac{\sqrt{٥\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) + \underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)}}{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ س+١}$

$= \dfrac{\sqrt{٥\times -٣ + ٢}}{١+١} = \dfrac{\sqrt{-١٥ + ٢}}{٢} = \dfrac{\sqrt{-١٣}}{٢}$ وحيث أن $\sqrt{-١٣}$ قيمة غير معرفة $\Leftarrow$ أي أن النهاية غير موجودة

٣- $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{\text{ق}(س) + ٦\text{هـ}(س)}}{س+١} = \dfrac{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{ق}(س) + ٦\text{هـ}(س)}}{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ س+١} = \dfrac{\sqrt{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) + ٦\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)}}{\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ س+١} = \dfrac{\sqrt{-٣ + ٦\times ٢}}{١+١} = \dfrac{\sqrt{٩}}{٢} = \dfrac{٣}{٢}$

مثال (٤) إذا كانت $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٤س\ \text{د}(س) + \dfrac{١٢}{س} = ٥٢$ أوجد $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{د}^{٢}(س)}{\sqrt{\text{د}(س)}}$ ؟

الحل

$\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٤س\ \text{د}(س) + \dfrac{١٢}{س} = \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٤س\ \text{د}(س) + \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١٢}{س} = \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٤س \times \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(س) + \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١٢}{س}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٤س \times \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(س) + \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١٢}{س} = ٣\times ٤ \times \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(س) + \dfrac{١٢}{٣}$

∵ $١٢ \times \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) + ٤ = ٥٢ \Leftarrow ١٢ \times \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = ٥٢ - ٤ \Leftarrow \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$

∴ $\boxed{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = ٤}$

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{د^٢(س)}{\sqrt{د(س)}} = \frac{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د^٢(س)}{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{د(س)}} = \frac{\left(\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س)\right)^٢}{\sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س)}} = \frac{(٤)^٢}{\sqrt{٤}} = \frac{١٦}{٢} = ٨$$

مثال (٥) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} د(س)$ موجودة وكانت $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & س \leq ١ \\ أس & س > ١ \end{cases}$ فما قيمة أ ؟

الحل ∵ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} د(س)$ موجودة فهذا يعني أن $\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} د(س) = \underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا} د(س)$

$\Leftarrow أ \times ١ = (١)^٢ + ٥ \Leftarrow \boxed{أ = ٦}$

إيجاد قيمة نهاية الدوال الكسرية

المبدأ الاساسي هو التعويض وبعد التعويض يمكن أن ينتج أحد الاحتمالات التالية :-

١- $\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{عدد حقيقي}}$ وفي هذه الحالة النهاية موجودة وتساوي قيمة الكسر

مثال $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{٥س^٢ + ١}{٦س^٢ + ٦} = \frac{٥ + ١}{٦ + ٦} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ وهي الإجابة

٢- $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد حقيقي}}$ وفي هذه الحالة قيمة النهاية وتساوي صفر

مثال $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س - ٣}{س^٢ + ٤} = \frac{\text{صفر}}{١٣} = \text{صفر}$ وهي الإجابة

٣- $\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{صفر}}$ وفي هذه الحالة تكون كمية غير محددة وبالتالي النهاية تعتبر في المالانهاية وتكتب ∞

مثال $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٢ - ٦س + ١٠}{(س - ٢)^٢} = \frac{٢^٢ - ٦ \times ٢ + ١٠}{(٢ - ٢)^٢} = \frac{٤ - ١٢ + ١٠}{٠} = \frac{٢}{٠} = \infty$ وهي الإجابة

٤- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهي الحالة الأهم ومعظم الأسئلة تكون علي هذه الحالة وتعتبر قيمة غير معلومة وبالتالي لحل هذه المسألة نلجأ الي التخلص من الوضع الذي يسبب القيمة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عن طريق إحدى الحالات التالية :-

١- تحليل البسط أو المقام   ٢- توحيد المقامات   ٣- فرق بين مربعين

٤- فرق بين مكعبين   ٥- مجموع مكعبين   ٦- الضرب بالمرافق

٧- إخراج عامل مشترك   ٨- قسمة مطولة

وغيرها من العمليات التي عن طريقها نوجد النهاية

∴ لحل المسألة ١- نعوض مباشرة ٢- إذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نقوم بالبحث عن طريقة لإيجاد العامل المشترك بين البسط والمقام الذي سبب هذه الحالة .... وسنأخذ المجموعة التالية من الأمثلة لتوضيح الفكرة

مثال (٦) أوجد $\lim_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س}^٢ + ٥}{\text{س} + ١}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س}^٢ + ٥}{\text{س} + ١} = \frac{(٣)^٢ + ٥}{٣ + ١} = \frac{٩ + ٥}{٣ + ١} = \frac{١٤}{٤} = ٣,٥$$ وهي القيمة المطلوبة

مثال (٧) أوجد $\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٤}{\text{س} - ٢}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{(٢)^٢ + ٤}{٢ - ٢} = \frac{٤ + ٤}{٠} = \frac{٨}{٠} = \infty$$

مثال (٨) أوجد $\lim_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ١}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ١} = \frac{٣ - ٣}{(٣)^٢ + ١} = \frac{٠}{٩ + ١} = \frac{٠}{١٠} = ٠$$

مثال (٩) أوجد $\lim_{\text{س} \leftarrow -١} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ١}$ ؟

الحل

نلجأ للتحليل(تحليل المعادلة التربيعية ، فرق بين مربعين)

$$\underset{\text{س}\to -\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} - \text{٦}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} = \frac{(-\text{١})^{\text{٢}} - \text{٥}(-\text{١}) - \text{٦}}{(-\text{١})^{\text{٢}} - \text{١}} = \frac{\text{١} + \text{٥} - \text{٦}}{\text{١} - \text{١}} = \frac{\text{٦} - \text{٦}}{\text{١} - \text{١}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$$

$$\underset{\text{س}\to -\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} - \text{٦}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} = \underset{\text{س}\to -\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + \text{١})(\text{س} - \text{٦})}{(\text{س} + \text{١})(\text{س} - \text{١})} = \underset{\text{س}\to -\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - \text{٦})}{(\text{س} - \text{١})} = \frac{-\text{١} - \text{٦}}{-\text{١} - \text{١}} = \frac{-\text{٧}}{-\text{٢}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$$

مثال (١٠) أوجد $\underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}$ ؟

الحل

نلجأ للتحليل(فرق بين مكعبين، فرق بين مربعين)

$$\underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}} = \frac{(\text{٣})^{\text{٣}} - \text{٢٧}}{(\text{٣})^{\text{٢}} - \text{٩}} = \frac{\text{٢٧} - \text{٢٧}}{\text{٩} - \text{٩}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$$

$$\underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}} = \underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - \text{٣})(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} + \text{٩})}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٣})} = \underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} + \text{٩})}{(\text{س} + \text{٣})} = \frac{(\text{٣})^{\text{٢}} + \text{٣} \times \text{٣} + \text{٩}}{\text{٣} + \text{٣}}$$

$$= \frac{\text{٩} + \text{٩} + \text{٩}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢٧}}{\text{٦}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}}$$

مثال (١١) أوجد $\underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{١٥}}{\text{س} - \text{٣}}$ ؟

الحل

نلجأ للتحليل المعادلة التربيعية

$$\underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{١٥}}{\text{س} - \text{٣}} = \frac{(\text{٣})^{\text{٢}} - \text{٨} \times \text{٣} + \text{١٥}}{\text{٣} - \text{٣}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$$

$$\underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{١٥}}{\text{س} - \text{٣}} = \underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} - \text{٥})}{(\text{س} - \text{٣})} = \underset{\text{س}\to \text{٣}}{\text{نهـا}} \text{س} - \text{٥} = \text{٣} - \text{٥} = -\text{٢}$$

مثال (١٢) أوجد $\underset{\text{س}\to \text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}}$ ؟

الحل

بالتعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to \text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}} = \frac{\text{٢}(\text{١})^{\text{٢}}}{(\text{١})^{\text{٢}} - \text{١} - \text{٢}} = \frac{\text{٢}}{\text{١} - \text{٣}} = \frac{\text{٢}}{-\text{٢}} = -\text{١}$$

مثال (١٣) أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٣س}{س}$ ؟

الحل

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٣س}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س(س + ٣)}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} (س + ٣) = ٣$$

انتبه دائماً نعوض في البداية
إخراج العامل المشترك

مثال (١٤) أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٣س - ٢)^{٢} - ٤}{٧س}$ ؟

الحل

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٣س - ٢)^{٢} - ٤}{٧س} = \frac{(٣ \times ٠ - ٢)^{٢} - ٤}{٧ \times ٠} = \frac{٠}{٠}$$

انتبه دائماً نعوض في البداية
بفك القوس التربيعي

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٣س - ٢)^{٢} - ٤}{٧س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٩س^{٢} - ١٢س + ٤ - ٤}{٧س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٩س^{٢} - ١٢س}{٧س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س(٩س - ١٢)}{٧س} =$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٩س - ١٢}{٧} = \frac{٩ \times ٠ - ١٢}{٧} = \frac{-١٢}{٧}$$

مثال (١٥) أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢٧س}{س^{٣} - ٩س}$ ؟

الحل

انتبه دائماً نعوض في البداية إخراج العامل المشترك من البسط والمقام ثم نحلل فرق بين مكعبين وفرق بين مربعين

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢٧س}{س^{٣} - ٩س} = \frac{(٠)^{٤} - ٢٧ \times ٠}{(٠)^{٣} - ٩ \times ٠} = \frac{٠}{٠}$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢٧س}{س^{٣} - ٩س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س(س^{٣} - ٢٧)}{س(س^{٢} - ٩)} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{س + ٣} = \frac{(٠)^{٢} + ٣ \times ٠ + ٩}{٠ + ٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

مثال (١٦) أوجد $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ١}$ ؟

الحل

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}^{٢}-١}=\frac{(١)^{٤}-١}{(١)^{٣}-١}=\frac{٠}{٠}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}^{٢}-١}=\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}=\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+\text{س}+١}{\text{س}+١}=\frac{(١)^{٢}+١+١}{١+١}=\frac{٣}{٢}=١,٥$$

مثال (١٧) أوجد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٤}$ ؟

الحل

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٤}=\frac{٢(٢)^{٢}-٣\times ٢-٢}{(٢)^{٢}-٤}=\frac{٠}{٠}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٤}=\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س}+١)(\text{س}-٢)}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}=\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}+٢}=\frac{٢\times ٢+١}{٢+١}=\frac{٥}{٤}=١,٢٥$$

مثال (١٨) أوجد $\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥}$ ؟

الحل

$$\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥}=\frac{\sqrt{١٥-٦}-٣}{١٥-١٥}=\frac{\sqrt{٩}-٣}{١٥-١٥}=\frac{٣-٣}{١٥-١٥}=\frac{٠}{٠}$$

بالضرب في مرافق البسط

$$\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥}=\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}-٦}-٣}{\text{س}-١٥}\times\frac{\sqrt{\text{س}-٦}+٣}{\sqrt{\text{س}-٦}+٣}=\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٦)-٩}{(\text{س}-١٥)(\sqrt{\text{س}-٦}+٣)}$$

$$=\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١٥)}{(\text{س}-١٥)(\sqrt{\text{س}-٦}+٣)}=\underset{\text{س}\to ١٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{\text{س}-٦}+٣}=\frac{١}{\sqrt{١٥-٦}+٣}=\frac{١}{\sqrt{٩}+٣}=\frac{١}{٣+٣}=\frac{١}{٦}$$

مثال (١٩) أوجد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢}-١)^{١٠}}{(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١)^{٥}}$ ؟

الحل

مثال صعب بحاجة الي بعض التفكير انظر الي المقام بحاجة الي تحليل عبارة ثلاثية تربيعية ونرجع الي البسط بحاجة الي تحليل الي فرق بين مربعين

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢}-١)^{١٠}}{(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١)^{٥}}=\frac{(١^{٢}-١)^{١٠}}{(١^{٢}-٢\times ١+١)^{٥}}=\frac{٠}{٠}$$

$$\lim_{\text{س}\to ١}\frac{(\text{س}^{٢}-١)^{١٠}}{(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١)^{٥}}=\lim_{\text{س}\to ١}\frac{(\text{س}^{٢}-١)^{١٠}}{\left((\text{س}-١)(\text{س}-١)\right)^{٥}}=\lim_{\text{س}\to ١}\frac{(\text{س}^{٢}-١)^{١٠}}{\left((\text{س}-١)^{٢}\right)^{٥}}=\lim_{\text{س}\to ١}\frac{(\text{س}^{٢}-١)^{١٠}}{(\text{س}-١)^{١٠}}$$

$$\lim_{\text{س}\to ١}\frac{\left((\text{س}-١)(\text{س}+١)\right)^{١٠}}{(\text{س}-١)^{١٠}}=\lim_{\text{س}\to ١}\frac{(\text{س}-١)^{١٠}(\text{س}+١)^{١٠}}{(\text{س}-١)^{١٠}}=\lim_{\text{س}\to ١}(\text{س}+١)^{١٠}=(١+١)^{١٠}=٢^{١٠}=١٠٢٤$$

الجذور الرباعية والمرافق الرباعي

ملاحظة :- عند وجود جذر رباعي نضرب بالمرافق وعندها ينتج لدينا جذر تربيعي نضربه بالمرافق التربيعي أيضاً أي نضرب بالمرافق الرباعي

مثال (**) أوجد $\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\sqrt[4]{\text{س}+١٢}-٢}{\text{س}-٤}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\sqrt[4]{\text{س}+١٢}-٢}{\text{س}-٤}=\frac{\sqrt[4]{١٦}-٢}{٠}=\frac{٢-٢}{٠}=\frac{٠}{٠}$$

بالضرب بالمرافق الرباعي للبسط

$$\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\sqrt[4]{\text{س}+١٢}-٢}{\text{س}-٤}\times\frac{\sqrt[4]{\text{س}+١٢}+٢}{\sqrt[4]{\text{س}+١٢}+٢}=\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\sqrt{\text{س}+١٢}-٤}{(\text{س}-٤)\left(\sqrt[4]{\text{س}+١٢}+٢\right)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\sqrt{\text{س}+١٢}-٤}{(\text{س}-٤)\left(\sqrt[4]{\text{س}+١٢}+٢\right)}\times\frac{\sqrt{\text{س}+١٢}+٤}{\sqrt{\text{س}+١٢}+٤}=\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\text{س}+١٢-١٦}{(\text{س}-٤)\left(\sqrt[4]{\text{س}+١٢}+٢\right)\left(\sqrt{\text{س}+١٢}+٤\right)}$$

$$=\lim_{\text{س}\to ٤}\frac{\text{س}-٤}{(\text{س}-٤)\left(\sqrt[4]{\text{س}+١٢}+٢\right)\left(\sqrt{\text{س}+١٢}+٤\right)}=\frac{١}{(٤)(٤+٤)}=\frac{١}{٣٢}$$

لاحظ $\sqrt[4]{\text{س}}\times\sqrt[4]{\text{س}}=\sqrt{\text{س}}$

طريقة أخري يمكن الحل بالتعويض

$\text{ص}=\sqrt[4]{\text{س}+١٢}\quad\Leftarrow\quad\text{س}\to ٤$

$\text{ص}^{٤}=\text{س}+١٢\quad\Leftarrow\quad\text{ص}\to\sqrt[4]{\text{س}+١٢}=٢\qquad\Leftrightarrow\text{س}=\text{ص}^{٤}-١٢$

$$\lim_{\text{ص}\to ٢}\frac{\text{ص}-٢}{\text{ص}^{٤}-١٢-٤}=\lim_{\text{ص}\to ٢}\frac{\text{ص}-٢}{\text{ص}^{٤}-١٦}=\lim_{\text{ص}\to ٢}\frac{(\text{ص}-٢)}{(\text{ص}^{٢}-٤)(\text{ص}^{٢}+٤)}$$

$$=\lim_{\text{ص}\to ٢}\frac{(\text{ص}-٢)}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٢)(\text{ص}^{٢}+٤)}=\frac{١}{(٢+٢)(٢^{٢}+٤)}=\frac{١}{(٤)(٨)}=\frac{١}{٣٢}$$

مثال (**) أوجد $\lim_{\text{س}\to ٣}\frac{\sqrt[4]{\text{س}+٧٨}-٣}{٢\text{س}-٦}$ ، $\frac{١}{٢١٦}$ ؟

القاعدة الأسية

ملاحظة :- وهي طريقة معتمدة في المسائل المقالية $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$

مثال (**) أوجد $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ؟

الحل

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ١^{٢}}{س^{١} - ١^{١}} = \frac{٢}{١}(١)^{١} = ٢$$

مثال (**) أوجد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٥} - ٣٢}$ ؟

الحل

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٥} - ٣٢} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س^{٥} - ٢^{٥}} = \frac{٣}{٥}(٢)^{-٢} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٢٠}$$

مثال (**) أوجد $\underset{س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - ٢٧}{س^{٣} - ٣\sqrt{٣}}$ ؟

الحل

$$\underset{س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - \sqrt{٣}^{\,٦}}{س^{٣} - \sqrt{٣}^{\,٣}} = \frac{٦}{٣}\left(\sqrt{٣}\right)^{٣} = ٢ \times ٣\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٣}$$

مثال (**) أوجد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{\frac{٩}{٢}} - ١٦\sqrt{٢}}{\sqrt{٨} - س\sqrt{س}}$ ؟

مثال (٢٠) أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س}$ ؟

الحل

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س} = \frac{\sqrt{٠ + ٤} - ٢}{٠} = \frac{\sqrt{٤} - ٢}{٠} = \frac{٢ - ٢}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

بالضرب بالمرافق للبسط

$$\lim_{س\to ٠} \frac{\sqrt{س+٤}-٢}{س} \times \frac{\sqrt{س+٤}+٢}{\sqrt{س+٤}+٢} = \lim_{س\to ٠} \frac{(س+٤)-٤}{س(\sqrt{س+٤}+٢)} = \lim_{س\to ٠} \frac{س}{س(\sqrt{س+٤}+٢)}$$

$$= \lim_{س\to ٠} \frac{١}{\sqrt{س+٤}+٢} = \frac{١}{\sqrt{٠+٤}+٢} = \frac{١}{\sqrt{٤}+٢} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$$

مثال (٢١) أوجد $\lim_{س\to ٥} \frac{\sqrt{س-٤}-\sqrt{٦-س}}{س-٥}$ ؟

الحل

$$\lim_{س\to ٥} \frac{\sqrt{س-٤}-\sqrt{٦-س}}{س-٥} = \frac{\sqrt{٥-٤}-\sqrt{٦-٥}}{٥-٥} = \frac{صفر}{صفر}$$

بالضرب بالمرافق للبسط

$$\lim_{س\to ٥} \frac{\sqrt{س-٤}-\sqrt{٦-س}}{س-٥} \times \frac{\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س}}{\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س}} = \lim_{س\to ٥} \frac{(س-٤)-(٦-س)}{(س-٥)(\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س})}$$

$$= \lim_{س\to ٥} \frac{س-٤-٦+س}{(س-٥)(\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س})} = \lim_{س\to ٥} \frac{٢س-١٠}{(س-٥)(\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س})}$$

$$= \lim_{س\to ٥} \frac{٢(س-٥)}{(س-٥)(\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س})} = \lim_{س\to ٥} \frac{٢}{\sqrt{س-٤}+\sqrt{٦-س}} = \frac{٢}{\sqrt{٥-٤}+\sqrt{٦-٥}} = \frac{٢}{\sqrt{١}+\sqrt{١}} =$$

$$\frac{٢}{١+١} = \frac{٢}{٢} = ١$$

مثال (٢٢) أوجد $\lim_{س\to ٠} \frac{\frac{١}{٣+س}-\frac{١}{٣}}{س}$ ؟

الحل

$$\lim_{س\to ٠} \frac{\frac{١}{٣+س}-\frac{١}{٣}}{س} = \frac{\frac{١}{٣+٠}-\frac{١}{٣}}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نوحد المقامات في البسط لإزالة العامل المشترك المسبب للنتيجة

$$\lim_{س\to ٠} \frac{\frac{١}{٣+س}-\frac{١}{٣}}{س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\frac{٣-(٣+س)}{٣(٣+س)}}{س} = \lim_{س\to ٠} \frac{٣-(٣+س)}{س\times ٣(٣+س)} = \lim_{س\to ٠} \frac{٣-٣-س}{س\times(٩+٣س)}$$

$$= \lim_{س\to ٠} \frac{-س}{س\times(٩+٣س)} = \lim_{س\to ٠} \frac{-١}{٩+٣س} = \frac{-١}{٩+٣\times ٠} = \frac{-١}{٩}$$

مثال (٢٣) أوجد $\lim_{س\to -٢} \frac{\frac{س}{س+١}-٢}{س+٢}$ ؟

الحل

$$\lim_{س\to -٢} \frac{\frac{س}{س+١}-٢}{س+٢} = \frac{\frac{-٢}{-٢+١}-٢}{-٢+٢} = \frac{٢-٢}{-٢+٢} = \frac{٠}{٠}$$

نوحد المقامات في للبسط لإزالة العامل المشترك المسبب للنتيجة

$$\underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+١}-٢}{\text{س}+٢} = \underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س}-٢(\text{س}+١)}{\text{س}+١}}{\text{س}+٢} = \underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س}-٢\text{س}-٢}{\text{س}+١}}{\text{س}+٢} = \underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-٢\text{س}-٢}{(\text{س}+١)(\text{س}+٢)}$$

$$= \underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{-\text{س}-٢}{(\text{س}+١)(\text{س}+٢)} = \underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{-(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)(\text{س}+٢)} = \underset{\text{س}\to-٢}{\text{نهـا}} \frac{-١}{\text{س}+١} = \frac{-١}{-٢+١} = \frac{-١}{-١} = ١$$

مثال (٢٤) أوجد $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣}-٣\text{س}-١٠}{\text{س}^{٣}-٨}$ ؟

الحل

$$\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣}-٣\text{س}-١٠}{\text{س}^{٣}-٨} = \frac{٠}{٠}$$

لاحظ أنه يمكن استنتاج أن س -٢ هي من العوامل المشتركة للبسط والمقام

$$\begin{array}{r|l} ٢\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٥ & \\ \hline ٢\text{س}^{٣}-٣\text{س}-١٠ & \text{س}-٢ \\ ٢\text{س}^{٣}-٤\text{س}^{٢} & \\ \hline ٤\text{س}^{٢}-٣\text{س}-١٠ & \\ ٤\text{س}^{٢}-٨\text{س} & \\ \hline ٥\text{س}-١٠ & \\ ٥\text{س}-١٠ & \\ \hline ٠\quad ٠\quad ٠ & \end{array}$$

$$\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣}-٣\text{س}-١٠}{\text{س}^{٣}-٨} = \underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣}-٣\text{س}-١٠}{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)}$$

$$= \underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٢)(٢\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٥)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)} = \underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٥}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}$$

$$= \frac{٢(٢)^{٢}+٤\times٢+٥}{(٢)^{٢}+٢\times٢+٤} = \frac{٨+٨+٥}{٤+٤+٤} = \frac{٢١}{١٢} = \frac{٧}{٤}$$

مثال (٢٥) أوجد $\underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}|\text{س}-١|-١٨}{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٩}$ ؟

الحل

$$\underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}|\text{س}-١|-١٨}{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٩} = \frac{٠}{٠}$$

لاحظ أنه عندما س ← ٢ فإن |س − ١| نستبدلها بـ س − ١ وهي القاعدة الموجبة

$$\underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}|\text{س}-١|-١٨}{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٩} = \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}(\text{س}-١)-١٨}{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٩} = \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-١٨}{٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}-٩}$$

$$= \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٦)}{(\text{س}-٣)(٢\text{س}+٣)} = \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٦}{٢\text{س}+٣} = \frac{(٣)^{٢}+٢\times٣+٦}{٢\times٣+٣}$$

$$= \frac{٩+٦+٦}{٦+٣} = \frac{٢١}{٩} = \frac{٧}{٣}$$

لاحظ أنه يمكن استنتاج أن س-٣ هي من العوامل المشتركة للبسط والمقام لذلك نقسم البسط علي س-٣ ونحلل المقام

هناك العديد من الأسئلة تأتي ضمن السياق التالي

مثال (٢٦) إذا كان $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٣ + \text{أ}\text{س}^٢ - ٢٠}{\text{س} - ٢}$ موجودة فأوجد قيمة أ ؟

الحل

مفتاح الحل يكمن في أن الدالة الكسرية إذا كانت نهايتها موجودة وكان ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ فلابد من وجود عامل مشترك بين البسط والمقام وهو في هذه الحالة (س − ٢) وهذا يعنى أن العدد (٢) هو صفر للبسط وصفر للمقام

∴ نساوي البسط بـ صفر وذلك بالتعويض عن (س = ٢) ثم نجد قيمة أ

$$٢\text{س}^٣ + \text{أ}\text{س}^٢ - ٢٠ = ٠ \Leftarrow ٢(٢)^٣ + \text{أ} \times (٢)^٢ - ٢٠ = ٠ \Leftarrow ٢ \times ٨ + \text{أ} \times ٤ - ٢٠ = ٠$$

$$\Leftarrow ١٦ + ٤\text{أ} - ٢٠ = ٠ \Leftarrow ٤\text{أ} = ٢٠ - ١٦ \Leftarrow ٤\text{أ} = ٤ \Leftarrow \text{أ} = \frac{٤}{٤} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ١}$$

مثال (٢٧) إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} + \text{ك}}{٢\text{س} - ٦}$ موجودة فما قيمة ك؟

الحل ∵ التعويض عن س ← ٣ في المقام = صفر فهذا يعني أن الدالة $\Leftarrow \text{س}^٢ - \text{س} + \text{ك} = ٠$ عند س = ٣

$$\Leftarrow (٣)^٢ - ٣ + \text{ك} = ٠ \quad \Leftarrow ٩ - ٣ + \text{ك} = ٠$$

$$\Leftarrow ٦ + \text{ك} = ٠ \quad \Leftarrow \text{ك} = -٦$$

مثال (٢٨) إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} + ٣} & \text{س} \neq -٣ \\ \text{ك} & \text{س} = -٣ \end{cases}$ كان د(-٣) = $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}$ د(س) فأوجد قيمة ك؟

الحل د(-٣) = ك لإيجاد

$$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} + ٣} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}{\text{س} + ٣} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \text{س} - ٣ = -٣ - ٣ = -٦$$

∵ د(-٣) = $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}$ د(س) ⇐ ∴ $\boxed{\text{ك} = -٦}$

مثال (٢٩) أوجد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٢} + ٤}{\text{س} - ٤}$؟

الحل

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + ٢} + ٤}{\text{س} - ٤} = \frac{\sqrt{٢ + ٢} + ٤}{٢ - ٤} = \frac{\sqrt{٤} + ٤}{-٢} = \frac{٢ + ٤}{-٢} = \frac{٦}{-٢} = -٣$$

مثال (٣٠) إذا كانت د(س)= $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أس} + ٦}{\text{س} - ٢} & \text{س} < ٢ \\ \text{ب س}^{٢} - ١١ & \text{س} > ٢ \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}$ د(س) موجودة فأوجد قيمة أ ، ب ؟

الحل

اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}$ د(س) موجودة وكون س = ٢ هي نقطة تشعيب فهذا يعني أن $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}}$ د(س)

نبدأ بـ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}}$ ب س^{٢} − ١١ = ب(٢)^{٢} − ١١ = $\boxed{\text{٤ب} - ١١}$

والان بـ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أس} + ٦}{\text{س} - ٢}$

وكون النهاية موجودة فهذا يعنى أن س − ٢ هى صفر للبسط والمقام

∴ س^{٣} − أس + ٦ = ٠ عند $\boxed{\text{س} - ٢}$ ⇐ (٢)^{٣} − أ × ٢ + ٦ = ٠

٨ − ٢أ + ٦ = ٠ ⇐ ٢أ = ١٤ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٧}$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٧\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣$

= (٢)^{٢} + ٢ × ٢ − ٣ = ٤ + ٤ − ٣ = ٥

وكون $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}}$ د(س)

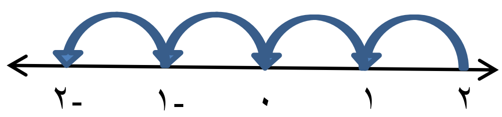
٤ب − ١١ = ٥ ⇐ ٤ب = ٥ + ١١ ⇐ ب = $\dfrac{١٦}{٤}$ ⇐ $\boxed{\text{ب} = ٤}$

∴ $\boxed{\text{أ} = ٧ \text{ ، ب} = ٤}$

مثال (٣١) إذا كانت د(س)= $\begin{cases} [\text{س} + ٢] & \text{س} \le ٠ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & \text{س} > ٠ \end{cases}$ فأوجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠}$ د(س) ؟

الحل بالنسبة لدالة |س| فكون س > ٠ تستبدل بالقاعدة الموجبة د(س) = $\dfrac{\text{س}}{\text{س}}$ = ١

أما بالنسبة للدالة [س + ٢] فنقوم بتشعيبها على النحو التالي ⇐



من خلال تشعيب دالة [س + ٢] تصبح على النحو التالي

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & \text{س} \geq ٠ \\ ١ & \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{د}(\text{س}) = ١ \ ، \ \lim_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{د}(\text{س}) = ١ \ \Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س}) = \boxed{١}$$

$$[\text{س}+٢] = \begin{cases} ١ & -١ \leq \text{س} < ٠ \\ ١ & ٠ \leq \text{س} < ١ \end{cases}$$

∴ عند س←٠ نأخذ القاعدة ١

المثال التالي يوضح كيفية الضرب بمرافق البسط ومرافق المقام معاً (بحاجة الي التركيز في الأرقام)

مثال (٣٢) أوجد $\lim_{\text{س}\to ٥} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١}-٤}{٢-\sqrt{\text{س}-١}}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to ٥} \frac{\sqrt{٣\text{س}+١}-٤}{٢-\sqrt{\text{س}-١}} = \frac{\sqrt{٣\times٥+١}-٤}{٢-\sqrt{٥-١}} = \frac{\sqrt{١٦}-٤}{٢-\sqrt{٤}} = \frac{٤-٤}{٢-٢} = \frac{٠}{٠}$$

بالضرب في المرافق للبسط وللمقام

$$\lim_{\text{س}\to ٥} \frac{\sqrt{٣\text{س}+١}-٤}{٢-\sqrt{\text{س}-١}} = \lim_{\text{س}\to ٥} \frac{\sqrt{٣\text{س}+١}-٤}{٢-\sqrt{\text{س}-١}} \times \frac{\sqrt{٣\text{س}+١}+٤}{\sqrt{٣\text{س}+١}+٤} \times \frac{٢+\sqrt{\text{س}-١}}{٢+\sqrt{\text{س}-١}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٥} \frac{[(٣\text{س}+١)-١٦]\times[٢+\sqrt{\text{س}-١}]}{[٤-(\text{س}-١)]\times[\sqrt{٣\text{س}+١}+٤]} = \lim_{\text{س}\to ٥} \frac{(٣\text{س}-١٥)\times(٢+\sqrt{\text{س}-١})}{(٥-\text{س})\times(\sqrt{٣\text{س}+١}+٤)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٥} \frac{-٣(٥-\text{س})\times(٢+\sqrt{\text{س}-١})}{(٥-\text{س})\times(\sqrt{٣\text{س}+١}+٤)} = \lim_{\text{س}\to ٥} \frac{-٣\times(٢+\sqrt{\text{س}-١})}{\sqrt{٣\text{س}+١}+٤} = \frac{-٣\times(٢+\sqrt{٥-١})}{\sqrt{٣\times٥+١}+٤}$$

$$= \frac{-٣\times(٢+\sqrt{٤})}{\sqrt{١٦}+٤} = \frac{-٣\times(٢+٢)}{٤+٤} = \frac{-٣\times٤}{٤+٤} = \frac{-١٢}{٨} = \frac{-٣}{٢}$$

مثال (٣٣) اذا كانت $\lim_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{م}\,\text{س}^{٢}-١}{\text{م}\sqrt{\text{س}}-١} = ٦$ فأوجد قيمة م؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{م}\,\text{س}^{٢}-١}{\text{م}\sqrt{\text{س}}-١} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{م}\,\text{س}^{٢}-١}{\text{م}\sqrt{\text{س}}-١} \times \frac{\text{م}\sqrt{\text{س}}+١}{\text{م}\sqrt{\text{س}}+١}$$

بالضرب في المرافق للمقام

$$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{م}\,\text{س}^{٢}-١)(\text{م}\sqrt{\text{س}}+١)}{\text{م}\,\text{س}^{٢}-١} = \lim_{\text{س}\to ١} \text{م}\sqrt{\text{س}}+١ = \text{م}\sqrt{١}+١ = \text{م}+١$$

$\because$ $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{م س^{٢} - ١}{م \sqrt{س} - ١} = ٦ \Leftrightarrow م + ١ = ٦ \Leftrightarrow م = ٦ - ١ \Leftrightarrow \boxed{م = ٥}$

نهاية الدالة عند اللانهائية

ويقصد بها إيجاد قيمة د(س) عندما س ← ∞ أو س ← -∞

ملاحظات

١. أ + ∞ = ∞ حيث أ ∈ ع
٢. أ - ∞ = -∞ حيث أ ∈ ع
٣. أ × ∞ = ∞ حيث أ ∈ $ع^{+}$
٤. أ × ∞ = -∞ حيث أ ∈ $ع^{-}$
٥. $\frac{أ}{\infty}$ = صفر حيث أ ∈ ع
٦. الكميات التالية غير معينة (غير معرفة)
  ١. $\frac{\infty}{\infty}$
  ٢. $\infty - \infty$

مثال (٣٤) أمثلة سريعة:- أوجد نهاية كلاً من ؟

الحل

١- $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} ٥س^{٢}$ بالتعويض $٥ \times \infty^{٢} = \infty$

٢- $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـــا}} ٥س^{٢}$ بالتعويض $٥ \times (-\infty)^{٢} = \infty$

٣- $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} ٥س^{٣}$ بالتعويض $٥ \times \infty^{٣} = \infty$

٤- $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـــا}} ٥س^{٣}$ بالتعويض $٥ \times (-\infty)^{٣} = -\infty$

٥- $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} ٥س^{-٣} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٥}{س^{٣}} = \frac{٥}{\infty^{٣}} =$ صفر

لا تنسى القاعدة التالية $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} أ = أ$ حيث أ ثابت أ ∈ ع

غالبية الأسئلة على هذا الموضوع تأتي على شكل دالة نسبية أي $\frac{\square\square\square}{\square\square\square}$ فإذا كانت نتيجة التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ نلجأ إلي الطرق التالية :-

❖ ١- إذا كان أكبر أس في البسط $\boxed{\text{أكبر}}$ من أكبر أس في المقام تكون الإجابة ∞ أو -∞

مثال $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٦}+\text{س}^{٥}+\text{س}}{\text{س}^{٣}+\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٣}} = \infty$ لأن ٦ > ٣

❖ ٢- إذا كان أكبر أس في البسط **أصغر** من أكبر أس في المقام تكون الإجابة صفر

مثال $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٤}+\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٦}+\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٦}} = \text{صفر}$ لأن ٥ < ٦

❖ ٣- إذا كان أكبر أس في البسط **يساوي** من أكبر أس في المقام تكون الإجابة = $\dfrac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$

مثال $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{٦\text{س}^{٣}+٣\text{س}^{٢}+٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+٣\text{س}^{٣}+١٢} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{٦\text{س}^{٣}}{٣\text{س}^{٣}} = \dfrac{٦}{٣} = ٢$

مثال **(٣٥)** أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}^{٣}+٥}{٦\text{س}^{٣}+٤\text{س}-١}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}^{٣}+٥}{٦\text{س}^{٣}+٤\text{س}-١} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{-٣\text{س}^{٣}}{٦\text{س}^{٣}} = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$$

طريق أخري للحل:- نخرج من البسط أكبر أس عامل مشترك وكذلك من المقام أكبر أس عامل مشترك

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}^{٣}+٥}{٦\text{س}^{٣}+٤\text{س}-١} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٣}\left(\frac{١}{\text{س}}-٣+\frac{٥}{\text{س}^{٣}}\right)}{\text{س}^{٣}\left(٦+\frac{٤}{\text{س}^{٢}}-\frac{١}{\text{س}^{٣}}\right)} = \frac{\frac{١}{\infty}-٣+\frac{٥}{\infty^{٣}}}{٦+\frac{٤}{\infty^{٢}}-\frac{١}{\infty^{٣}}} = \frac{٠-٣+٠}{٦+٠-٠} = -\frac{٣}{٦}$$

طريق أخري للحل:- نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير س $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}^{٣}+٥}{٦\text{س}^{٣}+٤\text{س}-١}$

أكبر قوة في الحد $\text{س}^{٣}$ إذا نقسم المعادلة علي $\text{س}^{٣}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}}-\frac{٣\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}}+\frac{٥}{\text{س}^{٣}}}{\frac{٦\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}}+\frac{٤\text{س}}{\text{س}^{٣}}-\frac{١}{\text{س}^{٣}}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{١}{\text{س}}-٣+\frac{٥}{\text{س}^{٣}}}{٦+\frac{٤}{\text{س}^{٢}}-\frac{١}{\text{س}^{٣}}} = \frac{\frac{١}{\infty}-٣+\frac{٥}{\infty^{٣}}}{٦+\frac{٤}{\infty^{٢}}-\frac{١}{\infty^{٣}}} = \frac{٠-٣+٠}{٦+٠-٠} = -\frac{٣}{٦}$$

ملاحظة:- إذا يمكن الاعتماد علي الطريقة الأولي لأن السؤال عادة ما يكون اختيار من متعدد وإذا كان مقالياً أتبع أحدي الطريقتين الأخيرتين

مثال **(٣٦)** احسب $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{٢\text{س}^{٤}-٨\text{س}+١}{٢\text{س}-٤\text{س}^{٣}+٧}$ ؟

الحل

$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٤} - ٨س + ١}{٢س - ٤س^{٣} + ٧}$ حسب الطريقة الأولي رقم (١)

$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٤}}{-٤س^{٣}} = \dfrac{٢}{-٤}\infty = -\infty$ انتبه الإجابة $= -\infty$ لأن $\dfrac{٢}{-٤} \times \infty = -\infty$

ويمكن الحل بطريقة إخراج العامل المشترك:-

$$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٤} - ٨س + ١}{٢س - ٤س^{٣} + ٧} = \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤}\left(٢ - \dfrac{٨}{س^{٣}} + \dfrac{١}{س^{٤}}\right)}{س^{٣}\left(\dfrac{٢}{س^{٢}} - ٤ + ٧\right)} = \infty \times \dfrac{٢}{-٤} = -\infty$$

مثال (٣٧) احسب $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س^{٢} + ٣س - ١}{٢س^{٢} - ٤س - ٧}$ ؟

الحل

$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س^{٢} + ٣س - ١}{٢س^{٢} - ٤س - ٧}$ حسب الطريقة الأولي رقم (١) الإجابة $\dfrac{٥}{٢}$

$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س^{٢}}{٢س^{٢}} = \dfrac{٥}{٢}$

ويمكن الحل بطريقة إخراج العامل المشترك:- حيث يمكن إخراج $س^{٢}$ عامل مشترك

$$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س^{٢} + ٣س - ١}{٢س^{٢} - ٤س - ٧} = \dfrac{٤}{س^{٢}} = \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢}\left(٥ + \dfrac{٣}{س} - \dfrac{١}{س^{٢}}\right)}{س^{٢}\left(٢ - \dfrac{٤}{س} - \dfrac{٧}{س^{٢}}\right)} = \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ + \dfrac{٣}{س} - \dfrac{١}{س^{٢}}}{٢ - \dfrac{٤}{س} - \dfrac{٧}{س^{٢}}} = \dfrac{٥ + \dfrac{٣}{\infty} - \dfrac{١}{\infty^{٢}}}{٢ - \dfrac{٤}{\infty} - \dfrac{٧}{\infty^{٢}}}$$

$$= \dfrac{٥ + ٠ - ٠}{٢ - ٠ - ٠} = \dfrac{٥}{٢}$$

مثال (٣٨) احسب $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{|٢س + ٣|}{\sqrt{س^{٢} - ٤}}$ ؟

الحل

احسب أي نعوض في القاعدة $٢س + ٣$ في البسط كون $س \leftarrow \infty$

لاحظ أن

$$|٢س + ٣| = \begin{cases} ٢س + ٣ & س \geq -\dfrac{٣}{٢} \\ -٢س - ٣ & س < -\dfrac{٣}{٢} \end{cases}$$

وعند اللانهائية يمكن أن تكون كالتالي

$$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{|٢س+٣|}{\sqrt{س^{٢}-٤}}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س+٣}{\sqrt{س^{٢}\left(١-\frac{٤}{س^{٢}}\right)}}$$

$س \to +\infty$

$س \to -\infty$

$$=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س+٣}{|س|\sqrt{١-\frac{٤}{س^{٢}}}}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س+٣}{س\sqrt{١-\frac{٤}{س^{٢}}}}$$

$$=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{س\left(٢-\frac{٣}{س}\right)}{س\sqrt{١-\frac{٤}{س^{٢}}}}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢-\frac{٣}{س}}{\sqrt{١-\frac{٤}{س^{٢}}}}=\frac{٢-\frac{٣}{\infty}}{\sqrt{١-\frac{٤}{\infty^{٢}}}}=\frac{٢-٠}{\sqrt{١-٠}}=\frac{٢}{\sqrt{١}}=\frac{٢}{١}=٢$$

مثال (٣٩) احسب $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(٢س+١)(س-١)}{(س+١)(٣س-١)}$ ؟

الحل

$$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(٢س+١)(س-١)}{(س+١)(٣س-١)}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س^{٢}-س-١}{٣س^{٢}+٢س-١}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{س^{٢}\left(٢-\frac{١}{س}-\frac{١}{س^{٢}}\right)}{س^{٢}\left(٣+\frac{٢}{س}-\frac{١}{س^{٢}}\right)}$$

$$=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢-\frac{١}{س}-\frac{١}{س^{٢}}}{٣+\frac{٢}{س}-\frac{١}{س^{٢}}}=\frac{٢-\frac{١}{\infty}-\frac{١}{\infty^{٢}}}{٣+\frac{٢}{\infty}-\frac{١}{\infty^{٢}}}=\frac{٢-٠-٠}{٣+٠-٠}=\frac{٢}{٣}$$

مثال (٤٠) احسب $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{|س^{٣}|+٢}{٥+٢س}$ ؟

الحل

$$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{|س^{٣}|+٢}{٥+٢س^{٢}}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{س^{٣}+٢}{٥+٢س^{٢}}=\frac{١}{٢}$$

حيث نستبدل $|س^{٣}|$ بـ $س^{٣}$ كون $س \to \infty$

مثال (٤١) احسب $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س+٣}{\sqrt{س^{٢}-٢س-٣}}$ ؟

انتبه نخرج أكبر أس عامل مشترك من تحت الجذر نخرجه من الجذر

الحل

$$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س+٣}{\sqrt{س^{٢}-٢س-٣}}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{س-٥}{\sqrt{س^{٢}\left(١-\frac{٤}{س}-\frac{٤}{س^{٢}}\right)}}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{س-٥}{|س|\sqrt{١-\frac{٤}{س}-\frac{٤}{س^{٢}}}}$$

$$=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}-5}{\text{س}\sqrt{1-\frac{4}{\text{س}}-\frac{4}{\text{س}^2}}}=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{\text{س}(1-\frac{5}{\text{س}})}{\text{س}\sqrt{1-\frac{4}{\text{س}}-\frac{4}{\text{س}^2}}}=\frac{1-\frac{5}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{4}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1-0-0}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

وتستبدل $\sqrt{\text{س}^2}$ بـس كون س $\longleftarrow +\infty$

مثال (٤٢) احسب $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(2\text{س}^2-3)^5-4\text{س}^2}{2\text{س}^2+5\text{س}^6}$ ؟

انتبه نهتم بأكبر أس

الحل

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(2\text{س}^2-3)^5-4\text{س}^2}{2\text{س}^2+5\text{س}^6}=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(2\text{س}^2)^5}{5\text{س}^6}=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{32\text{س}^{10}}{5\text{س}^6}=\infty$$

مثال (٤٣) احسب $\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{(1-\text{س})^5-\text{س}^4}{2-6\text{س}^5}$ ؟

انتبه نهتم بأكبر أس

الحل

$$\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{(1-\text{س})^5-\text{س}^4}{2-6\text{س}^5}=\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{(-\text{س})^5}{-6\text{س}^5}=\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{-\text{س}^5}{-6\text{س}^5}=\frac{1}{6}$$

مثال (٤٤) احسب $\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{\text{س}^2-(\text{س}-5)^3}{(2-\text{س})^4-2\text{س}^4}$ ؟

انتبه نهتم بأكبر أس

الحل

$$\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{\text{س}^2-(\text{س}-5)^3}{(2-\text{س})^4-2\text{س}^4}=\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{\text{س}^4}{\text{س}^4-2\text{س}^4}=\lim_{\text{س}\to-\infty}\frac{\text{س}^4}{-\text{س}^4}=-1$$

أمثلة أصعب قليلاً

مثال (٤٥) احسب $\lim_{\text{س}\to\infty}\left(\frac{5\text{س}^2-3}{3-2\text{س}^2}\right)^{-2}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to\infty}\left(\frac{3-2\text{س}^2}{5\text{س}^2-3}\right)^2=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{(-2\text{س}^2)^2}{(5\text{س}^2)^2}=\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{4\text{س}^4}{25\text{س}^4}=\frac{4}{25}$$

الحل نحول الأس السالب الي موجب وذلك بعكس البسط والمقام

مثال (٤٦) احسب $\lim_{\text{س}\to\infty}\frac{2\text{س}^3(4\text{س}^2-7\text{س})}{(\text{س}^2+5)(5\text{س}^3-7)}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٢س}^{٣}(\text{٤س}^{٢} - \text{٧س})}{(\text{س}^{٢} + ٥)(\text{٥س}^{٣} - ٧)} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٨س}^{٥}}{\text{٥س}^{٥}} = \frac{٨}{٥}$$

الحل فقط نهتم بأكبر أس في البسط والمقام

مثال (٤٧) إذا كانت $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٣س}^{٥} - \text{٧س}^{٣}}{\text{أس}^{\text{ن}} - \text{٨س}^{٢} + ٩} = ٤$ فأوجد أ ، ن ؟

الحل

∵ النهاية موجودة = ٤ فهذا يعني أن أكبر أس في البسط يساوي أكبر أس في المقام وعليه تكون $\boxed{\text{ن} = ٥}$

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٣س}^{٥} - \text{٧س}^{٣}}{\text{أس}^{٥} - \text{٨س}^{٢} + ٩} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٣س}^{٥}}{\text{أس}^{٥}} = \frac{٣}{\text{أ}} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{٣}{٤}}$$

مثال (٤٨) إذا كانت $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(١ + \text{٢س}^{٢})^{٢}}{\text{أس}^{٢}(١ + \text{س})^{\text{ن}}} = -٢$ فأوجد أ ، ن ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(١ + \text{٢س}^{٢})^{٢}}{\text{أس}^{٢}(١ + \text{س})^{\text{ن}}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٤س}^{٤}}{\text{أس}^{\text{ن}+٢}}$$

∵ النهاية موجودة = -٢ فهذا يعني أن أكبر أس في البسط يساوي أكبر أس في المقام وعليه تكون

$$\Leftarrow ٤ = ٢ + \text{ن} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٤س}^{٤}}{\text{أس}^{٤}} = -٢ \Leftarrow \frac{٤}{\text{أ}} = -٢ \Leftarrow \text{أ} = \frac{٤}{-٢} = -٢ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٢}$$

مثال (٤٩) أوجد $\lim_{\text{س}\to-\infty} \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{٣س}} + \text{س}$ ؟

الحل

$$\lim_{\text{س}\to-\infty} \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{٣س}} + \text{س} = \infty - \infty$$

وهي كمية غير معرفة لذلك نضرب بالمرافق

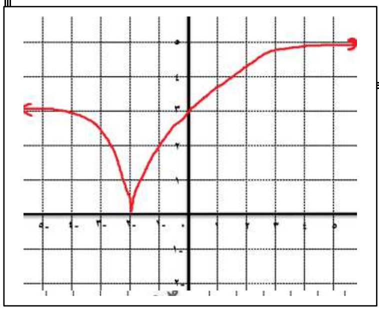
$$\lim_{\text{س}\to-\infty} \sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}+\text{س} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}-\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}-\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣\text{س}}-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{٣\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}(١-\frac{٣}{\text{س}})}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{٣\text{س}}{|\text{س}|\sqrt{١-\frac{٣}{\text{س}}}-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{٣\text{س}}{-\text{س}\sqrt{١-\frac{٣}{\text{س}}}-\text{س}} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{٣\text{س}}{-\text{س}(\sqrt{١-\frac{٣}{\text{س}}}+١)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{٣}{-(\sqrt{١-\frac{٣}{\text{س}}}+١)} = \frac{٣}{-\sqrt{١-\frac{٣}{-\infty}}-١} = \frac{٣}{-\sqrt{١-٠}-١} = \frac{٣}{-١-١} = \frac{٣}{-٢} = -\frac{٣}{٢}$$

ويمكن أن يتم حل السؤال من خلال الرسم

مثال (٥٠) من خلال الرسم أوجد ١- $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د}(\text{س})$ ٢- $\lim_{\text{س}\to-\infty} \text{د}(\text{س})$؟

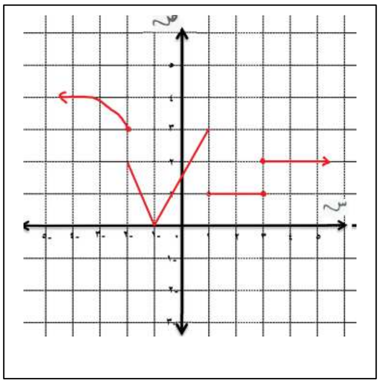


الحل ١- $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د}(\text{س}) = ٥$

٢- $\lim_{\text{س}\to-\infty} \text{د}(\text{س}) = ٣$

مثال (٥١) أعتمد على الرسم المقابل لإيجاد ما يلي

١- $\lim_{\text{س}\to-\infty} \text{د}(\text{س})$ ٢- $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د}(\text{س})$ ٣ - قيم أ حيث أن $\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة قيم أ ={-٢ ، ١ ، ٣ }



الحل ١- $\lim_{\text{س}\to-\infty} \text{د}(\text{س}) = ٤$ ٢- $\lim_{\text{س}\to\infty} \text{د}(\text{س}) = ٢$

٣ - قيم أ حيث أن $\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة قيم أ $\in$ {-٢ ، ١ ، ٣ }

الأسباب $\lim_{\text{س}\to-٢^{+}} \text{د}(\text{س}) = ٢$ ، $\lim_{\text{س}\to-٢^{-}} \text{د}(\text{س}) = ٣ \Leftarrow \lim_{\text{س}\to-٢} \text{د}(\text{س})$

غير موجودة وهكذا الباقي

الاتصال

أولاً:-اتصال دالة عند نقطة

تعريف :- لتكن د(س) معرفة على الفترة [جـ ، د] ولتكن ا ∋ [جـ ، د] فنقول أن د(س) متصلة عند س= ا

اذا تحقق الشرط التالي :- د(ا) = $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) ⇐ وهذا يعني ضمنياً ما يلي :-

١ - $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) موجودة

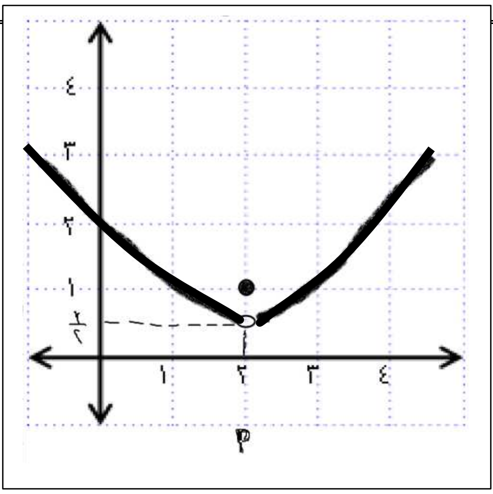
٢- د(ا) معرفة وموجودة

٣- د(ا) = $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س)

واذا لم يتحقق أحد هذه الشروط أو بعضها نقول أن د(س) غير متصلة عند س = ا

وحتي يتضح التعريف أعلاه نأخذ الأمثلة التالية

مثال (١) بفرض أن ا = ٢ من الشكل المجاور لاحظ أن



١- د(٢) = ١

٢- $\underset{س\to ا^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$ ، $\underset{س\to ا^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$

⇐ $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$

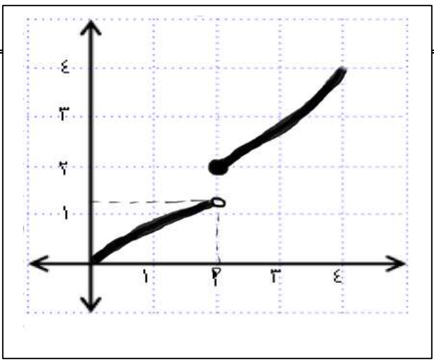
٣- د(ا) = ١

∴ $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\frac{١}{٢}$ موجودة بينما د(ا) = ١ وحيث أن

د(ا) ≠ $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) فهذا يعني أن الدالة د(س) غير متصلة عند س = ا أو س = ٢ وتسمي نقطة انفصال

وسبب عدم الاتصال هنا د(ا) ≠ $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س)

مثال (٢) من الشكل المجاور لاحظ أن



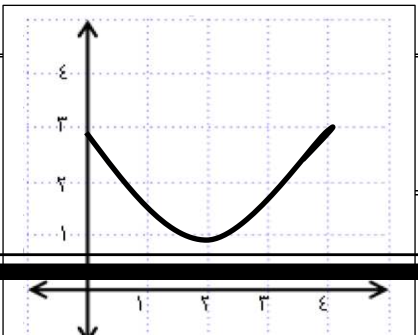
١- د(ا) = ٢

٢- $\underset{س\to ا^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢ ، $\underset{س\to ا^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١,٢

⇐ $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

٣- د(ا) = ١ ∴ د(س) غير متصلة عند س= ا وذلك بسبب أن $\underset{س\to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

مثال (٣) من الشكل المجاور لاحظ أن



١- د(ا) غير معرفة وغير موجودة

٢- $\lim\limits_{س \to أ^{+}}$ د(س) = ١ ، $\lim\limits_{س \to أ^{-}}$ د(س) = ١

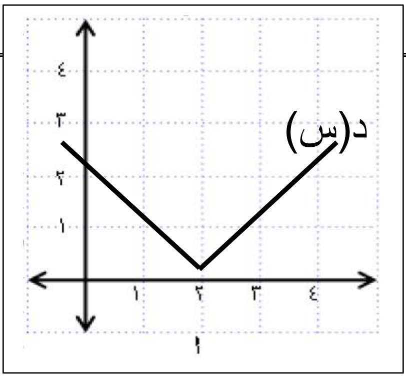
٥

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) = ١

$\therefore$ **د(س)غير متصلة عند س= أ وذلك بسبب أن د(أ) غير معرفة**

وهذا يعني أن د(أ) ≠ $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س)

مثال (٤) من الشكل المجاور لاحظ أن



١- د(أ) = صفر

٢- $\lim\limits_{س \to أ^{+}}$ د(س) = صفر ، $\lim\limits_{س \to أ^{-}}$ د(س) = صفر

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) = صفر

$\because$ د(أ) ≠ $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) **وهذا يعني أن د(س) متصلة عند س= أ**

اذا من الأمثلة السابقة نستخلص ما يلي:-

١- اذا كانت د(أ) = جـ وكـــــانت $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) = جـ $\Leftarrow$ د(س) متصلة عند س= أ

٢- اذا كانت د(أ) = غير معرفة وكانت $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) = جـ $\Leftarrow$ د(س) غير متصلة عند س= أ

٣- اذا كانت د(أ) = جـ وكانت $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) غير موجودة $\Leftarrow$ د(س) غير متصلة عند س= أ

٤- اذا كانت د(أ) = غير معرفة وكانت $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) غير موجودة $\Leftarrow$ د(س) غير متصلة عند س= أ

لاحظ أنه إذا كانت د(س) = أس – ب فإن دَ(س $^{-}$) = أ وهي معامل س ويمكن اثباتها عن طريق التعريف العام للمشتقة وهذا يعنى أن الدوال التي فيها رؤوس مدببة تكون غير قابلة للاشتقاق عند الرأس المدبب لأنها التقاء دالتين خطيتين متعاكستين

أمثلة متنوعة

مثال (٥)

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \sqrt{س^{٢}+٧} & س<١ \\ \frac{١٢}{س} & س=١ \\ ٢س-٢ & س>١ \end{cases}$

أبحث اتصال الدالة د(س) عند ١- س = ٣

٢- س = ٦

الحل

١- عند س= ٣ ⇐ ١- د(٣) = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

٢- $\underset{س\leftarrow ٣^{+}}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س\leftarrow ٣^{+}}{نهـا}$ ٢س − ٢ = ٢ × ٣ − ٢ = ٤

$\underset{س\leftarrow ٣^{-}}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س\leftarrow ٣^{-}}{نهـا}$ $\sqrt{س^{٢}+٧}$ = $\sqrt{٣^{٢}+٧}$ = $\sqrt{٩+٧}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

⇐ $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س) = ٤

إذا $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س) = ٤ ، د(٣) = ٤ ⇐ $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س) = د(٣)

⇐ د(س) متصلة عند س = ٣

٢- عند س= ٦ ⇐ ١- د(س) = د(٦) = ٢س − ٢ = ٢ × ٦ − ٢ = ١٠

٢- $\underset{س\leftarrow ٦}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س\leftarrow ٦}{نهـا}$ ٢س − ٢ = ٢ × ٦ − ٢ = ١٠

من جهة واحدة كونها ليست نقطة تشعيب

∵ د(٦) = $\underset{س\leftarrow ٦}{نهـا}$ د(س) = ١٠ فهذا يعني أن د(س) متصلة عند س =٦

مثال (٦) مدرسة لتعليم قيادة السيارات تحسب أجرة تعليم كل فرد على عدد الساعات التي يتعلمها الفرد ، وتعطي بالعلاقة التالية :-

د(س) = $\begin{cases} ٢٠ & ٠ < س \leqslant ٥ \\ ١٧ + ٦ ,٠س & ٥ < س \leqslant ١٥ \\ ٢٢ + ٣ ,٠س & س > ١٥ \end{cases}$

حيث د(س) أجرة التعليم بالريال و س عدد الساعات التي يتعلمها الفرد

١- ابحث اتصال الدالة عند س=٥

٢- ابحث اتصال الدالة عند س=١٥

الحل ١- لنبحث اتصال الدالة عند س =٥ ⇐ ١- د(٥) = ٢٠

٢- $\underset{س \to ٥^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١٧ + ٠,٦ × ٥ = ٢٠

$\underset{س \to ٥^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢٠ ⟸ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢٠

وهذا يعني أن د(٥) = $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}$ د(س) ⟸ $\boxed{\text{د(س) متصلة عند س = ٥}}$

٢- لنبحث اتصال الدالة عند س = ١٥ ⟸ ١- د(١٥) = ١٧ + ٠,٦ × ١٥ = ١٧ + ٩ = ٢٦

٢- $\underset{س \to ١٥^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢٢ + ٠,٣ × ١٥ = ٢٢ + ٤,٥ = ٢٦,٥

$\underset{س \to ١٥^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١٧ + ٠,٦ × ١٥ = ١٧ + ٩ = ٢٦ ⟸ ∴ $\underset{س \to ١٥}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

وهذا يعني أن د(٥) ≠ $\underset{س \to ١٥}{\text{نهـا}}$ د(س) ⟸ $\boxed{\text{د(س) غير متصلة عند س = ١٥}}$

مثال (٧) ابحث اتصال د(س) = |س − ٢| عند س = ٢؟

الحل أولاً نعيد تعريف د(س) على النحو التالي د(س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} & \text{س} < ٢ \end{cases}$

لنبحث اتصال الدالة عند س = ٢ ⟸ ١- د(٢) = س − ٢ = ٢ − ٢ = ٠

٢- $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = س − ٢ = ٢ − ٢ = ٠ ، $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = س − ٢ = ٢ − ٢ = ٠ ⟸ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٠

∵ د(٢) = $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) ⟸ وهذا يعنى أن ⟸ $\boxed{\text{د(س) متصلة عند س = ٢}}$

مثال (٨) إذا كانت ن(س) = س^٣ + س^٢ − ٣س + ١ ابحث اتصال ن(س) عند س = ٢؟

الحل لنبحث اتصال الدالة عند س = ٢ ⟸ ١- ن(٢) = س^٣ + س^٢ − ٣س + ١ = ٢^٣ + ٢^٢ − ٣ × ٢ + ١ = ٧

٢- $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ن(س) = ٢^٣ + ٢^٢ − ٣ × ٢ + ١ = ٨ + ٤ − ٦ + ١ = ١٣ − ٦ = ٧

∵ ن(س) = $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ن(س) ⟸ وهذا يعنى أن ⟸ $\boxed{\text{ن(س) متصلة عند س = ٢}}$

نتيجة :- كثيرات الحدود متصلة علي ح

مثال (٩) ابحث اتصال د(س) = $\begin{cases} \frac{س - ١}{|س - ١|} & س \neq ١ \\ -١ & س = ١ \end{cases}$ عند س = ١؟

س≠١ بمعنى
س> ١ أو س < ١

الحل أولاً نعيد تعريف د(س) على النحو التالي :- كون |س − ١| = $\begin{cases} س - ١ & س>١ \\ ١ - س & س<١ \end{cases}$

فإن د(س) = $\begin{cases} \frac{س - ١}{س - ١} & س > ١ \\ \frac{س - ١}{١ - س} & س < ١ \\ -١ & س = ١ \end{cases}$ د(س) = $\begin{cases} ١ & س > ١ \\ -١ & س < ١ \\ -١ & س = ١ \end{cases}$

استكمال خطوات الحل :- ١- د(١) = −١

٢- $\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا}$ د(س) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا}$ د(س) = −١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د(س) غير موجودة ⟸ وهذا يعني أن ⟸ د(س) غير متصلة عند س = ١

مثال (١٠) ابحث اتصال د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ٥ & س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣؟

تذكر أن س≠٣ بمعنى
س> ٣ أو س <٣

الحل ١- د(٣) = ٥ من الدالة مباشرة

٢- $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ = $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$ = $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ س + ٣ = ٣ + ٣ = ٦

∵ د(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د(س) وهذا يعني أن ⟸ د(س) غير متصلة عند س = ٣

مثال (١١) ابحث اتصال د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + س - ٢٠}{س - ٥} & س \neq -٥ \\ -١ & س = -٥ \end{cases}$ عند س = -٥؟

تذكر أن س≠٣
بمعنى س> ٣
أو س <٣

الحل ١- د(-٥) = −١ من الدالة مباشرة

٢- $\lim\limits_{س \to -٥} د(س) = \lim\limits_{س \to -٥} \frac{س^٢ + س - ٢٠}{س - ٥} = \frac{(-٥)^٢ + (-٥) - ٢٠}{-٥ - ٥} = \frac{٠}{٠}$

⟸ وهي قيمة غير معرفة ومرفوضة | ← نلجأ للتحليل

$\lim\limits_{س \to -٥} د(س) = \lim\limits_{س \to -٥} \frac{س^٢ + س - ٢٠}{س - ٥} = \lim\limits_{س \to -٥} \frac{(س - ٤)(س + ٥)}{س + ٥} = \lim\limits_{س \to -٥} س - ٤ = -٥ - ٤ = -٩$

∵ د(-٥) $\neq \lim\limits_{س \to -٥} د(س)$ ∴ هذا يعني أن ⟸ د(س) غير متصلة عند س = -٥

مثال (١٢)

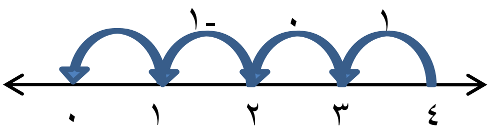
ابحث اتصال د(س) = $\begin{cases} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} & س < ٢ \\ [س - ٣] & ٢ \leqslant س < ٣ \\ ٥س^٢ - ٤٦ & س \geqslant ٣ \end{cases}$ عند س = ٢، س = ٣؟

الحل لحل مثل هذه الأسئلة يتم الاستعاضة عن الدوال [ ] و | | بما يقابلها من شعب حسب قيم س

١- فلنبدأ بـ $|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & س \geq ٢ \\ ٢ - س & س < ٢ \end{cases}$

وكون الدالة د(س) تتضمن الفترة س < ٢ فهذا يعني اختيار الشعبة الثانية (٢ − س) بدلاً من |س − ٢|

٢ – أما [س − ١] فنتبع الخطوات التي تعلمناها سابقاً نوجد طول الفترة



الجزئية لـ= $\frac{١}{|أ|} = \frac{١}{|١|} = ١$ ∴ طول الفترة الجزئية = ١

س − ٣ = ٠ ⟸ س = ٣

لاحظ وكون معامل س موجباً تكون المساواة في الطرف الأول (الايمن) والتعويض في الطرف الايمن

وهذا يعني أن $[س - ٣] = \begin{cases} -٢ \Leftarrow ١ \leq س < ٢ \\ -١ \Leftarrow ٢ \leq س < ٣ \\ ٠ \Leftarrow ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$ وهكذا

وبما أن د(س) العلوية تتحدث عن الفترة ٢ ≤ س < ٣ فهذا يعني اختيار الشعبة الثانية بالقيمة -١

∴ تصبح د(س) = $\begin{cases} \frac{٢ - س}{س - ٢} & س < ٢ \\ -١ & ٢ \leqslant س < ٣ \\ ٥س^٢ - ٤٦ & ٣ \leqslant س \end{cases}$ ∴ لبحث عن اتصال الدالة عند س=٢

١- د(٢) = [س − ٣] = [٢ − ٣] = −١ ٢- $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) = -١$

∵ د(٢) = $\lim_{س\to٢}$ د(س) ∴ $\boxed{⇐ \text{ د(س) متصلة عند س = ٢}}$

∴ لبحث عن اتصال الدالة عند س=٣

١- د(٣) = ٥س^٢ − ٤٦ = ٥(٣)^٢ − ٤٦ = ٥ × ٩ − ٤٦ = ٤٥ − ٤٦ = −١

٢- $\lim_{س\to٣^+}$ د(س) = $\lim_{س\to٣^+}$ ٥س^٢ − ٤٦ = ٥(٣)^٢ − ٤٦ = ٥ × ٩ − ٤٦ = ٤٥ − ٤٦ = −١

، $\lim_{س\to٣^-}$ د(س) = −١ ⇐ د(س) = $\lim_{س\to٣}$ د(س) ∴ $\lim_{س\to١}$ د(س) موجودة

وهذا يعني أن $\boxed{⇐ \text{ د(س) متصلة عند س = ٣}}$

مثال (١٣) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٣ − ١}{س − ١} & س \ne ١ \\ ٢أ − ٥ & س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ أوجد قيمة أ ؟

الحل بما أن د(س) متصلة عند س=١ فهذا يعني أن د(١) = $\lim_{س\to١}$ د(س)

١- د(١) = ٢أ − ٥ من الدالة مباشرة

٢- $\lim_{س\to١}$ د(س) = $\lim_{س\to١} \dfrac{س^٣ − ١}{س − ١}$ = $\lim_{س\to١} \dfrac{(س − ١)(س^٢ + س + ١)}{س − ١}$ = $\lim_{س\to١}$ س^٢ + س + ١ = ١^٢ + ١ + ١ = ٣

∵ الدالة متصلة عند س = ١ ⇐ د(١) = $\lim_{س\to١}$ د(س) ∴ ٢أ − ٥ = ٣ ⇐ ٢أ = ٨ ⇐ أ = $\frac{٨}{٢}$ ⇐ $\boxed{أ = ٤}$

مثال (١٤) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ك س + ٣ & س \geqslant ١ \\ ٧ − ك س & س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ أوجد قيمة ك؟

الحل بما أن د(س) متصلة عند س=١ فهذا يعني أن د(١) = $\lim_{س\to١}$ د(س)

وأيضاً $\lim_{س\to١^+}$ د(س) = $\lim_{س\to١^-}$ د(س) ⇐ ك × ١ + ٣ = ٧ − ك × ١ ⇐ ك + ٣ = ٧ − ك

⇐ ٢ك = ٧ − ٣ ⇐ ٢ك = ٤ ⇐ $\boxed{ك = ٢}$

مثال (١٥)

إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ١ & س < ٠ \\ أس^٢ + ب & ٠ \leqslant س < ١ \\ ٢س + ١ & س \geqslant ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١، س = ٠ فأوجد قيمة أ ، ب ؟

الحل

١- بما أن د(س) متصلة عند س=١ فهذا يعني أن $\underset{س \to ١^+}{نها} د(س) = \underset{س \to ١^-}{نها} د(س)$

كون $\underset{س \to ١}{نها} د(س) = د(١) \Leftarrow \underset{س \to ١^+}{نها} ٢س + ١ = \underset{س \to ١^-}{نها} أس^٢ + ب \Leftarrow ٢ \times ١ + ١ = أ(١)^٢ + ب$

$\Leftarrow \boxed{٣ = أ + ب}$ - - - - - - - - - - - - $\boxed{١}$

٢- بما أن د(س) متصلة عند س=صفر فهذا يعني أن $\underset{س \to ٠^+}{نها} د(س) = \underset{س \to ٠^-}{نها} د(س)$

كون $\underset{س \to ١}{نها} د(س) = د(١) \Leftarrow \underset{س \to ٠^+}{نها} أس^٢ + ب = \underset{س \to ١^-}{نها} ٣س^٢ + ١ \Leftarrow أ(٠)^٢ + ب = ٢ \times ٠ + ١$

$\Leftarrow \boxed{ب = ١}$ - - - - - - - - - - - - $\boxed{٢}$

وبالتعويض من ٢ في ١ ينتج $\Leftarrow \boxed{٣ = أ + ١} \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$ $\therefore \boxed{أ = ٢}$ ، $\boxed{ب = ١}$

مثال (١٦)

إذا كانت $د(س) = \begin{cases} أ + بس^٢ & س < ٠ \\ ٣ & س = ١ \\ ٢ب + أس & س > ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ فأوجد قيمة أ ، ب ؟

الحل

١- بما أن د(س) متصلة عند س=١ فهذا يعني أن $\underset{س \to ١^+}{نها} د(س) = \underset{س \to ١^-}{نها} د(س) = د(١) = ٣$

$\Leftarrow \underset{س \to ١^+}{نها} أ + بس^٢ = ٣ \Leftarrow \boxed{٣ = أ + ب}$ - - - - - - - $\boxed{١}$

وأيضاً $\Leftarrow \underset{س \to ١^-}{نها} ٢ب + أس = ٣ \Leftarrow \boxed{٣ = ٢ب - أ}$ - - - - - - - $\boxed{٢}$

بجمع المعادلتين

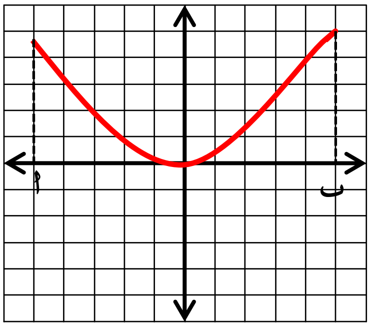
$\Leftarrow \boxed{٣ب = ٦} \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$

وبالتعويض في ١ ينتج $\Leftarrow \boxed{٣ = أ + ٢} \Leftarrow \boxed{أ = ٣ - ٢} \Leftarrow \boxed{أ = ١}$

$\therefore \boxed{أ = ١}$ ، $\boxed{ب = ٢}$

ثانياً:-اتصال دالة على فترة

في الدرس السابق كنا نبحث في اتصال جالة عند نقطة ما ، أما الآن فنبحث اتصال دالة على فترة أي حتي تكون الدالة متصلة على فترة يجب أن تكون متصلة عند كافة النقاط في هذه الفترة



مثال (١٧) لاحظ الشكل المجاور يمثل منحني الدالة د(س)

خلال الفترة] أ ، ب [ولاحظ الدالة متصلة خلال الفترة] أ ، ب [

نظرية :-

١- الدالة الحدودية المعرفة على الفترة [أ ، ب] تكون متصلة على جميع نقاط [أ ، ب]

٢- تكون الدالة د(س) متصلة على الفترة [أ ، ب] إذا كانت :-

أ- د(س) متصلة على الفترة] أ ، ب [ب- $\underset{س\to أ^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(أ) وكذلك $\underset{س\to ب^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(ب)

مثال (١٨) ابحث اتصال الدالة هـ(س) = ٣ − س − س^{٢} في الفترة [-٤ ، ٤]

الحل ∵ هـ(س) = ٣ − س − س^{٢} دالة حدودية مجالها ح

وحيث [-٤ ، ٤] ⊂ ح ∴ هـ(س) = ٣ − س − س^{٢} متصلة علي الفترة [-٤ ، ٤]

مثال (١٩) ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ١ & س < ١ \\ ٣س & س \geqslant ١ \end{cases}$ على مجالها؟

الحل ∵ د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ١ \\ ٣س \end{cases}$ دالة حدودية مجالها ح ويوجد هنا فترتان ١-]−∞ ، ١[٢-]١ ، ∞[

اذا أولا نبحث في الفترة]−∞ ، ١[وفي هذه الفترة الدالة كثيرة حدود ∴ د(س) متصلة علي الفترة]−∞ ، ١[

ثانياً نبحث في الفترة]١ ، ∞[وفي هذه الفترة الدالة كثيرة حدود ∴ د(س) متصلة على الفترة]١ ، ∞[

ثالثاً نبحث عند $\boxed{س = ١}$ ١- د(١) = ٣س = ٣ × ١ = ٣

٢- $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ٣س = ٣س = ٣ × ١ = ٣

٣- $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ س^{٢} + س + ١ = ١^{٢} + ١ + ١ = ٣

$\boxed{\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} د(س) = \underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}} د(س) \Leftarrow \underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}} د(س) = ٣}$

وكون د(١)= $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) فان الدالة د(س) متصلة عند س=١ $\boxed{∴ \Leftarrow \text{الدالة د(س) متصلة على مجالها ح}}$

مثال (٢٠)

ابحث اتصال $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣ & س \leq ٣ \\ \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ٣ < س < ٥ \\ س + ٢ & س \geqslant ٥ \end{cases}$ على مجالها ؟

الحل $\because$ مجال الدالة مجال هو ح

$س^{٢} + ٣$ ، $س < ١$ | ٣ | $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ ، $٣ < س < ٥$ | ٥ | $س + ٢$ ، $س \leq ٥$

<u>أولا</u> نبحث الاتصال في الفترة] $-\infty$ ، ٣ [وهي دالة كثيرة حدود متصلة علي الفترة] $-\infty$ ، ٣ [

<u>ثانياً</u> نبحث الاتصال في الفترة]٣ ،٥[وهي دالة نسبية متصلة على ح ماعدا أصفار المقام س=٣ $\not\in$]٣ ،٥[
$\Leftarrow$ الدالة د(س) متصلة علي الفترة]٣ ،٥[

<u>ثالثاً</u> نبحث الاتصال في الفترة]٥ ،∞[وهي دالة كثيرة حدود متصلة علي الفترة] ٥ ، ∞ [

نبحث الاتصال عند $\boxed{س = ٣}$ ١ - $د(٣) = س^{٢} - ٣ = (٣)^{٢} - ٣ = ٦$

٢- $\text{نهـا}_{س \to ٣^{+}} د(س) = \text{نهـا}_{س \to ٣^{+}} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \text{نهـا}_{س \to ٣^{+}} \dfrac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} = ٣ + ٣ = ٦$

٣- $\text{نهـا}_{س \to ٣^{-}} د(س) = \text{نهـا}_{س \to ٣^{-}} س^{٢} - ٣ = ٩ - ٣ = ٦$

$\text{نهـا}_{س \to ٣^{+}} د(س) = \text{نهـا}_{س \to ٣^{-}} د(س) \Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٣} د(س) = ٦$ موجودة

وكون د(١)= $\text{نهـا}_{س \to ٣} د(س)$ فان الدالة د(س) متصلة عند $س = ٣$

نبحث الاتصال عند $\boxed{س = ٥}$ ١ - $د(٥) = س + ٢ = ٥ + ٢ = ٧$

٢- $\text{نهـا}_{س \to ٥^{+}} د(س) = \text{نهـا}_{س \to ٥^{+}} س + ٢ = ٥ + ٢ = ٧ + ٣ = ٦$

٣- $\text{نهـا}_{س \to ٥^{+}} د(س) = \text{نهـا}_{س \to ٥^{+}} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \dfrac{٥^{٢} - ٩}{٥ - ٣} = \dfrac{١٦}{٢} = ٨$

د(٥) $\neq \text{نهـا}_{س \to ٥^{-}} د(س)$ فان الدالة د(س) متصلة عند $س = ٥$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\boxed{\therefore \text{ الدالة د(س) متصلة على ح -}}\boxed{\{٥\}}$

مثال (٢١) ابحث اتصال د(س) = س + |س − ٣| على مجالها ؟

الحل نعيد تعريف د(س) =
$$\begin{cases} \text{س} + (\text{س} - ٣) & \text{س} \geqslant ٣ \\ \text{س} + (٣ - \text{س}) & \text{س} < ٣ \end{cases}$$
د(س) =
$$\begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & \text{س} \geqslant ٣ \\ ٣ & \text{س} < ٣ \end{cases}$$

أولا نبحث الاتصال في الفترة] − ∞ ، ٣[وهي دالة ثابتة فتكون متصلة علي الفترة] − ∞ ، ٣[

ثانياً نبحث الاتصال في الفترة]٣، ∞[وهي دالة كثيرة حدود متصلة علي الفترة] ٣ ، ∞ [

ثالثاً نبحث الاتصال عند $\boxed{\text{س}=}\boxed{٣}$ ١ - د(٣) = ٢س − ٣ = ٢ × ٣ − ٣ = ٣

٢- $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+}$ ٢س − ٣ = ٢ × ٣ − ٣ = ٣

٣- $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-}$ س ^٢^ − ٣ = ٩ − ٣ = ٦

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+}$ د(س) = ٣ ⇐وكون د(٣)= $\lim\limits_{\text{س}\to ٣}$ د(س) = ٣

فان الدالة د(س) متصلة عند س = ٣ من أولاً وثانياً وثالثاً $\boxed{\Leftarrow}$ $\boxed{\text{∴ الدالة د(س) متصلة على ح}}$

تذكر ما يلي :-

١- مجال الدالة الحدودية هو ح
٢- مجال الدالة النسبية هو ح- أصفار المقام
٣- مجال الدالة هـ(س) تحت الجذر التربيعي هو هـ(س) ⩾ صفر

نظريات الاتصال

اذا كانت د(س) ، هـ(س) دالتين متصلتين علي الفترة [أ ،ب] فإن :-

١. د(س) ± هـ(س) متصلة علي الفترة [أ ،ب]
٢. د(س) × هـ(س) متصلة علي الفترة [أ ،ب]
٣. $\dfrac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$ متصلة علي الفترة [أ ،ب] حيث هـ(س) ≠ ٠
٤. $\sqrt{\text{د(س)}}$ متصلة علي الفترة [أ ،ب] حيث د(س)⩾صفر

مثال (٢٢) أوجد الفترات التي تكون فيها د(س) = $\dfrac{\sqrt{٩ - \text{س}^٢}}{\text{س}^٢ - \text{س}}$ متصلة ؟

الحل البسط : ما بداخل الجذر ≤ صفر

⇐ ٩ − س^{٢} ≥ ٠ ⇐ س^{٢} ≤ ٩ ⇐ |س| ≤ ٣ ⇐ −٣ ≤ س ≤ ٣

المقام : س^{٢} − س = ٠ ⇐ س(س − ١) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س = ١

∴ الدالة د(س) تكون متصلة على الفترة [-٣ ، ٣] - {٠،٠}

مثال (٢٣) أوجد الفترات التي تكون فيها د(س) = $\frac{\sqrt{س^{٢}+١}}{|س|+٣}$ متصلة ؟

الحل ١- النسبة للبسط : ما بداخل الجذر ≤ ٠ ⇐ س^{٢} + ١ ≥ ٠ وهي متحققة دائما ⇐ متصلة على ح

٢- بالنسبة للمقام : نجد أصفار المقام |س| + ٣ = ٠ ⇐ وهي متحققة دائما ⇐ متصلة على ح

وبالتالي فإن د(س) = $\frac{\sqrt{س^{٢}+١}}{|س|+٣}$ تكون متصلة على ح

مثال (٢٤) أوجد قيم س التي يكون عندها د(س) غير متصل فيما يلي (نقاط الانفصال):-

١- ٥س^{٣} − ٢س^{٢} + ٩

٢- $\sqrt[٣]{س-٨}$

٣- $\frac{٣س}{س^{٢}-٢س}$

٤- [س + ٣]

٥- [$\frac{١}{٣}$س + ٥]

الحل **١**- ٥س^{٣} − ٢س^{٢} + ٩ ⇐ د(س) متصلة على ح لأن د(س) حدودية ولا يوجد نقاط انفصال

٢- $\sqrt[٣]{س-٨}$ ⇐ د(س) متصلة على ح لأن د(س) دالة تكعيبية وما بداخلها دائماً متصل على ح مالم يكن في المقام ، ⇐ $\sqrt[٣]{س-٨}$ لا يوجد لها نقاط انفصال

٣- $\frac{٣س}{س^{٢}-٢س}$ في هذه الحالة ١- ندرس البسط ٣س ⇐ فهي دالة حدودية متصلة على ح

٢- ندرس المقام س^{٢} − ٢س ⇐ فهي دالة حدودية متصلة على ح

٣- نجد أصفار المقام س^{٢} − ٢س = ٠ ⇐ س(س − ٢) = ٠ ⇐ س= ٠ أو س=٢

∴ د(س) غير متصلة عند س= ٠ وعند س=٢ ⇐ أي أن د(س) لها نقاط انفصال عند س ∈ {٢،٠ }

٤- د(س)=[س + ٣] ⇐ وهذه الدالة عند تشعيبها ستكون كافة س∈ ص نقاط انفصال مثل س=١ ، ٢ ، ٠، ٣

٥- د(س)=[$\frac{١}{٣}$س + ٥] ⇐ وهذه الدالة عند تشعيبها ستكون كافة $\frac{س}{٣}$ ∈ ص نقاط انفصال مثل س=٣، ٦،٩،٠

ملاحظة

اذا كان سبب عدم الاتصال هو عدم وجود د(أ) أو أن د(أ) $\neq$ نهـــا$_{\text{س}\leftarrow\text{أ}}$ د(س) شريطة وجود النهاية فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند س= أ

مثال (٢٥) أعد تعريف الدالة د(س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ لتكون متصلة على ح ؟

الحل ١- نجد أصفار المقام س − ٢ = ٠ $\Leftarrow$ س = ٢ لكن د(٢) لا يمكن إيجادها لذا نجد

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢}\ \text{د(س)} = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢}\ \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٢)} = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢}\ \text{س} + ٢ = ٢ + ٢ = ٤$$

بما أن النهاية عند س=٢ موجودة وتساوي ٤ و د(٢) غير معرفة نعيد تعريف الدالة على النحو التالي

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{س} \neq ٣ \\ ٤ & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

الان تصبح د(س) متصلة على ح

مثال (٢٦) إذا كان دخل أفراد أسرة يزداد وفقا للعلاقة الاتية د(س) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}١ - ٧٢}{٢\text{س} - ٣٦}$ ، س>٠ و د(س) عدد أفراد الاسرة بعد س من السنوات أعد تعريف الدالة لتكون متصلة على ح ؟

الحل ١- نجد أصفار المقام ٢س − ٣٦ = ٠ $\Leftarrow$ ٢س = ٣٦ $\Leftarrow$ س = ١٨

٢- نجد د(١٨) $= \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}١ - ٧٢}{٢\text{س} - ٣٦} = \frac{١٨^{٢} - ١٤ \times ١٨ - ٧٢}{٢ \times ١٨ - ٣٦} = \frac{٠}{٠}$ وهي قيمة غير معرفة

لذلك نجد $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ١٨}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}١ - ٧٢}{٢\text{س} - ٣٦} = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢}\ \frac{(\text{س} - ١٨)(\text{س} + ٤)}{٢(\text{س} - ١٨)} = \frac{١٨ + ٤}{٢} = \frac{٢٢}{٢} = ١١$ وبالتالي فإن

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}١ - ٧٢}{٢\text{س} - ٣٦} & \text{س} \neq ١٨ \\ ١١ & \text{س} = ١٨ \end{cases}$$

س > ٠ حيث س عدد أفراد الاسرة تصبح د(س) متصلة على ح

بعض الأسئلة تكون على النحو التالي :-

مثال (٢٧) إذا كانت د(س) $= \frac{٧\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{٥\text{س}^{٢} - \text{أس} + ٤}$ متصلة على ح فما قيمة أ ؟

الحل لاحظ لحل هذه المسألة لابد أن يكون المقام ليس له أصفار لتكون د(س) متصلة على ح يعني أن لا يكون للمقام أصفار أي أن يكون مميز المعادلة التربيعية > صفر

∴ فقانون المميز هو ب^{٢} − ٤أجـ حيث ب معامل س ، أ معامل س^{٢} ، جـ الثابت

(−أ)^{٢} − ٤ × ٥ × ٤ < ٠ ⟸ أ^{٢} − ٨٠ < ٠ ⟸ أ^{٢} < ٨٠ بالتحويل الي معادلة أ^{٢} = ٨٠ ⟸ أ = ∓ $\sqrt{٨٠}$

|أ| < $\sqrt{٨٠}$ وحتي نحل المتباينة −$\sqrt{٨٠}$ < أ < $\sqrt{٨٠}$

أي أن أ ∋]−$\sqrt{٨٠}$ ، $\sqrt{٨٠}$[وحتي تكون الدالة متصلة علي ح بمعني خارج هذه الفترة يكون للمقام أصفار أي يكون لـ د(س) نقاط انفصال

مثال (٢٨) إذا كانت د(س) = $\dfrac{٣س − ٧}{س^{٢} − أس + ٤}$ فأوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة على ح ؟

الحل لابد أن يكون مميز المقام < صفر

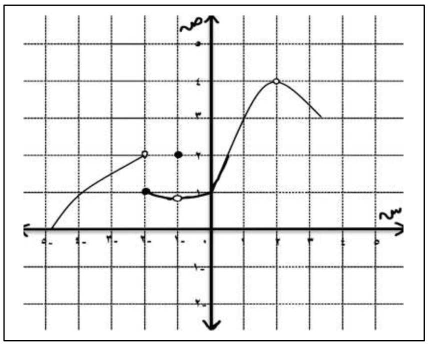
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ ⟸ حيث ب معامل س ، أ معامل س^{٢} ، جـ الثابت

(−أ)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ < ٠

أ^{٢} − ١٦ < ٠ ⟸ أ^{٢} < ١٦ ⟸ |أ| < ٤ ⟸ −٤ < أ < ٤

أي أن قيم أ التي تجعل دالة المقام ليس لها أصفار هي أ ∋]−٤ ، ٤[وخارج هذه الفترة تكون لـ د(س) نقاط انفصال

مثال (٢٩) من الرسم المجاور أوجد قيم س التي يكون عندها د(س) غير متصلة مع ذكر السبب ؟



الحل من الرسم نقاط الانفصال هي س ∋{-٢ ، -١ ، ٢}

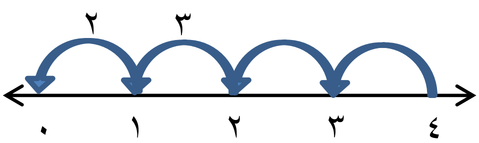
والسبب عند س= -٢ النهاية غير موجودة

وعند س = -١ د(-١) ≠ $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

وعند س=٢ د(٢) غير معرفة

مثال (٣٠) ابحث اتصال د(س) = $\begin{cases} س^{٢} − س + ٣ & ٠ < س < ١ \\ [س − ٣] & ١ \leq س < ٢ \\ س − ٥ & ٢ < س \end{cases}$ على مجالها ؟

الحل لاحظ أن [س − ٣] = $\begin{cases} ٢ ⟸ ٠ \leq س < ١ \\ ٣ ⟸ ١ \leq س < ٢ \end{cases}$ يكفي ونستبدل [س − ٣] بالشعبة المقابلة لها



د(س) = { س² − س + ٣ ، ٠ < س < ١
  ٣ ، ١ ≤ س < ٢
  س − ٥ ، ٢ < س

أولا نبحث الاتصال في الفترة] ٠ ، ١[وهي دالة كثيرة حدود(حدودية) متصلة علي الفترة] ٠ ، ١[

ثانياً نبحث الاتصال في الفترة]٢،١[وهي دالة ثابتة متصلة

ثالثاً نبحث الاتصال في الفترة]٢، ∞[وهي دالة خطية متصلة علي الفترة] ٢ ، ∞ [

نبحث الاتصال عند س=١   ١ - د(١) = ٣

٢- نهـا (س←١⁺) د(س) = ٣ ، نهـا (س←١⁻) د(س) = ٣   ∵ د(١) = نهـا (س←١) د(س) = ٣

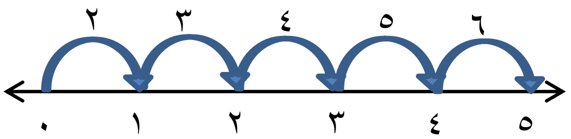
⇐ ∴ الدالة د(س) متصلة عند س=١

نبحث الاتصال عند س=٢   ١ - د(٢) غير موجودة ⇐ ∴ الدالة د(س) غير متصلة عند س=٢

نبحث الاتصال عند س=٠   ١ - د(٠) غير موجودة ⇐ ∴ الدالة د(س) غير متصلة عند س=٢

مثال (٣١) ابحث اتصال د(س) = { س² − س + ٣ ، ٠ < س < ١
  [س − ٣] ، ١ ≤ س < ٤
  |س − ٥| ، ٤ ≤ س
على مجالها ؟

الحل لاحظ أن [س − ٣] = { ٢ ⇐ ٠ < س < ١
  ٣ ⇐ ١ ≤ س < ٢
  ٤ ⇐ ٢ ≤ س < ٣
  ٥ ⇐ ٣ ≤ س < ٤
  ٦ ⇐ ٤ ≤ س < ٥



يكفي ونستبدل [س − ٣] بالشعبة المقابلة لها

والدالة المطلقة ستكون |س − ٥| = { س − ٥ ⇐ س ≥ ٥
  ٥ − س ⇐ س < ٥
لكن في د(س) |س − ٥| س ≥ ٤ اذن ندخل الـ٤ في

الفترة فيصبح |س − ٥| = { س − ٥ ⇐ ٤ ≤ س < ٥
  ٥ − س ⇐ س ≤ ٥
وعليه يكون د(س) بشكل جديد على النحو التالي

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ - س + ٣ & \Leftarrow ٠ < س < ١ \\ ٣ & \Leftarrow ١ \le س < ٢ \\ ٤ & \Leftarrow ٢ \le س < ٣ \\ ٥ & \Leftarrow ٣ \le س < ٤ \\ ٥ - س & \Leftarrow ٤ \le س < ٥ \\ س - ٥ & \Leftarrow س \ge ٥ \end{cases}$$

والان نبحث الاتصال في الفترة اتصال الدالة د(س) عند نقاط التشعيب س = ١، ٥، ٤، ٣، ٢ والفترات والاطراف كما في المثال السابق

فتبين ان د(س) غير متصلة عند س=٢ ، س=٣ ، س=٤

مثال (٣٢) أوجد قيمة ب التي تجعل د(س) متصلة على مجالها

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ب^٢}{س - ب} & س \ne ب \\ ٠ & س = ب \end{cases}$$

الحل حتى تكون د(س) متصلة عند س= ب يجب تحقق الشرط التالي

$$د(ب) = \lim_{س \to ب} د(س) = \lim_{س \to ب} \frac{س^٢ - ب^٢}{س - ب} = \lim_{س \to ب} \frac{(س - ب)(س + ب)}{س - ب} = \lim_{س \to ب} س + ب = ب + ب = ٠ \Leftarrow ب = ٠$$

مثال (٣٣) أوجد قيمة ر التي تجعل د(س) متصلة على مجالها

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & س \ne ٣ \\ ر & س = ٣ \end{cases}$$

الحل حتى تكون د(س) متصلة على مجالها يجب أن تكون متصلة عند س=٣ وهذا يعني أن

$$د(٣) = \lim_{س \to ٣} د(س) \qquad ر = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} \Leftarrow ر = \lim_{س \to ٣} س - ٣ \Leftarrow ر = ٦$$

مثال (٣٤) ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & س < ١ \\ س + ٦ & س < ٥ \end{cases}$$

على مجالها ؟

الحل لاحظ أن يكفي ونستبدل [س – ٣] بالشعبة المقابلة لها

أولا نبحث الاتصال في الفترة]٥، ∞[وهي دالة كثيرة حدود(حدودية) متصلة علي الفترة]٥، ∞[

ثانياً نبحث الاتصال في الفترة]-∞، ٥[وهي دالة كثيرة حدود(حدودية) متصلة علي الفترة]-∞، ٥[

ثالثاً عند س=٥ ⇐ د(٥) غير معرفة ⇐ غير متصلة عند س=٥

⇐ ∴ الدالة د(س) متصلة على ح - { ٥ }

مثال (٣٥) ادرس اتصال الدالة $د(س) = \frac{س^٣ + ٥س^٢ - ١}{س^٢ - ٤}$ على الفترة]٠،١[؟

الحل

أولا البسط :- دالة كثيرة حدود(حدودية) متصلة علي الفترة]٠،١[

ثانياً المقام :- نجد أصفاره $س^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = ٢، -٢$

ولكن ٢، -٢ $\not\ni$]٠،١[أي أن ٢، -٢ لا تسبب انفصال علي الفترة]٠،١[

وعلية فإن الدالة $د(س) = \frac{س^٣ + ٥س^٢ - ١}{س^٢ - ٤}$ $\Leftarrow$ ∴ الدالة د(س) متصلة على الفترة [٠،١]

مثال (٣٦) ابحث اتصال الدالة $هـ(س) = \frac{١}{س^٢ - ٩}$ على مجالها ؟

الحل

أولا البسط :- دالة ثابتة متصلة علي الفترة ح

ثانياً المقام :- نجد أصفاره $س^٢ - ٩ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣$

أي أن الدالة $هـ(س) = \frac{١}{س^٢ - ٩}$ غير متصلة عند س=٣، -٣

$\Leftarrow$ ∴ الدالة د(س) متصلة على ح - {٣، -٣}

مثال (٣٧) اوجد قيمة م ، ك التي تجعل $د(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ١ & س < ٠ \\ مس + ك & ٠ \leqslant س \leqslant ١ \\ \sqrt{س + ٨} & ١ < س \end{cases}$ متصلة على مجالها ؟

الحل بما أن الدالة د(س) متصلة على مجالها فهذا يعنى

-١ $\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \lim_{س \to ٠^-} د(س) \Leftarrow م \times ٠ + ك = ٣ \times ٠ - ١ \Leftarrow \boxed{ك = -١}$

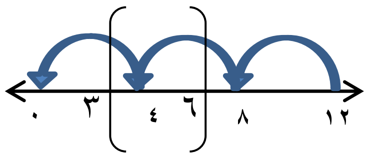
-٢ $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^-} د(س) \Leftarrow \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س + ٨} = \lim_{س \to ١^-} مس + ك \Leftarrow \sqrt{٩} = م + ك$

$\Leftarrow ٣ = م - ١ \Leftarrow ٣ + ١ = م \Leftarrow \boxed{م = ٤}$

مثال (٣٨) ابحث اتصال الدالة
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}+1} & 0 \leq \text{س} < 3 \\ \left[\frac{\text{س}}{4}+2\right] & 3 \leq \text{س} < 6 \\ |\text{س}-9| & \text{س}=6 \end{cases}$$
على الفترة س ∈ [٠،٦]؟

الحل ١-بالنسبة للدالة $\left[\frac{\text{س}}{4}+2\right]$ نعيد تعريفها لنعرف أي الفترات سيتم تضمينها في د(س) فيتم تشعيب الدالة $\left[\frac{\text{س}}{4}+2\right]$ حسب ما يلي :-

نوجد طول الفترة الجزئية ل $= \frac{1}{|\text{أ}|} = \frac{1}{|\frac{1}{4}|} = 4$ ∴ طول الفترة الجزئية = ٤



$\frac{1}{4}\text{س}+2=0 \Leftarrow \frac{1}{4}\text{س}=-2 \Leftarrow \boxed{\text{س}=-2}$

$$\left[\frac{1}{4}\text{س}+2\right] = \begin{cases} 2 \Leftarrow 3 \leq \text{س} < 4 \\ 3 \Leftarrow 4 \leq \text{س} < 6 \end{cases}$$

٢-أما بالنسبة للدالة $|9-\text{س}| = \begin{cases} 9-\text{س} \Leftarrow \text{س} \leq 9 \\ \text{س}-9 \Leftarrow \text{س} > 9 \end{cases}$ فنستبدلها بـ$9-\text{س}$ لان س = ٦ < ٩

وعليه :- $$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}+1} \Leftarrow 0 \leq \text{س} < 3 \\ 2 \Leftarrow 3 \leq \text{س} < 4 \\ 3 \Leftarrow 4 \leq \text{س} < 6 \\ 9-\text{س} \Leftarrow \text{س}=6 \end{cases}$$

الفترة]٠،٣[متصلة لأن ما بداخل الجذر متصل وموجب ، الفترة]٣،٤[متصلة لأن الدالة ثابتة

الفترة]٤،٦[متصلة لأن الدالة ثابتة

<u>وعند نقاط التحول</u> س=٣ ⟸ د(٣) = ٢ ، $\lim_{\text{س}\to 3}\text{د}(\text{س}) = 2$ ⟸ متصل عند س=٣

س=٤ ⟸ د(٤) = ٣ ، $\lim_{\text{س}\to 4^{+}}\text{د}(\text{س}) = 3$ ، $\lim_{\text{س}\to 4^{-}}\text{د}(\text{س}) = 2$ ⟸ د(س) غير متصلة عند س=٤

س=٦ ⟸ $\text{د}(6) = 9-6 = 3$ ، $\lim_{\text{س}\to 6^{-}}\text{د}(\text{س}) = 3$ ⟸ ∴ د(س) متصلة عند س=٦ من اليسار

ومن اليمين غير مهم خارج الفترة

وعليه فإن د(س) متصلة على [٠،٦] − {٤}