إجابات تمارين الوحدة السادسة التكامل

موقع المناهج ⇦ المناهج العمانية ⇦ الصف الثاني عشر ⇦ رياضيات متقدمة ⇦ الفصل الثاني ⇦ الملف

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 13-02-2024 16:10:26

إجابات تمارين كتاب الطالب - الوحدة السادسة: التكامل

إجابات معرفة قبلية

١) أ -١٩ ب -١

٢) أ $\text{س} = -\frac{٢}{٣}$، $\text{س} = ٥$ ب $\text{س} = ٠$، $\text{س} = ٩$

٣) أ $٢٤\text{س}^{٢} - ١٢$ ب $١٠\text{س} - ٤ + \frac{٥}{\sqrt{\text{س}}}$

تمارين ٦-١

١) أ $\text{ص} = ٥\text{س}^{٣} + \text{جـ}$ ب $\text{ص} = ٢\text{س}^{٧} + \text{جـ}$

ج $\text{ص} = ٣\text{س}^{٤} + \text{جـ}$ د $\text{ص} = -\frac{٣}{\text{س}} + \text{جـ}$

هـ $\text{ص} = \frac{-١}{٤\text{س}^{٤}} + \text{جـ}$ و $\text{ص} = ٨\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) أ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - \frac{\text{س}^{٤}}{٢} + ٢\text{س} + \text{جـ}$

ب $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٦}}{٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} + \text{جـ}$

ج $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٢}} - \frac{٨}{\text{س}} + \text{جـ}$

د $\text{د}(\text{س}) = -\frac{٣}{٢\text{س}^{٦}} + \frac{٣}{\text{س}} - ٤\text{س} + \text{جـ}$

٣) أ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

ب $\text{ص} = \frac{٣\text{س}^{٤}}{٢} + \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

ج $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٢\text{س}^{٣} - ٨\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

د $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{٥}{٤\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$

هـ $\text{ص} = \frac{٢\text{س}^{\frac{٧}{٢}}}{٧} - \frac{١٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ٦\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

و $\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) أ $٢\text{س}^{٦} + \text{جـ}$ ب $٥\text{س}^{٤} + \text{جـ}$

ج $-\frac{٣}{\text{س}} + \text{جـ}$ د $-\frac{٢}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

هـ $\frac{٤\sqrt{\text{س}}}{٣} + \text{جـ}$ و $-\frac{١٠}{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

٥) أ $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٤\text{س} + \text{جـ}$

ب $\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{جـ}$

ج $-\frac{٨\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{جـ}$

د $\frac{٣\text{س}^{\frac{١٠}{٣}}}{١٠} + \frac{٣\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + \text{جـ}$

هـ $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{١}{٢\text{س}} + \text{جـ}$

و $\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{٢\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

ز $\frac{\text{س}^{٢}}{٦} + \frac{٤\sqrt{\text{س}}}{٣} + \text{جـ}$

ح $\frac{٢\text{س}^{\frac{٧}{٢}}}{٧} + \frac{٢٠}{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

ط $٢\text{س}^{٢} + \frac{١٢}{\text{س}} - \frac{٩}{٤\text{س}^{٤}} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٢

١) أ $\frac{١}{١٨}(٣\text{س} - ٧)^{٦} + \text{جـ}$

ب $\frac{١}{١٨}(٣\text{س} + ١)^{٦} + \text{جـ}$

ج $\frac{٢}{٤٥}(٥\text{س} - ٣)^{٩} + \text{جـ}$

د $-\frac{١}{٤}(١ - ٢\text{س})^{٢} + \text{جـ}$

هـ $-\frac{٣}{١٦}(٥ - ٤\text{س})^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

و $\frac{١}{٥}(٢\text{س} + ١)^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$

ز $\frac{٤}{٣}\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \text{جـ}$

ح $-\frac{2}{(2\text{س} + 1)^{2}} + \text{جـ}$

ط $\frac{5}{32(7 - 2\text{س})^{4}} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٣

١) أ $8\text{س}(\text{س}^{2} + 2)^{3}$ ب $\frac{1}{8}(\text{س}^{2} + 2)^{4} + \text{جـ}$

٢) أ $20\text{س}(2\text{س}^{2} - 1)^{4}$ ب $\frac{1}{20}(2\text{س}^{2} - 1)^{5} + \text{جـ}$

٣) أ $\text{ك} = -2$ ب $-\frac{2}{\text{س}^{2} - 5} + \text{جـ}$

٤) أ $\frac{6\text{س}}{(4 - 3\text{س}^{2})^{2}}$

ب $\frac{1}{8 - 6\text{س}^{2}} + \text{جـ}$

٥) أ $6(2\text{س} - 3)(\text{س}^{2} - 3\text{س} + 5)^{2}$

ب $\frac{(\text{س}^{2} - 3\text{س} + 5)^{3}}{3} + \text{جـ}$

٦) أ $\frac{4(\sqrt{\text{س}} + 3)^{7}}{\sqrt{\text{س}}}$

ب $\frac{1}{4}(\sqrt{\text{س}} + 3)^{8} + \text{جـ}$

٧) أ $15\sqrt{\text{س}}(2\text{س}\sqrt{\text{س}} - 1)^{4}$

ب $\frac{1}{5}(2\text{س}\sqrt{\text{س}} - 1)^{5} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٤

١) أ $\text{ص} = \text{س}^{3} + \text{س} + 2$ ب $\text{ص} = 2\text{س}^{3} - \text{س}^{2} + 5$

ج $\text{ص} = 10 - \frac{4}{\text{س}}$ د $\text{ص} = \text{س}^{2} + \frac{6}{\text{س}} - 4$

هـ $\text{ص} = 4\sqrt{\text{س}} - \text{س} + 2$

و $\text{ص} = 2\sqrt{\text{س}} - 2\text{س} + \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - 1$

٢) $\text{ص} = \frac{3}{\text{س}} + 2$

٣) $\text{ص} = 2\text{س}^{3} - 6\text{س}^{2} + 5\text{س} - 4$

٤) $\text{ص} = 5\text{س}^{2} + \frac{3}{\text{س}^{2}} - 2$

٥) أ $\text{ص} = 2\text{س}^{2}\sqrt{\text{س}} + 2\text{س} - 1$

ب $\text{ص} = 24\text{س} - 97$

٦) $\text{ص} = 2\text{س}^{2} + 3\text{س} - 7$

٧) $\text{د}(\text{س}) = 4 + 8\text{س} - \text{س}^{2}$

٨) $\text{ص} = \text{س}^{3} + \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 10\text{س} + 3$

٩) $\text{ص} = 2\text{س}^{3} + 6\text{س}^{2} + 10\text{س} + 4$

١٠) $\text{ص} = 2 + 4\text{س} - 2\text{س}^{2} - \text{س}^{3}$

١١) أ $\text{ك} = -6$

ب $\text{ص} = \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 6\text{س} + 2$

١٢) $\text{د}'(\text{س}) = 2\text{س} - \frac{2}{\text{س}^{2}}$، $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{2} + \frac{2}{\text{س}} - 4$

١٣) $(-11،\ 408\frac{1}{2})$

١٤) $\text{ص} = 9 + 3\text{س} - \text{س}^{2}$

١٥) $\text{ص} = 2\text{س}\sqrt{\text{س}} - 6\text{س} + 10$

١٦) $(1،\ 7)$، نقطة عظمى.

١٧) أ $\text{ص} = \text{س}^{2} - 5\text{س} + 2$

ب $\text{س} + \text{ص} = -1$

ج ن $(1،\ -2)$

١٨) أ $\text{ص} = \frac{1}{8}(2\text{س} - 1)^{4} + 2$

ب) $\text{ص} = \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} - ٧$

ج) $\text{ص} = ٢\sqrt{\text{س} - ٢} + ٥$ د) $\text{ص} = \frac{٢}{٣ - ٢\text{س}} + ٦$

١٩) $\text{ص} = ٣(\text{س} - ٥)^{٤} - ١$

٢٠) أ) $\text{س} + ٥\text{ص} = ٧$

ب) $\text{ص} = ٥\sqrt{٢\text{س} - ٣} - ٤$

٢١) أ) لأن $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٠$ عند س = ١، نقطة عظمى.

ب) $\text{ص} = ٨\sqrt{٣\text{س} + ١} - ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٥$

٢٢) $\text{ص} = ٤\sqrt{٢\text{س} - ٥} - ٢$

تمارين ٦-٥

١) أ) ٧ ب) $\frac{١٦}{٩}$

ج) −٦ د) ٢١

هـ) ٩ و) $\frac{٥}{٢}$

٢) أ) $\frac{١١}{٢}$ ب) ٣

ج) $\frac{١٠٧}{٦}$ د) $\frac{٤}{١٥}$

هـ) $\frac{٣٧}{٨}$ و) ١٨

٣) أ) ١٠ ب) $\frac{٢٦}{٣}$

ج) $\frac{٢}{٥}$ د) ٤

هـ) ٢ و) ٨

٤) أ) $-\frac{٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٥)^{٢}}$ ب) $\frac{٤}{٤٥}$

٥) أ) $١٥\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢)^{٤}$

ب) $٢\frac{١}{١٥}$

٦) أ) $\frac{(\sqrt{\text{س}} + ١)^{٤}}{٤\sqrt{\text{س}}}$

ب) $٨٤\frac{٢}{٥}$

تمارين ٦-٦

١) أ) $٢١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة. ب) ٨ وحدة مربعة.

ج) $٢٠\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة. د) $٥\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٢) برهان.

٣) أ) $١١\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة. ب) $٤٠\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

ج) $٤\frac{٣}{٣٢}$ وحدة مربعة. د) $٢١\frac{١}{١٢}$ وحدة مربعة.

٤) أ) $٤٨\frac{٣}{٤}$ وحدة مربعة. ب) ٦ وحدة مربعة.

٥) $٢\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٦) أ) ٩ وحدة مربعة. ب) ل = ١٫٦

٧) أ) برهان.

ب) $٣ - \sqrt{٥}$ وحدة مربعة.

٨) $١٨\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) أ) ل (−١، ٠) ب) ٩٠ وحدة مربعة.

١٠) $١٠\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

١١) ٣٤ وحدة مربعة.

١٢) ٣٦ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٧

١) $٢٦\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٢) $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٣) $٥٧\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

٤) أ ٣٦ وحدة مربعة.

ب $١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

ج ٣٦ وحدة مربعة.

٥) $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

٦) $١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) أ ص = $\frac{١}{٢}$س + ٢

ب $\frac{١}{٢}(٢\sqrt{٣} - ٣)$ وحدة مربعة.

٨) أ ص = −٢س + ٤٦

ب ٦٤ وحدة مربعة.

٩) أ ص = −٨س + ١٦

ب ١٠٨ وحدة مربعة.

١٠) أ ٢ص = س − ١

ب ٨٫٨٣ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٨

١) أ $\frac{٧١\pi}{٥}$ وحدة مكعبة. ب $\frac{١٦\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

ج $\frac{١٥\pi}{٨}$ وحدة مكعبة. د $\frac{٢٥\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٢) أ $\frac{٨١\pi}{٢}$ وحدة مكعبة. ب $\frac{١٢٤\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

٣) أ = ٦

٤) $\frac{٣٩\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٥) أ ٢٤π وحدة مكعبة. ب ٢٤π وحدة مكعبة.

٦) $\frac{٣٢\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٧) أ ل (٠٫٢٥ ، ٠) ب $\frac{٢١٢٥\pi}{٦}$ وحدة مكعبة.

٨) أ ل (٠ ، ٣) ب ١٦π وحدة مكعبة.

٩) برهان.

١٠) أ $\frac{٥٢\pi}{٣}$ وحدة مكعبة. ب $\frac{١٢٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١١) أ $\frac{١٨٨٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة. ب ١٧١π سم^٢.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) د(س) = ٣س^{٤} + ٥س^{٢} − ٧

٢) $\frac{٢٥}{٣}$س^{٣} − ٢٠س − $\frac{٤}{س}$ + جـ

٣) ص = ٣٠ − $\frac{٦}{س}$ − $\frac{٥}{٢}$س^{٢}

٤) د(س) = ٦$\sqrt{س + ٢}$ + $\frac{٤}{س^{٢}}$ − ١٠

٥) $\frac{١٩٤\pi}{٩}$ وحدة مكعبة.

٦) أ س = ١

ب د(س) = ٣س^{٢} − ٦س + ٨

٧) ١٠$\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٨) $\frac{٤٨٢\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٩) أ برهان ب $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

١٠) أ ب (٠، ١)، جـ (٤، ٣)

ب ص = −٣س + ١٥

جـ $\frac{٢\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

١١) أ برهان ب ١ وحدة مربعة.

جـ $\frac{٥\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١٢) أ س = $\frac{١}{٩}$ ، س = ٩

ب د″(س) = $\frac{٣}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٣}{٢}$س$^{-\frac{٣}{٢}}$

عند س = $\frac{١}{٩}$ قيمة عظمى.

عند س = ٩ قيمة صغرى.

جـ د(س) = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠س + ٥

١٣) أ ب $\left(٤، \frac{٢٠}{٣}\right)$

ب ل، ن لهما المساحة نفسها.

وهي $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

١٤) أ ص = −٢٤س + ٢٠ ب $\frac{٩}{٨}$ وحدة مربعة.

إجابات تمارين كتاب النشاط - الوحدة السادسة: التكامل

حلول أسئلة البرهان في كتاب النشاط غير متوفرة.

تمارين ٦-١

١) أ س^{٤} + جـ ب س^{٦} + جـ

جـ س^{٣} + جـ د س^{٢} + س^{٥} + جـ

هـ س^{١٠} − س^{٨} − س + جـ

و −س^{٧} + س^{٣} + س + جـ

٢) أ ١) ٥س + جـ ٢) $\frac{٣}{٤}$س$^{\frac{٤}{٣}}$ + جـ

ب ١) ٣س$^{\frac{٥}{٣}}$ + جـ ٢) ٨س$^{\frac{٧}{٤}}$ + جـ

جـ ١) س$^{\frac{٥}{٤}}$ + جـ ٢) −س$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

د ١) −$\frac{س^{\frac{٧}{٢}}}{٢}$ + جـ ٢) $\frac{٢س^{\frac{٧}{٥}}}{٣}$ + جـ

هـ ١) $\frac{٥}{٢}$س^{٢} − ٢س$^{\frac{٧}{٢}}$ + جـ

٢) ٦س + $\frac{س^{٢}}{٦}$ − ٨س$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

و ١) −س$^{-١}$ + جـ

٢) −$\frac{١}{٢}$س$^{-٢}$ + جـ

ز ١) $\frac{٣}{٢}$س$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ

٢) $\frac{٤}{٣}$س$^{\frac{٣}{٤}}$ + جـ

ح ١) −١٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

٢) ١٠س$^{-\frac{١}{٢}}$ + جـ

ط ١) ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + $\frac{٢س^{-٥}}{٥}$ + جـ

٢) −$\frac{٣س^{-٤}}{٤}$ + $\frac{٤٢س^{\frac{٥}{٦}}}{٥}$ + جـ

٣) د(س) = $\frac{١}{٨}$س^{٤} + ٩س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٢س + جـ

٤) أ ١) $\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{٥}{٢}\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\frac{٣}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

ب ١) $٢\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \frac{٨}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٢) $\frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٩}{٤}\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

ج ١) $\frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٢\text{س}^{٢} + \frac{٨}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + \text{جـ}$

٢) $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} - \frac{٤}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٢}} + \text{جـ}$

د ١) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}^{-١} - ٢\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٣}\text{س}^{-٣} + \text{جـ}$

٥) أ ١) $-٧\text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢} + \text{جـ}$

٢) $-\frac{١}{٤}\text{س}^{-٢} - \frac{٥}{٤}\text{س}^{-١} + \text{جـ}$

ب ١) $-٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣\text{س}^{-١} + \text{جـ}$

٢) $\frac{٢}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٤\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٦) أ $\text{أ} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ب} = -٢$ ب $\frac{١}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

٧) $\int \left(١٢\sqrt{\text{س}} - \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{ء}\text{س} = \int \left(١٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٤\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\right) \text{ء}\text{س}$

$= \left(\frac{٢}{٣}\right) \times ١٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (٢) \times ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$= ٨\text{س} \times \sqrt{\text{س}} - ٨\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

$= ٨\sqrt{\text{س}}(\text{س} - ١) + \text{جـ}$

٨) $\frac{١}{١٢}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٤\text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٢

١) أ ١) $(\text{س} + ٣)^{٤} + \text{جـ}$ ٢) $\frac{١}{٦}(\text{س} - ٢)^{٦} + \text{جـ}$

ب ١) $\frac{١}{٣٢}(٤\text{س} - ٥)^{٨} + \text{جـ}$

٢) $٢\left(\frac{١}{٨}\text{س} + ١\right)^{٤} + \text{جـ}$

ج ١) $-\frac{٨}{٧}\left(٣ - \frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٧} + \text{جـ}$

٢) $-\frac{١}{٩}(٤ - \text{س})^{٩} + \text{جـ}$

د ١) $\frac{١}{٣}(٢\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٢) $-\frac{٤}{٥}(٢ - ٥\text{س})^{\frac{٧}{٤}} + \text{جـ}$

هـ ١) $٤\left(٢ + \frac{\text{س}}{٣}\right)^{\frac{٣}{٤}} + \text{جـ}$ ٢) $٢(٤ - ٣\text{س})^{-١} + \text{جـ}$

٢) أ $\frac{١}{١٤}(٢\text{س} + ١)^{٧} + \text{جـ}$

ب $\frac{١}{١٥}(٣\text{س} - ٥)^{٥} + \text{جـ}$

ج $-\frac{١}{٢٨}(١ - ٧\text{س})^{٤} + \text{جـ}$

د $\frac{٢}{١١}\left(\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right)^{١١} + \text{جـ}$

هـ $-\frac{١}{١٠}(٥\text{س} + ٢)^{-٢} + \text{جـ}$

و $\frac{٢}{٣}(١ - ٣\text{س})^{-١} + \text{جـ}$

ز $-\frac{١}{٤}(\text{س} + ١)^{-١} + \text{جـ}$

ح $-\frac{١}{٨}(٤\text{س} + ١)^{-٢} + \text{جـ}$

ط $\frac{١}{١٥}(١٠\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

ي $\sqrt{٢\text{س} - ١} + \text{جـ}$

ك $\frac{٦}{٥}\left(\frac{١}{٢}\text{س} + ٢\right)^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$

ل $\frac{١٦}{٩}(٢ + ٦\text{س})^{\frac{٣}{٤}} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٣

١) أ $١٠س(س^٢ + ٣)^٤$ ب $\frac{١}{٥}(س^٢ + ٣)^٥ + جـ$

٢) أ $-٣٠س(٢ - ٣س^٢)^٤$ ب $-\frac{١}{٣٠}(٢ - ٣س^٢)^٥ + جـ$

٣) أ $ك = -٦$ ب $\frac{٢}{٣ - ٩س^٢} + جـ$

٤) أ $\frac{١٢س}{(١ - ٢س^٢)^٤}$ ب $\frac{١}{٤(١ - ٢س^٢)^٣} + جـ$

٥) أ $٨س(س^٢ - ٤)^٣$ ب $\frac{١}{٢}(س^٢ - ٤)^٤ + جـ$

٦) أ $\frac{٥(\sqrt{س} + ١)^٤}{٢\sqrt{س}}$ ب $\frac{٢}{٥}(\sqrt{س} + ١)^٥ + جـ$

تمارين ٦-٤

١) أ ١) $ص = \frac{س^٢}{٢} + ٥$ ٢) $ص = ٢س^٣ + ٥$

ب ١) $ص = \frac{-١}{س}$ ٢) $ص = -\frac{١}{س} + ٤$

ج ١) $ص = \frac{٣}{٢}س^٢ - ٥س + ١٠$

٢) $ص = ٣س - \frac{١}{٢}س^٤ + \frac{٥}{٢}$

د ١) $ص = ٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٥٦$ ٢) $ص = ٢\sqrt{س} + ٤$

٢) $ص = \frac{س^٢}{٢} + \frac{١}{س} + \frac{٣}{٢}$

٣) $د(س) = \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{١٤}{٣}$

٤) $\frac{١٤٩}{٣}$

٥) $ص = ٢س^٢ - ١٦$

٦) أ $س = -٢$

ب قم بإيجاد التكامل لدالة ميل المماس بالنسبة س، ثم عوّض س = ٠، ص = ٢ لإيجاد قيمة جـ. عوّض س = −٢ في معادلة المنحنى لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة العظمى، وتحقق أنه يساوي $٧\frac{١}{٣}$.

٧) $ص = \frac{١}{س} + \frac{٥}{٢}$

٨) أ ١١٨ سم (مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

ب ٢٧

٩) ١٩٢

١٠) أ $ص = \frac{(س - ٢)^٤}{٤} + \frac{١٥}{٤}$

ب $ص = -\frac{٢}{٣}(٤ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٢}{٣}$

ج $ص = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢س - ٥} + \frac{١}{٣}$

د $ص = \frac{١}{٢(١ - ٢س)^٢}$

١١) $ص = (٢س - ١)^٣ + ٤$

١٢) أ $ك = ٢$ ب $ص = -\frac{س}{٢} - \frac{٣}{٢}$

١٣) $ص = ٤س^{\frac{٣}{٢}} - ٤س^{\frac{١}{٢}} + ٧$

١٤) ١٠٠ دقيقة

١٥) $ص = س^٣ - ٢س^٢ - س + ٨$

تمارين ٦-٥

١) أ ١) ٣٢٠ ٢) ٤٢٠,٢

ب ١) ٠ ٢) ٣٦

ج ١) ٤٦ ٢) ٤٨

د ١) ٢٨,٥ ٢) $\frac{٣٣}{٢}$

هـ ١) $\frac{٧٦}{٣}$ ٢) ٠

و ١) ٣٦ ٢) ٣

ز ١) $\frac{٥}{٢}$ ٢) $-\frac{٢٦}{٣}$

٢) أ ١٤٤ ب $١\frac{١}{٢}$

ج ٢٠ د $٦\frac{٣}{٤}$

هـ ١٦ و ٣

٣) $-٦٠ + ٢٨\sqrt{٢}$

٤) أ = ٢، ب = ١٠

٥) $٢ك + \frac{١}{ك} - ٢$

٦) $٨ - أ^{٤} - أ^{٢}$

٧) أ = ١٦

٨) أ ل $= -\frac{١٠}{٣}$ أو ل $= -١$

تمارين ٦-٦

١) أ ١) $\frac{٧}{٣}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{١}{٤}$ وحدة مربعة.

ب ١) $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة.

ج ١) $\frac{١١}{٤}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{٧٩}{٦}$ وحدة مربعة.

٢) أ ١) ٤٥ وحدة مربعة. ٢) $\frac{١٧}{٢}$ وحدة مربعة.

ب ١) $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة.

ج ١) $\frac{٢٤٣}{٢}$ وحدة مربعة. ٢) $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

٣) ك = ٩

٤) أ (٠، ٠)، (ك، ٠) ب ك = ٢

٥) ٦ وحدات مربعة.

٦) $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) أ أوجد مشتقة $(٢س^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٢}}$ بدلالة س.

$\left(\frac{١}{٢}\right)(٤س)(٢س^{٢} + ٣)^{-\frac{١}{٢}}$،

ويساوي $\frac{٢س}{\sqrt{(٢س^{٢} + ٣)}}$، وهو المطلوب.

ب $\sqrt{٣}\left(\sqrt{٧} - ١\right)$ وحدة مربعة.

٨) ٣٨

٩) أ ٦ ب ٦٧

ج غير ممكن. د ٤٥

هـ ١٧ و غير ممكن.

تمارين ٦-٧

١) $\frac{١}{٦}$ ل$\sqrt{ل}$ وحدة مربعة.

٢) $\frac{أ^{٢}}{٤٨}$ وحدة مربعة.

٣) ١٠٨ وحدة مربعة.

٤) ٣٢ وحدة مربعة.

٥) ١٠٨ وحدة مربعة.

٦) $٤٢\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) $٦\frac{٣}{٤}$ وحدة مربعة.

٨) $١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) يتقاطع المنحنيان عندما $٩ - س^{٢} = س^{٢} - ٧$ أي عندما $١٦ = ٢س^{٢}$، فيكون $س = \pm\sqrt{٨}$

$$\therefore \left| \int_{-\sqrt{٨}}^{\sqrt{٨}} \left((٩ - س^{٢}) - (س^{٢} - ٧)\right) ءس \right|$$

$$= \left| \int_{-\sqrt{٨}}^{\sqrt{٨}} (١٦ - ٢س^{٢})\, ءس \right|$$

$$= \left[١٦س - \frac{٢}{٣}س^{٣}\right]_{-\sqrt{٨}}^{\sqrt{٨}}$$

$$= ١٦\sqrt{٨} - \frac{٢}{٣}٨^{\frac{٣}{٢}} - \left(-١٦\sqrt{٨} + \frac{٢}{٣}٨^{\frac{٣}{٢}}\right)$$

$$= ٣٢\sqrt{٢} - \frac{٣٢}{٣}\sqrt{٢} + ٣٢\sqrt{٢} - \frac{٣٢}{٣}\sqrt{٢}$$

$$= \frac{١٢٨\sqrt{٢}}{٣}$$ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٨

(١) أ ٥٠٤π وحدة مكعبة. ب $\frac{٣٤٩٨}{٥}\pi$ وحدة مكعبة.

ج $\frac{١٥}{٢}\pi$ وحدة مكعبة. د $\frac{١٦}{١٥}\pi$ وحدة مكعبة.

(٢) أ ٤π وحدة مكعبة. ب ٩π وحدة مكعبة.

ج ٢٢٥٥π وحدة مكعبة. د $\frac{٣}{١٠}\pi$ وحدة مكعبة.

هـ $\frac{٦٤٨}{٥}\pi$ وحدة مكعبة. و $\frac{٩}{٢}\pi$ وحدة مكعبة.

ز ١٥٦π وحدة مكعبة. ح $\frac{٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة.

(٣) $\frac{٢٨٣}{٣٠}\pi$ وحدة مكعبة.

(٤) $ك = \frac{١}{٣}$

(٥) ٩π وحدة مكعبة.

(٦) $\frac{٦٤}{٥}\pi$ وحدة مكعبة.

(٧) برهان.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

(١) $ص = \frac{٣}{٢}س^{٢} - \frac{٣}{٢}س^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٥٩}{٣}$

(٢) أ $-١٢ + ٨\sqrt{٣}$

ب $١٢ - ٤\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

(٣) أ $أ = \sqrt{٣}$

ب $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

(٤) أ $أ(-ك، ٠)$، $ب(ك، ٠)$، $ج(٠، ك^{٢})$

ب $\frac{١}{٣}ك^{٢}$ وحدة مربعة.

(٥) برهان.

(٦) $٤٢٨\frac{٦}{٧}$ وحدة مربعة.

(٧) أ $م = ٣٦$ وحدة مربعة.

قيمة التكامل هي ١٨

ب $\frac{١٢٩٦}{٥}\pi$ وحدة مكعبة.

ج $\frac{٨١}{٢}\pi$ وحدة مكعبة.

(٨) أ $ص + ٦س = ٨$

ب توجد نقطة تقاطع $ص = ٤س^{٣} - ٤س^{٢} - ١٠س + ١٢$

مع المستقيم $ص = -٦س + ٨$

عندما $س = -١$ يكون الإحداثي الصادي على المنحنى هو: $ص = -٤ - ٤ + ١٠ + ١٢ = ١٤$

عند $س = -١$ يكون الإحداثي الصادي على المماس هو: $ص = ٦ + ٨ = ١٤$

الإحداثيان السيني والصادي متساويان، لذا فإنهما يتقاطعان في النقطة ب.

ج $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة.

(٩) $\frac{١}{١٢}\pi$ وحدة مكعبة.

(١٠) $٣\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

الوحدة السادسة: حلول تمارين كتاب الطالب

التكامل

تمارين ٦-١

١) هـ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\text{س}^{٣}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\text{س}^{-٣}$

إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\text{ن}}$

فإن $\text{ص} = \frac{١}{\text{ن} + ١}\text{س}^{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{١}{-٣ + ١} \times \frac{١}{٢}\text{س}^{-٣+١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = -\frac{١}{٤}\text{س}^{-٢} + \text{جـ}$

$\text{ص} = -\frac{١}{٤\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{\text{ن}}$ فإن $\text{ص} = \frac{١}{\text{ن} + ١}\text{س}^{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} \times ٤\text{س}^{-\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} \times ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٢ \times ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٨\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٨\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

---

٢) د $\text{د}'(\text{س}) = \frac{٩}{\text{س}^{٧}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}} - ٤$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\text{د}'(\text{س}) = ٩\text{س}^{-٧} - ٣\text{س}^{-٢} - ٤\text{س}^{٠}$

إذا كان $\text{د}'(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$، فإن $\text{ص} = \frac{١}{\text{ن} + ١}\text{س}^{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$\text{د}(\text{س}) = -\frac{١}{-٧ + ١} \times ٩\text{س}^{-٧+١} - \left(\frac{١}{-٢ + ١} \times ٣\text{س}^{-٢+١}\right) - \frac{١}{٠ + ١} \times ٤\text{س}^{٠+١} + \text{جـ}$

انتبه للإشارة "−"

$\text{د}(\text{س}) = -\frac{١}{٦} \times ٩\text{س}^{-٦} - (-١ \times ٣\text{س}^{-١}) - ١ \times ٤\text{س}^{١} + \text{جـ}$

$\text{د}(\text{س}) = -\frac{٣}{٢\text{س}^{٦}} + \frac{٣}{\text{س}} - ٤\text{س} + \text{جـ}$

٣) هـ $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س}(س - ٣)^{٢}$

فكّ الأقواس:

$$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س}(س - ٣)(س - ٣)$$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{ءص}{ءس} = \left(س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}}\right)(س - ٣)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = س^{\frac{٥}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = س^{\frac{٥}{٢}} - ٦س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س^{\frac{١}{٢}}$$

إذا كانت $د'(س) = س^{ن}$، فإن $ص = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + جـ$

$$ص = \frac{١}{\frac{٥}{٢} + ١} س^{\frac{٥}{٢}+١} - \frac{١}{\frac{٣}{٢} + ١} \times ٦س^{\frac{٣}{٢}+١} + \frac{١}{\frac{١}{٢} + ١} \times ٩س^{\frac{١}{٢}+١} + جـ$$

$$ص = \frac{١}{\frac{٧}{٢}} س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{١}{\frac{٥}{٢}} \times ٦س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \times ٩س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$ص = \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} - \frac{١٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ٦س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

و $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥س^{٢} + ٣س + ١}{\sqrt{س}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{٥س^{٢}}{س^{\frac{١}{٢}}} + \frac{٣س}{س^{\frac{١}{٢}}} + \frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}}\right)$$

أو $\frac{ءص}{ءس} = ٥س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$

إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = س^{ن}$،

فإن $ص = \frac{١}{ن + ١} س^{ن+١} + جـ$

فيكون $ص = \frac{١}{\frac{٣}{٢} + ١} \times س^{\frac{٣}{٢}+١} + \frac{١}{\frac{١}{٢} + ١} \times ٣س^{\frac{١}{٢}+١} + \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} \times س^{-\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$$ص = \frac{١}{\frac{٥}{٢}} \times ٥س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \times ٣س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) هـ $\int \frac{٢}{٣\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \frac{٢}{٣} \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ءس}$

استخدم $\int \text{ك د(س)} = \text{ك} \int \text{د(س)}$ حيث ك عدد ثابت

$= \frac{٢}{٣} \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ءس}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} \text{س}^{-\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\frac{١}{٢}} \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{٤}{٣} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{٤}{٣}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$ أو $\frac{٤\sqrt{\text{س}}}{٣} + \text{جـ}$

و $\int \frac{٥}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \frac{٥}{\text{س} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}}}\, \text{ءس}$ أو $\int \frac{٥}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}\, \text{ءس}$ أو $\int ٥\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}\, \text{ءس}$

استخدم $\int \text{ك د(س)دس} = \text{ك} \int \text{د(س)}$ حيث ك عدد ثابت:

$= -٥ \times \frac{١}{-\frac{٣}{٢}} \text{س}^{-\frac{٣}{٢}+١} + \text{جـ}$

$= -٥ \times \frac{١}{-\frac{١}{٢} + ١} \text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$= -١٠\text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$= -\frac{١٠}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} + \text{جـ}$

$= -\frac{١٠}{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

٥) هـ $\int \frac{س^٢ - ١}{٢س^٢} ءس$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \left(\frac{س^٢}{٢س^٢} - \frac{١}{٢س^٢}\right) ءس$ أو $\int \left(\frac{١}{٢}س^٠ - \frac{١}{٢}س^{-٢}\right) ءس$

استخدم $\int ك\, د(س) ءس = ك \int د(س) ءس$ حيث ك عدد ثابت:

$= \frac{١}{٠+١} \times \frac{١}{٢}س^{٠+١} - \left(\frac{١}{-٢+١} \times \frac{١}{٢}س^{-٢+١}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢}س^{-١} + جـ$

$= \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢س} + جـ$ أو $\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢س} + جـ$

ط $\int \left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^٢\sqrt{س}}\right)^٢ ءس$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\int \left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^٢\sqrt{س}}\right)\left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^٢\sqrt{س}}\right) ءس$

$\int \left(٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{س^{\frac{٥}{٢}}}\right)\left(٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{س^{\frac{٥}{٢}}}\right) ءس$

$\int \left(٤س - \frac{٦س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٥}{٢}}} - \frac{٦س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٥}{٢}}} + \frac{٩}{س^٥}\right) ءس$

$\int \left(٤س - ٦س^{-٢} - ٦س^{-٢} + ٩س^{-٥}\right) ءس$

$\int \left(٤س - ١٢س^{-٢} + ٩س^{-٥}\right) ءس$

استخدم $\int ك\, د(س) ءس = ك \int د(س) ءس$ حيث ك عدد ثابت:

$\frac{١}{١+١} \times ٤س^{١+١} - \left(\frac{١}{-٢+١} \times ١٢س^{-٢+١}\right) + \left(\frac{١}{-٥+١} \times ٩س^{-٥+١}\right) + جـ$

$= ٢س^٢ + ١٢س^{-١} - \frac{٩}{٤}س^{-٤} + جـ$

$= ٢س^٢ + \frac{١٢}{س} - \frac{٩}{٤س^٤} + جـ$

تمارين ٦-٢

٦) د $\int ٣(١-٢\text{س})^{٥}\,\text{ءس}$

$= ٣\int (١-٢\text{س})^{٥}\,\text{ءس}$

$= ٣\left(\dfrac{١}{-٢(٥+١)}(١-٢\text{س})^{٥+١}\right) + \text{جـ}$

$= -\dfrac{١}{٤}(١-٢\text{س})^{٦} + \text{جـ}$

٧) ز $\int \dfrac{٢}{\sqrt{٣\text{س}-٢}}\,\text{ءس}$

$= ٢\int \dfrac{١}{\sqrt{٣\text{س}-٢}}\,\text{ءس}$

$= ٢\int (٣\text{س}-٢)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \dfrac{٢}{٣\left(-\frac{١}{٢}+١\right)}(٣\text{س}-٢)^{-\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ}$

$= \dfrac{٤}{٣}\sqrt{٣\text{س}-٢} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٣

١) أ لتكن $\text{ص} = (\text{س}^{٢}+٢)^{٤}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٢\text{س})(٤)(\text{س}^{٢}+٢)^{٤-١}$

$= ٨\text{س}(\text{س}^{٢}+٢)^{٣}$

ب $\int \text{س}(\text{س}^{٢}+٢)^{٣}\,\text{ءس}$

$= \dfrac{١}{٨}\int ٨\text{س}(\text{س}^{٢}+٢)^{٣}\,\text{ءس}$

$= \dfrac{١}{٨}(\text{س}^{٢}+٢)^{٤} + \text{جـ}$

٣) أ لتكن $\text{ص} = \dfrac{١}{\text{س}^{٢}-٥}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = (\text{س}^{٢}-٥)^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١(\text{س}^{٢}-٥)^{-٢} \times ٢\text{س}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{-٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}-٥)^{٢}}$

قارن المشتقة مع: $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{ك}\,\text{س}}{(\text{س}^{٢}-٥)^{٢}}$،

فيكون، $\text{ك} = -٢$

ب $\int \dfrac{٤\text{س}}{(\text{س}^{٢}-٥)^{٢}}\,\text{ءس} = -٢\int \dfrac{-٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}-٥)^{٢}}\,\text{ءس}$

$= -٢ \times \dfrac{١}{\text{س}^{٢}-٥} + \text{جـ}$

$= -\dfrac{٢}{\text{س}^{٢}-٥} + \text{جـ}$

٤) أ لتكن $\text{ص} = \dfrac{١}{٤-٣\text{س}^{٢}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = (٤-٣\text{س}^{٢})^{-١}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١(٤-٣\text{س}^{٢})^{-٢} \times -٦\text{س}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{٦\text{س}}{(٤-٣\text{س}^{٢})^{٢}}$

ب $\int \dfrac{٣\text{س}}{(٤-٣\text{س}^{٢})^{٢}}\,\text{ءس} = \dfrac{١}{٢}\int \dfrac{٦\text{س}}{(٤-٣\text{س}^{٢})^{٢}}\,\text{ءس}$

$= \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١}{٤-٣\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

$= \dfrac{١}{٨-٦\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

٦) أ لتكن $\text{ص} = (\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٨}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣)^{٨}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٨(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣)^{٧} \times \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{-\frac{١}{٢}}(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣)^{٧}$

$= \frac{٤(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}$

ب $\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = \frac{١}{٤}\int \frac{٤(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}(\sqrt{\text{س}} + ٣)^{٨} + \text{جـ}$

٧) أ لتكن $\text{ص} = (٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٥}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\text{ص} = (٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١)^{٥}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥(٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١)^{٤} \times ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥\text{س}^{\frac{١}{٢}}(٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١)^{٤}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥\sqrt{\text{س}}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٤}$

ب $\int ٣\sqrt{\text{س}}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٤}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٥}\int ١٥\sqrt{\text{س}}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٤}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٥}(٢\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١)^{٥} + \text{جـ}$

تمارين ٦-٤

١) د $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س}^{٣} - ٦}{\text{س}^{٢}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - ٦\text{س}^{-٢}$

ناتج التكامل هو:

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٦\text{س}^{-١} + \text{جـ}$

$= \text{س}^{٢} - \frac{٦}{\text{س}^{١}} + \text{جـ}$

عند س = ٣، ص = ٧

$٧ = ٣^{٢} + \frac{٦}{٣} + \text{جـ}$

$٧ = ٩ + ٢ + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -٤$

∴ معادلة المنحنى هي: $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \frac{٦}{\text{س}} - ٤$

و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ - \sqrt{\text{س}})^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})(١ - \text{س}^{\frac{١}{٢}})}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١ - ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} - ٢ + \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}} - ٢ + \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

ناتج التكامل هو:

$\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢\text{س} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

عند س = ٩، ص = ٥ يكون:

$٥ = ٢ \times ٩^{\frac{١}{٢}} - ٢ \times ٩ + \frac{٢}{٣} \times ٩^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$٥ = ٦ - ١٨ + ١٨ + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -١$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢\text{س} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١$ أو

$\text{ص} = ٢\sqrt{\text{س}} - ٢\text{س} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١$

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{ك}}{\text{س}^٢}$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ك}\,\text{س}^{-٢}$

ناتج التكامل هو:

$\text{ص} = \text{ك}\,\text{س}^{-١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} + \text{جـ}$

عند س = ٦، ص = ٢,٥

$٢,٥ = \frac{\text{ك}}{\text{س}} + \text{جـ}$

$١٥ = \text{ك} + ٦\text{جـ}$ .... [١]

عند س = −٣، ص = ١:

$١ = \frac{\text{ك}}{-٣} + \text{جـ}$

$-٣ = \text{ك} - ٣\text{جـ}$ .... [٢]

اطرح المعادلة [٢] من المعادلة [١] لتحصل على:

$١٨ = ٩\text{جـ}$

$\text{جـ} = ٢$

عوّض بدل جـ = ٢ في المعادلة [١] لتحصل على:

$١٥ = \text{ك} + ٦ \times ٢$

$\text{ك} = ٣$

∴ معادلة المنحنى هي $\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}} + ٢$

٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك}\,\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٥$

التكامل يساوي:

$\text{ص} = \frac{\text{ك}}{٣}\text{س}^٣ - ٦\text{س}^٢ + ٥\text{س} + \text{جـ}$

عند س = ١، ص = −٣:

$-٣ = = \frac{\text{ك}}{٣}(١)^٣ - ٦(١)^٢ + ٥(١) + \text{جـ}$

$-٩ = \text{ك} - ١٨ + ١٥ + ٣\text{جـ}$

$-٦ = \text{ك} + ٣\text{جـ}$ .... [١]

عند س = ٣، ص = ١١:

$١١ = \frac{\text{ك}}{٣}(٣)^٣ - ٦(٣)^٢ + ٥(٣) + \text{جـ}$

$١١ = ٩\text{ك} - ٥٤ + ١٥ + \text{جـ}$

$٥٠ = ٩\text{ك} + \text{جـ}$ .... [٢]

اضرب المعادلة [١] في ٩ ثم اطرح منها المعادلة [٢]:

$-١٠٤ = ٢٦\,\text{جـ}$

$\text{جـ} = -٤$

عوّض بدل جـ = −٤ في المعادلة [١] لتحصل على:

$-٦ = \text{ك} - ١٢$

$\text{ك} = ٦$

∴ معادلة المنحنى هي:

$\text{ص} = ٢\text{س}^٣ - ٦\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٤$

٤) عند س = ١، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٩$

$٩ = \text{ك}(١)^٢ - \frac{٦}{(١)^٢}$

$\text{ك} = ٩ + ٦$

$\text{ك} = ١٥$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥\text{س}^٢ - ٦\text{س}^{-٢}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{ص} = ٥\text{س}^٣ + \frac{٣}{\text{س}^٢} + \text{جـ}$

بالتعويض عند س = ١، ص = ٦، فيكون:

$٦ = ٥(١)^٣ + \frac{٣}{١^٢} + \text{جـ}$

٧) توجد القيمة العظمى للدالة عندما يكون د′(س) = ٠

أي أن: ٨ − ٢س = ٠

س = ٤

النقطة العظمى هي (٤، ٢٠)

تكامل د′(س) يعطي:

د(س) = ٨س − س^{٢} + جـ

٢٠ = ٨ × ٤ − ٤^{٢} + جـ

جـ = ٢٠ − ٣٢ + ١٦

= ٤

∴ الدالة هي د(س) = ٤ + ٨س − س^{٢}

٨) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢} + س − ١٠

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ١٠س + جـ

عوّض س = ٢ وص = −٧ لتحصل على:

−٧ = ٢^{٣} + $\frac{١}{٢}$ × ٢^{٢} − ١٠ × ٢ + جـ

−٧ = ٨ + ٢ − ٢٠ + جـ

جـ = ٣

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ١٠س + ٣

٩) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٢س + ١٢

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} + ١٢س + جـ

حيث ميل المنحنى عند النقطة (٠، ٤) هو ١٠:

١٠ = ٦ × ٠^{٢} + ١٢ × ٠ + جـ

جـ = ١٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^{٢} + ١٢س + ١٠

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س + جـ

وحيث تقع النقطة (٠، ٤) على المنحنى،

عوّض عن س = ٠، ص = ٤ لتحصل على:

٤ = ٢ × ٠^{٣} + ٦ × ٠^{٢} + ١٠ × ٠ + جـ

جـ = ٤

ص = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س + ٤

١٠) $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = −٦س − ٤

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٣س^{٢} − ٤س + جـ

للدالة نقطة صغرى عند (−٢، −٦)

∴ للدالة قيمة حرجة عند س = −٢، وتكون عندها المشتقة تساوي الصفر، أي أن: $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠.

وعليه التعويض يعطي:

٠ = −٣ × (−٢)^{٢} − ٤ × (−٢) + جـ

جـ = ٤

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٣س^{٢} − ٤س + ٤

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = −س^{٣} − ٢س^{٢} + ٤س + جـ

حيث إن (−٢، −٦) تقع على المنحنى، عوّض س = −٢، ص = −٦ لتحصل على:

−٦ = −(−٢)^{٣} − ٢(−٢)^{٢} + ٤ × (−٢) + جـ

جـ = ٢

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = ٢ + ٤س − ٢س^{٢} − س^{٣}

$جـ = ٦ - ٥ - ٣$

$جـ = -٢$

∴ معادلة المنحنى هي: $ص = ٥س^{٢} + \frac{٣}{س^{٢}} - ٢$

٥) أ $\frac{دص}{دس} = ٥س\sqrt{س} + ٢$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة:

$\frac{دص}{دس} = ٥س^{\frac{٣}{٢}} + ٢$

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = \frac{٥}{\frac{٥}{٢}}س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س + جـ$

$ص = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س + جـ$

عند $س = ١$، $ص = ٣$:

$٣ = ٢ \times ١^{\frac{٥}{٢}} + ٢ \times ١ + جـ$

$جـ = -١$

فتكون معادلة المنحنى: $ص = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س - ١$

أو $ص = ٢س^{٢}\sqrt{س} + ٢س - ١$

لا توجد صيغة وحيدة "صحيحة" لتعبّر عن إجابتك لأسئلة مشابهة. بصورة عامة، بسّط الكسور، واكتب الحدود في أسس موجبة، وبخاصة الأسس الكسرية، واستبدل الأسس الكسرية البسيطة مثل $س^{\frac{١}{٢}}$ بـ $\sqrt{س}$

ب $\frac{دص}{دس} = ٥س\sqrt{س} + ٢$

عوّض $س = ٤$ لتجد ميل المنحنى عند النقطة (أي ميل المماس).

حيث إن المماس مستقيم تكون معادلته في الصورة $ص = م س + جـ$ (أو ما يكافئها)، يفضل أن تكتب بدون كسور عادية أو عشرية. استخدم $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$ أيضًا في عملك.

$\frac{دص}{دس} = ٥ \times ٤ \times \sqrt{٤} + ٢$ (يؤخذ دائمًا الجذر الموجب)

$\frac{دص}{دس} = ٤٢$

وحيث إن معادلة المنحنى هي:

$ص = ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س - ١$، فإن الإحداثي الصادي للنقطة عند $س = ٤$ هو:

$ص = ٢ \times ٤^{\frac{٥}{٢}} + ٢ \times ٤ - ١$

$ص = ٧١$

استخدم $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$، حيث $م = ٤٢$،

$س_{١} = ٤$، $ص_{١} = ٧١$

$ص - ٧١ = ٤٢(س - ٤)$

$ص - ٧١ = ٤٢س - ١٦٨$

$ص = ٤٢س - ٩٧$

٦) $\frac{دص}{دس} = كس + ٣$

إذا كان ميل العمودي على المماس عند $س = ١$ هو $-\frac{١}{٧}$، فإن ميل المماس هو ٧

(لأن $م_{١} \times م_{٢} = -١$ (راجع الوحدة الثالثة)

وعليه يكون $\frac{دص}{دس} = كس + ٣$، $\frac{دص}{دس} = ٧$، $س = ١$

$٧ = ك \times ١ + ٣$

$ك = ٤$

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = ٢س^{٢} + ٣س + جـ$

وحيث $(١، -٢)$ تقع على المنحنى، عوّض $س = ١$، $ص = -٢$

$-٢ = ٢ \times ١^{٢} + ٣ \times ١ + جـ$

∴ $جـ = -٧$

∴ معادلة المنحنى هي: $ص = ٢س^{٢} + ٣س - ٧$

١١) أ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ك + س

عند س = ٥، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ك + ٥

عند س = ٧، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ك + ٧

إذا كان المماسان متعامدَين، فإن:

(ك + ٥) × (ك+٧) = −١ (لأن م$_1$ × م$_2$ = −١)

ك^2 + ١٢ك + ٣٥ = −١

ك^2 + ١٢ك + ٣٦ = ٠

(ك+٦)^2 = ٠

ك = −٦

ب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س − ٦

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = $\frac{١}{٢}$ س^2 − ٦س + جـ

وحيث إن المنحنى يمر بالنقطة (١٠، −٨)، عوّض

س = ١٠، ص = −٨ لتحصل على:

−٨ = $\frac{١}{٢}$ ١٠^2 − ٦ × ١٠ + جـ

جـ = ٢

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = $\frac{١}{٢}$ س^2 − ٦س + ٢

١٢) د$''$(س) = ٢ + $\frac{٤}{\text{س}^3}$

أعد كتابة الدالة في الصورة الأسيّة:

د$''$(س) = ٢ + ٤س$^{-3}$

أوجد التكامل لتحصل على:

د$'$(س) = ٢س − ٢س$^{-2}$ + جـ

عند النقطة الحرجة س = ١، د$'$(س) = ٠

٠ = ٢ × ١ − ٢ × ١$^{-2}$ + جـ

جـ = ٠

∴ د$'$(س) = ٢س − $\frac{٢}{\text{س}^2}$

من تكامل د$'$(س) = ٢س − $\frac{٢}{\text{س}^2}$، تحصل على:

د(س) = س^2 + $\frac{٢}{\text{س}}$ + جـ

وحيث (١، −١) تقع على المنحنى، عوّض س = ١،

ص = −١ لتحصل على:

−١ = ١^2 + $\frac{٢}{١}$ + جـ

جـ = −٤

∴ معادلة المنحنى هي د(س) = س^2 + $\frac{٢}{\text{س}}$ − ٤

١٣) $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = ٢س + ٨

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^2 + ٨س + جـ

عند (٣، −٤٩) توجد نقطة حرجة صغرى، وعليه

تكون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

عوّض س = ٣ و $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

٠ = ٣^2 + ٨ × ٣ + جـ

جـ = −٣٣

وعليه يكون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^2 + ٨س − ٣٣

عند القيمة العظمى تكون $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

وعليه يكون س^2 + ٨س − ٣٣ = ٠

(س − ٣)(س + ١١) = ٠

عند س = ٣ توجد نقطة صغرى، وعند

س = −١١ نقطة عظمى. (يمكن التحقق من طبيعة

كل نقطة حرجة باستخدام اختبار المشتقة الثانية).

لتجد معادلة المنحنى، أوجد تكامل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$،

لتحصل على ص = $\frac{١}{٣}$ س^3 + ٤س^2 − ٣٣س + جـ

حيث أن (٣، − ٤٩) تقع على المنحنى، عوّض

س = ٣، ص = −٤٩ لتحصل على:

$-49 = \frac{1}{3} \times 3^3 + 4 \times 3^2 - 33 \times 3 + ج$

$-49 = 9 + 36 - 99 + ج$

$ج = 5$

∴ معادلة المنحنى هي:

$ص = \frac{1}{3}س^3 + 4س^2 - 33س + 5$

لتجد الإحداثي الصادي للنقطة العظمى عوّض

$س = -11$ في $ص = \frac{1}{3}س^3 + 4س^2 - 33س + 5$

$ص = \frac{1}{3} \times (-11)^3 + 4 \times (-11)^2 - 33 \times (-11) + 5$

$ص = 408\frac{1}{3}$

∴ إحداثيات النقطة العظمى هي $(-11 ، 408\frac{1}{3})$

14) $\frac{دص}{دس} = 3 - 2س$

$ص = \int \frac{دص}{دس} \, دس$

$= \int (3 - 2س) \, دس$

$= 3س - \frac{2س^2}{2} + ج$

$= 3س - س^2 + ج$

عند التعويض $س = 1$، $ص = 11$، نحصل على:

$11 = 3 \times 1 - 1^2 + ج$

$ج = 11 - 3 + 1 = 9$

معادلة المنحنى هي $ص = 9 + 3س - س^2$

15) $\frac{دص}{دس} = 3\sqrt{س} - 6$

أعد كتابة المشتقة في الصورة الأسيّة:

$\frac{دص}{دس} = 3س^{\frac{1}{2}} - 6$

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = 2س^{\frac{3}{2}} - 6س + ج$

أو $ص = 2س\sqrt{س} - 6س + ج$

عوّض $س = 1$، $ص = 6$ لتحصل على:

$6 = 2 \times (1)^{\frac{3}{2}} - 6 \times 1 + ج$

∴ $ج = 10$

معادلة المنحنى هي $ص = 2س^{\frac{3}{2}} - 6س + 10$

16) $\frac{د^2ص}{دس^2} = 2 - \frac{12}{س^3}$

عوّض $س = 1$ في $\frac{د^2ص}{دس^2}$ لتحصل على:

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2 - \frac{12}{1^3} = -10$

وعليه تكون النقطة الحرجة نقطة عظمى.

الآن أوجد معادلة المنحنى لتجد الإحداثي الصادي للنقطة الحرجة:

أعد كتابة المشتقة الثانية في الصورة الأسيّة:

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2 - 12س^{-3}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$\frac{دص}{دس} = 2س + 6س^{-2} + ج$

$= 2س + \frac{6}{س^2} + ج$

عند النقطة الحرجة حيث $س = 1$، $\frac{دص}{دس} = 0$

$0 = 2 \times 1 + \frac{6}{1^2} + ج$

$ج = -8$

$\frac{دص}{دس} = 2س + \frac{6}{س^2} - 8 = 2س + 6س^{-2} - 8$

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = س^2 - 6س^{-1} - 8س + ج$

أو $ص = س^2 - \frac{6}{س} - (8س) + ج$

وحيث أن $(2 ، 5)$ تقع على المنحنى:

$5 = 2^2 - \frac{6}{2} - 8 \times 2 + ج$

$ج = 20$

∴ معادلة المنحنى هي:

ص = س^{٢} − $\frac{٦}{س}$ − ٨س + ٢٠

عندما س = ١ يكون الإحداثي الصادي:

ص = ١^{٢} − $\frac{٦}{١}$ − ٨ × ١ + ٢٠

ص = ٧.

وعليه (١، ٧) نقطة عظمى.

١٧) أ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س − ٥

أوجد التكامل لتحصل على:

ص = س^{٢} − ٥س + جـ

عوض س = ٣، ص = −٤ لتحصل على:

−٤ = ٣^{٢} − ٥ × ٣ + جـ

جـ = ٢.

وتكون معادلة المنحنى:

ص = س^{٢} − ٥س + ٢ .... (١)

ب ميل المماس عند س = ٣ هو:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × ٣ − ٥ = ١.

فيكون ميل العمودي على المماس عند س = ٣

هو −١. (لأن م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١)

استخدم ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)، م = −١.

س$_{١}$ = ٣، ص$_{١}$ = −٤

ص − (−٤) = −١(س − ٣)

ص + ٤ = −س + ٣

س + ص = −١ .... (٢)

جـ لتجد إحداثيات النقطة ن، حل المعادلتين (١)، (٢) آنيًا.

أوجد ص بدلالة س المعادلة (٢):

ص = −١ − س

عوّض بدل ص في المعادلة (١) لتحصل على:

−١ − س = س^{٢} − ٥س + ٢

س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣)(س − ١) = ٠

س = ٣، وهي معطاة في السؤال، أو س = ١

عوّض س= ١ في المعادلة (٢) لتحصل على:

١ + ص = −١

ص = −٢

∴ إحداثيات النقطة ن هي (١، −٢)

١٨) ب $\frac{ءص}{ءس}$ = $\sqrt{٢س+٥}$ ، ل(٢، ٢)

$\frac{ءص}{ءس}$ = (٢س + ٥)$^{\frac{١}{٢}}$

ص = $\frac{١}{٢\left(\frac{٣}{٢}\right)}$ (٢س + ٥)$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

ص = $\frac{١}{٣}$(٢س + ٥)$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

عوّض س = ٢، ص = ٢ لتجد جـ:

٢ = $\frac{١}{٣}$(٢ × ٢ + ٥)$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

٢ = ٩ + جـ

جـ = −٧

ص = $\frac{١}{٣}$(٢س + ٥)$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٧

١٩) $\frac{ءص}{ءس}$ = ك(س − ٥)^{٢}

عند س = ٤، $\frac{ءص}{ءس}$ = ك(٤ − ٥)^{٢}

$\frac{ءص}{ءس}$ = −ك

ميل المماس هو −ك.

فيكون ميل العمودي على المماس هو:

$\frac{١}{ك}$ (لأن م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١)

$\frac{١}{ك}$ = $\frac{١}{١٢}$

ك = ١٢.

فيكون $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢(س − ٥)^{٢}

يمكن استخدام ميل العمودي المعطى لإيجاد ميل المماس، ومن ثم التعويض عنه في المشتقة وعن س = ٤، ونجد قيمة ك.

أوجد التكامل لتحصل على:

$$\text{ص} = \frac{١٢}{٤}(\text{س} - ٥)^{٤} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = ٣(\text{س} - ٥)^{٤} + \text{جـ}$$

عوّض س = ٤، ص = ٢

$$٢ = ٣(٤ - ٥)^{٤} + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = -١$$

∴ معادلة المنحنى هي: $\text{ص} = ٣(\text{س} - ٥)^{٤} - ١$

٢٠) أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥}{\sqrt{٢\text{س} - ٣}}$

عند س = ٢

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥}{\sqrt{٢ \times ٢ - ٣}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥$$

أي أن ميل المماس هو ٥.

فيكون ميل العمودي هو $-\frac{١}{٥}$ (لأن $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$).

لتجد معادلة العمودي استخدم

$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$، $\text{س}_١ = ٢$، $\text{ص}_١ = ١$، م = ٥.

فيكون: $\text{ص} - ١ = -\frac{١}{٥}(\text{س} - ٢)$

$$٥\text{ص} - ٥ = -\text{س} + ٢$$

$$\text{س} + ٥\text{ص} = ٧$$

ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٥}{\sqrt{٢\text{س} - ٣}}$

أعد كتابة المشتقة في الصورة الأسيّة:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥(٢\text{س} - ٣)^{-\frac{١}{٢}}$$

من التكامل تحصل على:

$$\text{ص} = \frac{٥}{٢\left(-\frac{١}{٢} + ١\right)}(٢\text{س} - ٣)^{-\frac{١}{٢}+١} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = ٥(٢\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = ٥\sqrt{٢\text{س} - ٣} + \text{جـ}$$

وحيث إن المنحنى يمر في ل(٢، ١)

عوّض س = ٢، ص = ١ لتجد جـ:

$$١ = ٥(٢ \times ٢ - ٣)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = -٤$$

$$\text{ص} = ٥\sqrt{(٢\text{س} - ٣)} - ٤$$

٢١) أ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١٢}{\sqrt{٣\text{س} + ١}} - ٤\text{س} - ٢$

عند إيجاد المشتقة الأولى، ومن ثم التعويض بـ س = ١ والحصول على أن المشتقة تساوي صفر، فيمكن القول إن للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١

عوّض عن س = ١ في المشتقة:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١٢}{\sqrt{٣ \times ١ + ١}} - ٤ \times ١ - ٢$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١٢}{٢} - ٤ - ٢$$

$$= ٦ - ٤ - ٢ = ٠$$

وعليه، عند س = ١ توجد نقطة حرجة.

لتحدد طبيعة النقطة الحرجة أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$.

أعد كتابة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١٢}{\sqrt{٣\text{س} + ١}} - ٤\text{س} - ٢$ في الصورة الأسيّة.

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٢(٣\text{س} + ١)^{-\frac{١}{٢}} - ٤\text{س} - ٢$$

أوجد المشتقة الثانية:

$$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = -\frac{١}{٢} \times ١٢(٣\text{س} + ١)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٣ - ٤$$

$$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = -١٨(٣\text{س} + ١)^{-\frac{٣}{٢}} - ٤$$

عوّض س = ١ لتحصل على:

$$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = -١٨(٣ \times ١ + ١)^{-\frac{٣}{٢}} - ٤$$

$= -\frac{١٨}{٨} - ٤$

$= -\frac{٢٥}{٤}$، وهي كمية سالبة.

لذا فإنه توجد نقطة عظمى عند س = ١

ب أوجد تكامل $\frac{ءص}{ءس} = ١٢(٣س + ١)^{-\frac{١}{٢}} - ٤س - ٢$

$ص = \frac{١٢}{٣(-\frac{١}{٢}+١)}(٣س + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٢س^٢ - ٢س + جـ$

$ص = ٨(٣س + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٢س^٢ - ٢س + جـ$

عوّض س = ٠، ص = ١٢ لتجد قيمة جـ:

$١٢ = ٨(٣ × ٠ + ١)^{\frac{١}{٢}} - ٢ × ٠^٢ - ٢ × ٠ + جـ$

$١٢ = ٨ + جـ$

$جـ = ٥$

فتكون معادلة المنحنى:

$ص = ٨\sqrt{٣س+١} - ٢س^٢ - ٢س + ٥$

٢٢) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{\sqrt{٢س+ك}}$

بما أن معادلة العمودي على المماس عند النقطة ل

هي س + ٤ص = ١١، فأعد ترتيب المعادلة لتحصل

على: ٤ص = −س + ١١

$ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١١}{٤}$

فيكون ميل العمودي على المماس عند النقطة **ل** هو $-\frac{١}{٤}$

ويكون ميل المماس عند **ل** هو ٤ (حيث $م_١ × م_٢ = -١$)،

فيكون $\frac{ءص}{ءس} = ٤$ عند **ل**(٣، ٢)

$٤ = \frac{٤}{\sqrt{٢ × ٣ + ك}}$

$٤\sqrt{٦ + ك} = ٤$

$\sqrt{٦ + ك} = ١$ ، بتربيع الطرفين:

$ك = -٥$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{\sqrt{٢س - ٥}}$

أعد كتابة المشتقة في الصورة الأسيّة:

$\frac{ءص}{ءس} = ٤(٢س - ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = \frac{٤}{٢(-\frac{١}{٢}+١)}(٢س - ٥)^{-\frac{١}{٢}+١} + جـ$

$ص = ٤(٢س - ٥)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

لنجد قيمة جـ عوض س = ٣، ص = ٢:

$٢ = ٤(٢ × ٣ - ٥)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$جـ = -٢$

معادلة المنحنى هي $ص = ٤\sqrt{٢س - ٥} - ٢$

تمارين ٦-٥

١) ج $\int_{-١}^{١} (٢س - ٣) \, ءس = \left[س^{٢} - ٣س\right]_{-١}^{١}$

$= (١^{٢} - ٣(١)) - ((-١)^{٢} - ٣(-١))$

$= -٢ - ٤$

$= -٦$

هـ $\int_{-١}^{٢} (٤س^{٢} - ٢س) \, ءس = \left[\frac{٤}{٣}س^{٣} - س^{٢}\right]_{-١}^{٢}$

$= \left(\frac{٤}{٣} \times ٢^{٣} - ٢^{٢}\right) - \left(\frac{٤}{٣} \times (-١)^{٣} - (-١)^{٢}\right)$

$= \frac{٢٠}{٣} - \left(-\frac{٧}{٣}\right)$

$= \frac{٢٠}{٣} + \frac{٧}{٣}$

$= ٩$

٢) ب $\int_{-٢}^{-١} \left(\frac{٨ - س^{٢}}{س^{٢}}\right) ءس$

$= \int_{-٢}^{-١} (٨س^{-٢} - ١) \, ءس$

$= \left[\frac{٨}{-١}س^{-١} - س\right]_{-٢}^{-١}$

$= \left[-٨س^{-١} - س\right]_{-٢}^{-١}$

$= (-٨(-١)^{-١} - (-١)) - (-٨(-٢)^{-١} - (-٢))$

$= (٨ + ١) - (٤ + ٢)$

$= ٣$

هـ $\int_{١}^{٢} \frac{(س - ٣)(س + ٨)}{س^{٤}} \, ءس$

$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢٤ + ٣س - ٨س - س^{٢}}{س^{٤}}\right) ءس$

$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢٤ - ٥س - س^{٢}}{س^{٤}}\right) ءس$

$= \int_{١}^{٢} \left(\frac{٢٤}{س^{٤}} - \frac{٥س}{س^{٤}} - \frac{س^{٢}}{س^{٤}}\right) ءس$

$= \int_{١}^{٢} (٢٤س^{-٤} - ٥س^{-٣} - س^{-٢}) \, ءس$

$= \left[\frac{٢٤}{-٣}س^{-٣} - \frac{٥}{-٢}س^{-٢} - \frac{١}{-١}س^{-١}\right]_{١}^{٢}$

$= \left[-٨س^{-٣} + \frac{٥}{٢}س^{-٢} + س^{-١}\right]_{١}^{٢}$

$= \left(-٨(٢)^{-٣} + \frac{٥}{٢}(٢)^{-٢} + (٢)^{-١}\right)$

$- \left(-٨(١)^{-٣} + \frac{٥}{٢}(١)^{-٢} + (١)^{-١}\right)$

$= \left(-١ + \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢}\right) - \left(-٨ + \frac{٥}{٢} + ١\right)$

$= \frac{١}{٨} + \frac{٩}{٢}$

$= \frac{٣٧}{٨}$

٣) ب $\int_{٠}^{٤} \sqrt{٢س + ١} \, ءس$

$= \int_{٠}^{٤} (٢س + ١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \left[\frac{١}{٢ \times \frac{٣}{٢}}(٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$= \left(\frac{١}{٣}(٢(٤) + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{١}{٣}(٢(٠) + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right)$

$= ٩ - \frac{١}{٣}$

$= \frac{٢٦}{٣}$

و $\int_{-٢}^{٢} \frac{٤}{\sqrt{٥ - ٢س}} \, ءس$

$= \int_{-٢}^{٢} ٤(٥ - ٢س)^{-\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \left[\frac{٤}{-٢ \times \frac{١}{٢}}(٥ - ٢س)^{\frac{١}{٢}}\right]_{-٢}^{٢}$

$= \left[-٤(٥ - ٢س)^{\frac{١}{٢}}\right]_{-٢}^{٢}$

$= \left(-٤(٥ - ٢(٢))^{\frac{١}{٢}}\right) - \left(-٤(٥ - ٢(-٢))^{\frac{١}{٢}}\right)$

$= (-٤) - (-١٢)$

$= ٨$

٤) أ $ص = \frac{٢}{س^٢ + ٥}$

تذكّر القاعدة:

$\int (أس + ب)^ن \, دس = \frac{١}{أ(ن + ١)} (أس + ب)^{ن+١} + جـ$،

حيث جـ عدد ثابت، ن ≠ -١، أ ≠ ٠ تصلح فقط لقوى الدوال الخطيّة.

اكتب العلاقة في الصورة الأسيّة:

$ص = ٢(س^٢ + ٥)^{-١}$

$\frac{دص}{دس} = -١ \times ٢(س^٢ + ٥)^{-٢} \times ٢س$

$\frac{دص}{دس} = -٤س(س^٢ + ٥)^{-٢}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{٤س}{(س^٢ + ٥)^٢}$

ب $\int_{٠}^{٢} \frac{٢س}{(س^٢ + ٥)^٢} \, دس = -\frac{١}{٢} \int_{٠}^{٢} \frac{-٤س}{(س^٢ + ٥)^٢} \, دس$

$= -\frac{١}{٢} \left[\frac{٢}{س^٢ + ٥}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(-\frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{٢^٢ + ٥}\right)\right) - \left(-\frac{١}{٢}\left(\frac{٢}{٠^٢ + ٥}\right)\right)$

$= -\frac{١}{٩} + \frac{١}{٥}$

$= \frac{٤}{٤٥}$

٥) أ $ص = (س^٣ - ٢)^٥$

$\frac{دص}{دس} = ٥(س^٣ - ٢)^٤ \times ٣س^٢$

$\frac{دص}{دس} = ١٥س^٢ (س^٣ - ٢)^٤$

ب $\int_{٠}^{١} س^٢ (س^٣ - ٢)^٤ \, دس$

$= \frac{١}{١٥} \int_{٠}^{١} ١٥س^٢ (س^٣ - ٢)^٤ \, دس$

$= \frac{١}{١٥} \left[(س^٣ - ٢)^٥\right]_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{١٥}(١^٣ - ٢)^٥ - \frac{١}{١٥}(٠^٣ - ٢)^٥$

$= -\frac{١}{١٥} + \frac{٣٢}{١٥}$

$= ٢\frac{١}{١٥}$

٦) أ المعطى $ص = \frac{(\sqrt{س} + ١)^٥}{١٠}$

اكتب الدالة في صورة أسيّة:

$ص = \frac{١}{١٠} \times \left(س^{\frac{١}{٢}} + ١\right)^٥$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{١٠} \times ٥\left(س^{\frac{١}{٢}} + ١\right)^٤ \times \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٤} س^{-\frac{١}{٢}} \left(س^{\frac{١}{٢}} + ١\right)^٤ = \frac{(\sqrt{س} + ١)^٤}{٤\sqrt{س}}$

ب $\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} + ١)^٤}{\sqrt{س}} \, دس = ٤ \int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} + ١)^٤}{٤\sqrt{س}} \, دس$

$= ٤ \times \left[\frac{١}{١٠}\left(س^{\frac{١}{٢}} + ١\right)^٥\right]_{١}^{٤}$

$= \left(\frac{٤}{١٠}\left(٤^{\frac{١}{٢}} + ١\right)^٥\right) - \left(\frac{٤}{١٠}\left(١^{\frac{١}{٢}} + ١\right)^٥\right)$

$= \frac{٤٨٦}{٥} - \frac{٦٤}{٥}$

$= ٨٤\frac{٢}{٥}$

تمارين ٦-٦

١) أ مساحة المنطقة المظللة = $\int_{أ}^{ب} ص \, ءس$

$= \int_{٠}^{٤} (س^{٣} - ٨س^{٢} + ١٦س) \, ءس$

$= \left[\frac{١}{٤}س^{٤} - \frac{٨}{٣}س^{٣} + ٨س^{٢}\right]_{٠}^{٤} = \left(\frac{١}{٤}(٤)^{٤} - \frac{٨}{٣}(٤)^{٣} + ٨(٤)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤}(٠)^{٤} - \frac{٨}{٣}(٠)^{٣} + ٨(٠)^{٢}\right)$

$= \left(٦٤ - \frac{٥١٢}{٣} + ١٢٨\right) - (٠)$

$= ٢١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

ج مساحة المنطقة المظللة = $\int_{أ}^{ب} ص \, ءس$

$= \int_{٠}^{٥} س(س - ٥) \, ءس$

$= \int_{٠}^{٥} (س^{٢} - ٥س) \, ءس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{٥}{٢}س^{٢}\right]_{٠}^{٥}$

$= \left(\frac{١}{٣}(٥)^{٣} - \frac{٥}{٢}(٥)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٣}(٠)^{٣} - \frac{٥}{٢}(٠)^{٢}\right)$

$= -\frac{١٢٥}{٦}$

حصلنا على قيمة سالبة؛ لأن المساحة المطلوبة تقع تحت محور السينات، لذا اكتب إجابتك كقيمة موجبة.

المساحة = $٢٠\frac{٥}{٦}$ وحدة مربعة.

في حل الجزئية (ج)، يمكنك استخدام المُطلق لحساب مساحة المنطقة المظللة؛ لأنها تقع تحت محور السينات.

٢) المساحة = $\int_{أ}^{ب} ص \, ءس$

مساحة المنطقة $ر_{١}$ = $\int_{٠}^{٢} س(س - ٢)(س - ٤) \, ءس$

$= \int_{٠}^{٢} (س^{٣} - ٦س^{٢} + ٨س) \, ءس$

$= \left[\frac{١}{٤}س^{٤} - ٢س^{٣} + ٤س^{٢}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٤}(٢)^{٤} - ٢(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤}(٠)^{٤} - ٢(٠)^{٣} + ٤(٠)^{٢}\right)$

$= ٤ - ٠$

$= ٤$ وحدات مربعة.

مساحة المنطقة $ر_٢ = \int_{٢}^{٤} س(س - ٢)(س - ٤)\, ءس$

$= \int_{٢}^{٤} (س^٣ - ٦س^٢ + ٨س)\, ءس$

$= \left[\frac{١}{٤}س^٤ - ٢س^٣ + ٤س^٢\right]_{٢}^{٤}$

$= \left(\frac{١}{٤}(٤)^٤ - ٢(٤)^٣ + ٤(٤)^٢\right) - \left(\frac{١}{٤}(٢)^٤ - ٢(٢)^٣ + ٤(٢)^٢\right)$

$= ٠ - ٤$

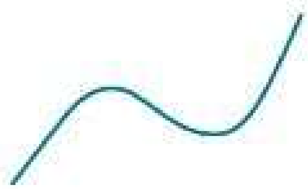
$= -٤$ الكمية سالبة لأن المنطقة تحت محور السينات.

لذا فالمساحة ٤ وحدات مربعة. مساحة المنطقتَين المظللتَين هي نفسها.

٣) ج المساحة $= \int_{أ}^{ب} ص\, ءس$

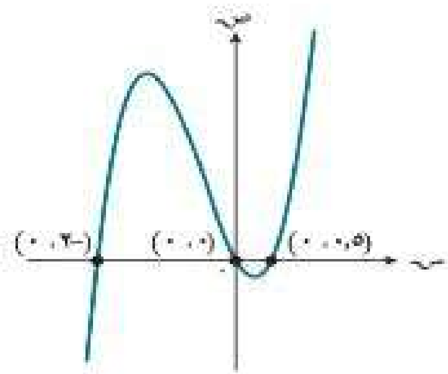
$ص = س(٢س - ١)(س + ٢)$

عند فك الأقواس تجد أن معامل $س^٣$ موجب، لذا فإن شكل المنحنى هو:



نجد نقاط التقاطع مع محور السينات بحلّ المعادلة $س(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$.

فتكون $س = ٠$، $س = \frac{١}{٢}$، $س = -٢$



المساحة $م_١ = \int_{-٢}^{٠} س(٢س - ١)(س + ٢)\, ءس$

$= \int_{-٢}^{٠} (٢س^٣ + ٣س^٢ - ٢س)\, ءس$

$= \left[\frac{١}{٢}\text{س}^٤ + \text{س}^٣ - \text{س}^٢\right]_{-٢}^{٠}$

$= \left(\frac{١}{٢}(٠)^٤ + (٠)^٣ + (٠)^٢\right) - \left(\frac{١}{٢}(-٢)^٤ + (-٢)^٣ - (-٢)^٢\right)$

$= ٠ - (-٤)$

$= ٤$

∴ المساحة م$_١$ = ٤ وحدات مربعة.

المساحة م$_٢$ = $\left|\int_{٠}^{٠,٥} \text{س}(٢\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)\,\text{ءس}\right|$

$= \left|\int_{٠}^{٠,٥} (٢\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٢\text{س})\,\text{ءس}\right|$

$= \left|\left[\frac{١}{٢}\text{س}^٤ + \text{س}^٣ - \text{س}^٢\right]_{٠}^{٠,٥}\right|$

$= \left|\left(\frac{١}{٢}(٠,٥)^٤ + (٠,٥)^٣ + (٠,٥)^٢\right)\right|$

$= \left| - \left(\frac{١}{٢}(٠)^٤ + (٠)^٣ - (٠)^٢\right)\right|$

$= \left|-\frac{٣}{٣٢} - ٠\right|$

$= \left|-\frac{٣}{٣٢}\right|$

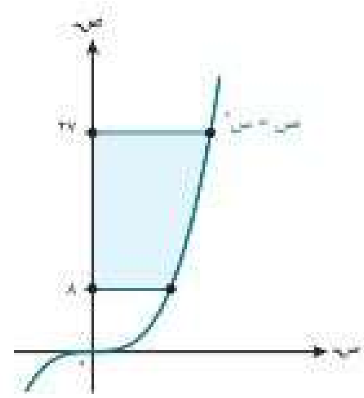
∴ المساحة م$_٢$ = $\frac{٣}{٣٢}$ وحدة مربعة.

∴ المساحة الكليّة (م$_١$ + م$_٢$) = ٤ $\frac{٣}{٣٢}$ وحدة مربعة.

٤) أ المساحة = $\int_{أ}^{ب} \text{س}\,\text{ءص}$

ص = س^٣

س = ص$^{\frac{١}{٣}}$



∴ المساحة = $\int_{٨}^{٢٧} \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{ءص}$

$= \left[\frac{٣}{٤}\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}\right]_{٨}^{٢٧}$

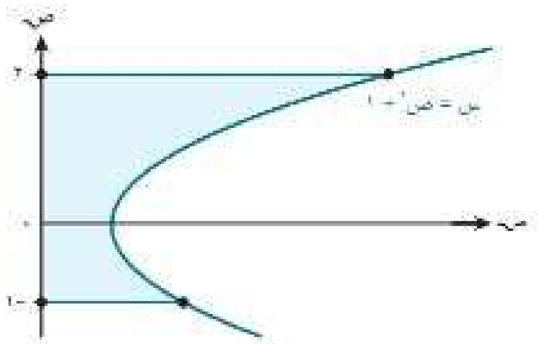
$= \left(\frac{٣}{٤} \times ٢٧^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{٤}(٨)^{\frac{٤}{٣}}\right)$

$= \frac{٢٤٣}{٤} - ١٢$

$= ٤٨\frac{٣}{٤}$ وحدة مربعة.

ب س = ص^٢ + ١

المساحة = $\int_{أ}^{ب} \text{س}\,\text{ءص}$



$= \int_{-١}^{٢} (\text{ص}^٢ + ١)\,\text{ءص}$

$= \left[\frac{١}{٣}\text{ص}^٣ + \text{ص}\right]_{-١}^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٣}(٢)^٣ + ٢\right) - \left(\frac{١}{٣}(-١)^٣ + (-١)\right)$

$= \frac{١٤}{٣} - \left(-\frac{٤}{٣}\right)$

= ٦ وحدات مربعة.

٥) ص = $\sqrt{٢\text{س} + ١}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

ص = (٢س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$

أوجد س بدلالة ص:

ص^٢ = ٢س + ١

٢س = ص^٢ − ١

١٢٥

$س = \frac{١}{٢}ص^{٢} - \frac{١}{٢}$

$\therefore$ المساحة $= \int_{أ}^{ب} س\,ءص$

المساحة $= \int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{٢}ص^{٢} - \frac{١}{٢}\right) ءص$

$= \left[\frac{١}{٦}ص^{٣} - \frac{١}{٢}ص\right]_{١}^{٣}$

$= \left(\frac{١}{٦}(٣)^{٣} - \frac{١}{٢}(٣)\right) - \left(\frac{١}{٦}(١)^{٣} - \frac{١}{٢}(١)\right)$

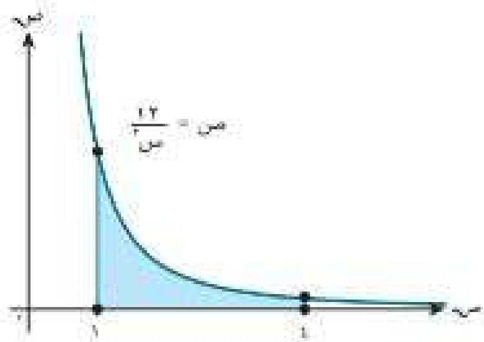
$= ٣ - \left(-\frac{١}{٣}\right)$

$= ٣\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٦) أ $ص = \frac{١٢}{س^{٢}}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

$ص = ١٢س^{-٢}$



$\therefore$ المساحة $= \int_{أ}^{ب} ص\,ءس$

$= \int_{١}^{٤} ١٢س^{-٢} ءس$

$= \left[\frac{١٢}{-١}س^{-١}\right]_{١}^{٤}$

$= \left[-١٢س^{-١}\right]_{١}^{٤}$

$= \left(-١٢(٤)^{-١}\right) - \left(-١٢(١)^{-١}\right)$

$= -٣ - (-١٢)$

$= ٩$ وحدات مربعة.

ب $\int_{١}^{ل} ١٢س^{-٢} ءس = \int_{ل}^{٤} ١٢س^{-٢} ءس$

$= \left[-١٢س^{-١}\right]_{١}^{ل} = \left[-١٢س^{-١}\right]_{ل}^{٤}$

$= \left(-١٢(ل)^{-١}\right) - \left(-١٢(١)^{-١}\right)$

$= \left(-١٢(٤)^{-١}\right) - \left(-١٢(ل)^{-١}\right)$

$= -\frac{١٢}{ل} - (-١٢) = -\frac{١٢}{٤} + \frac{١٢}{ل}$

$-\frac{١٢}{ل} + ١٢ = -٣ + \frac{١٢}{ل}$

$\frac{١٢}{ل} + \frac{١٢}{ل} = ١٢ + ٣$

$\frac{٢٤}{ل} = ١٥$

$ل = ١٫٦$

٧) أ لتكن $ص = \sqrt{س^{٢} + ٥}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

$ص = (س^{٢} + ٥)^{\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتحصل على:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(س^{٢} + ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = س(س^{٢} + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{(س^{٢} + ٥)^{\frac{١}{٢}}}$

$\therefore \frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{س^{٢} + ٥}\right) = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}}$

ب المساحة $= \int_{أ}^{ب} ص\,ءس$

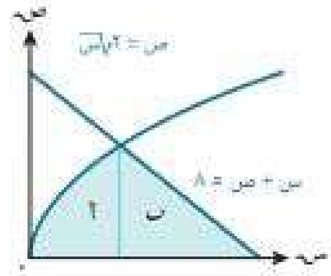
$\therefore$ المساحة =

$\int_{٠}^{٢} \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٥}} ءس = \left[\sqrt{س^{٢} + ٥}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(\sqrt{٢^{٢} + ٥}\right) - \left(\sqrt{٠^{٢} + ٥}\right)$

$= ٣ - \sqrt{٥}$ وحدة مربعة.

٨)



المستقيم س + ص = ٨ (أو ص = ٨ − س) يقطع

محور السينات عند س = ٨

أوجد نقاط تقاطع المستقيم مع المنحنى.

٢√س = ٨ − س

س + ٢√س − ٨ = ٠

لتكن أ = √س فيكون:

أ^{٢} + ٢أ − ٨ = ٠

(أ + ٤)(أ − ٢) = ٠

أ = −٤ و أ = ٢

إذا كان √س = −٤ فلا يوجد حل.

إذا كان √س = ٢ فيكون س = ٤

إذا كان س = ٤، فأوجد الإحداثي الصادي بالتعويض

في المعادلة س + ص = ٨

يكون ص = ٤

يتقاطع المستقيم والمنحنى في النقطة (٤، ٤).

المساحة المطلوبة

= مساحة المنطقة أ + مساحة المنطقة ب

استخدم قاعدة مساحة المثلث

= $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المنطقة ب = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

مساحة المنطقة أ = $\int_{٠}^{٤}$ ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ ءس

مساحة المنطقة أ = $\left[\frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

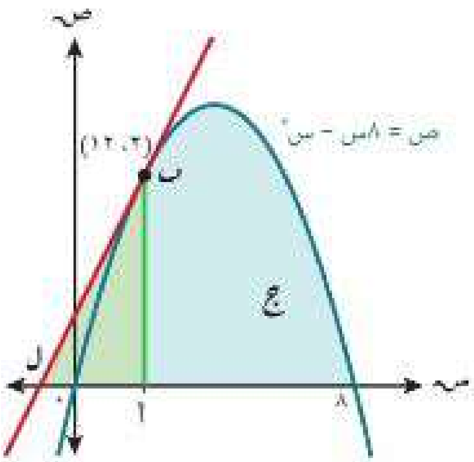
مساحة المنطقة أ = $\left(\frac{٤}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{٤}{٣}(٠)^{\frac{٣}{٢}}\right)$

مساحة المنطقة أ = $\frac{٣٢}{٣}$

مساحة المنطقة أ + ب = ٨ + $\frac{٣٢}{٣}$

مساحة المنطقة المظللة = ١٨ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٩) أ



ص = ٨س − س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٨ − ٢س

عند س = ٢ يكون ميل المماس: ٨ − ٢(٢) = ٤

استخدم ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)، م = ٤،

س = ٢، ص = ١٢:

ص − ١٢ = ٤(س − ٢)

ص − ١٢ = ٤س − ٨

ص = ٤س + ٤

معادلة المماس هي ص = ٤س + ٤

لتجد أين يقطع المماس محور السينات، عوّض

ص = ٠

ص = ٤س + ٤

٠ = ٤س + ٤

س = −١

ب المنطقة المظللة =

مساحة Δ ل أ ب + مساحة المنطقة ج

استخدم القاعدة الآتية:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع:

مساحة Δ ل أ ب = $\frac{١}{٢} \times ٣ \times ١٢$ أو ١٨

مساحة المنطقة ج = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

مساحة المنطقة ج = $\int_{٢}^{٨} ٨س - س^{٢}\, ءس$

$= \left[٤س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣} \right]_{٢}^{٨}$

$= \left(٤(٨)^{٢} - \frac{١}{٣}(٨)^{٣} \right) - \left(٤(٢)^{٢} - \frac{١}{٣}(٢)^{٣} \right)$

$= \frac{٢٣٦}{٣} \times \frac{٤٠}{٣}$

$= ٧٢$

المساحة الكلية = ١٨ + ٧٢

= ٩٠ وحدة مربعة.

١٠) ص = $\sqrt{٢س + ١}$

$٢س + ١ = ٠$

$س = -\frac{١}{٢}$

$أ = \left(-\frac{١}{٢}، ٠\right)$

ص = $\sqrt{٢س + ١}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

ص = $(٢س + ١)^{\frac{١}{٢}}$

لتجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة ب:

استخدم قاعدة السلسلة:

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(٢س + ١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = (٢س + ١)^{-\frac{١}{٢}}$

عند س = ٤

$\frac{ءص}{ءس} = (٢ \times ٤ + ١)^{-\frac{١}{٢}}$

ميل المماس = $\frac{١}{٣}$ = م

فيكون ميل العمودي على المماس -٣

استخدم ص − ص$_١$ = $-\frac{١}{م}$(س − س$_١$).

س$_١$ = ٤، ص$_١$ = ٣

ص − ٣ = −٣(س − ٤)

ص − ٣ = −٣س + ١٢

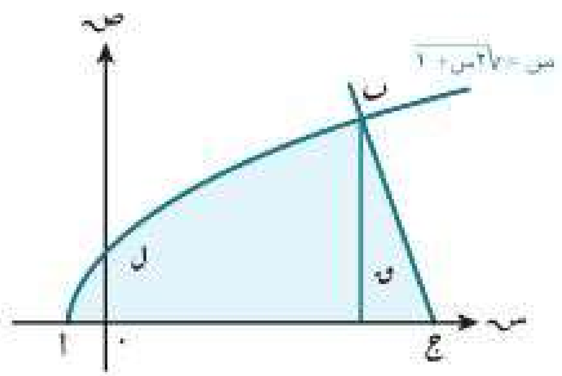
ص + ٣س = ١٥

عوّض ص = ٠، لتجد نقطة التقاطع العمودي على المماس مع محور السينات.

٠ + ٣س = ١٥

س = ٥

∴ إحداثيات النقطة ج هي (٥، ٠)



∴ مساحة المنطقة المظللة

= مساحة المنطقة ل + مساحة المثلث ن

استخدم قاعدة مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث ن = $\frac{١}{٢} \times ١ \times ٣$ أو $\frac{٣}{٢}$

مساحة المنطقة ل = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

$= \int_{-\frac{١}{٢}}^{٤} (٢س + ١)^{\frac{١}{٢}}$ ءص

$= \left[\frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(٢)} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{-\frac{١}{٢}}^{٤}$

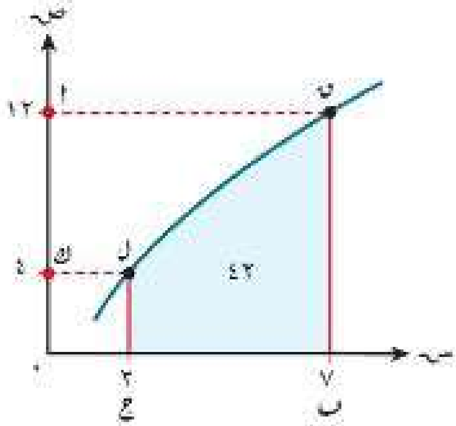
$= \left[\frac{1}{3}(2س + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$

$= \left(\frac{1}{3}(2 \times 4 + 1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

المساحة الكلية $= \frac{3}{2} + 9$

$= 10\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

١١) انظر الشكل:



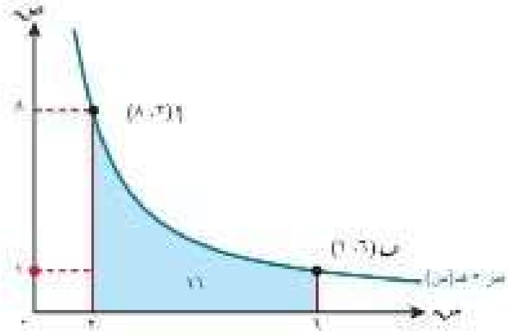
$\int_{4}^{12}$ س ءص

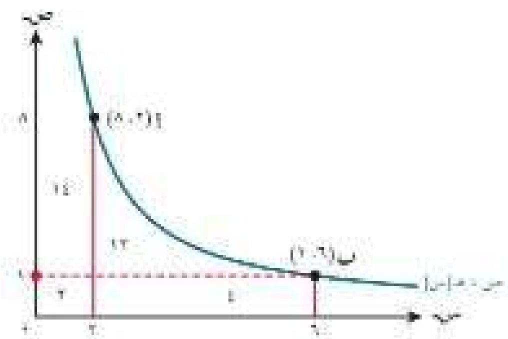
= مساحة المنطقة أ ن ب م − مساحة ك ل ج م − ٤٢

= ١٢ × ٧ − ٤ × ٢ − ٤٢

= ٣٤ وحدة مربعة.

١٢) انظر الشكل:





قيمة $\int_{1}^{8}$ س ءص تساوي المساحة المحصورة بين المنحنى، والمحور الصادي، والمستقيمين ص = ١، ص = ٨ من المخطط أعلاه، نجد أن هذه المساحة =

١٦ − ١ × ٤ + ٢ × ٧ = ١٦ − ٤ + ١٤ = ٢٦ وحدة مربعة.

تمارين ٦-٧

١) استخدم $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}\,\text{ءس}$ لتجد المساحة.

$$\text{المساحة} = \int_{٠}^{٤} (٥ + ٦\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{ءس}$$

$$= \left[٥\text{س} + ٣\text{س}^{٢} - \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٥(٤) + ٣(٤)^{٢} - \tfrac{١}{٣}(٤)^{٣}\right) - \left(٥(٠) + ٣(٠)^{٢} - \tfrac{١}{٣}(٠)^{٣}\right)$$

$$= \left(\tfrac{١٤٠}{٣}\right) - (٠)$$

$\therefore$ المساحة $= ٤٦\tfrac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

مساحة المنطقة المظلّلة $= ٤٦\tfrac{٢}{٣} - ٤ \times ٥$

مساحة المنطقة المظلّلة $= ٢٦\tfrac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٢) أوجد إحداثيات النقطتين أ، ب بحل المعادلتين ص = $(\text{س} - ٣)^{٢}$، ص = ٢س − ٣ آنيًا.

$$(\text{س} - ٣)^{٢} = ٢\text{س} - ٣$$

$$\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ = ٢\text{س} - ٣$$

$$\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٢ = ٠$$

$$(\text{س} - ٦)(\text{س} - ٢) = ٠$$

س = ٦ و س = ٢

تقع أ عند س = ٢، ب عند س = ٦

$$\text{المساحة م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$$

لتكن د(س) = ٢س − ٣، هـ(س) = $(\text{س} - ٣)^{٢}$:

$$\therefore \text{م} = \int_{٢}^{٦} (٢\text{س} - ٣)\,\text{ءس} - \int_{٢}^{٦} (\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٢}^{٦} (-\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ١٢)\,\text{ءس}$$

$$= \left[-\tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} - ١٢\text{س}\right]_{٢}^{٦}$$

$$= \left(-\tfrac{١}{٣}(٦)^{٣} + ٤(٦)^{٢} - ١٢(٤)\right) - \left(-\tfrac{١}{٣}(٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢} - ١٢(٢)\right)$$

$= ١٠\tfrac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

١٣٠

٣) أوجد إحداثيات أ، ب بحلّ المعادلتين:

$ص = -س^{٢} + ١١س - ١٨$ ، $٢س + ص = ١٢$ آنيًا:

أعد ترتيب المعادلة $٢س + ص = ١٢$ لتحصل على $ص = ١٢ - ٢س$.

$\therefore -س^{٢} + ١١س - ١٨ = ١٢ - ٢س$

$س^{٢} - ١٣س + ٣٠ = ٠$

$(س - ١٠)(س - ٣) = ٠$

$س = ١٠$ و $س = ٣$

تقع أ عند $س = ٣$، ب عند $س = ١٠$

$المساحة = \int_{أ}^{ب} د(س)ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)ءس$

لتكن $د(س) = -س^{٢} + ١١س - ١٨$،

$هـ(س) = ١٢ - ٢س$

$المساحة = \int_{٣}^{١٠} د(س)ءس - \int_{٣}^{١٠} هـ(س)ءس$

$= \int_{٣}^{١٠} (-س^{٢} + ١١س - ١٨)ءس$

$- \int_{٣}^{١٠} (١٢ - ٢س)ءس$

$= \int_{٣}^{١٠} (-س^{٢} + ١٣س - ٣٠)ءس$

$= \left[-\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١٣}{٢}س^{٢} - ٣٠س\right]_{٣}^{١٠}$

$-\left(-\frac{١}{٣}(١٠)^{٣} + \frac{١٣}{٢}(١٠)^{٢} - ٣٠(١٠)\right)$

$= \left(-\frac{١}{٣}(٣)^{٣} + \frac{١٣}{٢}(٣)^{٢} - ٣٠(٣)\right)$

$= ٥٧\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة.

٤) ج $ص = س^{٢} - ٤س + ٤$ .... (١)

$٢س + ص = ١٢$ .... (٢)

من المعادلة (١)، $ص = (س - ٢)^{٢}$

لتجد المقطع السيني عوّض $ص = ٠$

$(س - ٢)^{٢} = ٠$

$س - ٢ = ٠$

$س = ٢$

منحنى الدالة التربيعية الشكل U، ويمس المحور السيني عند س = ٢ من المعادلة (٢)،

٢س + ص = ١٢

لتجد المقطع السيني عوّض ص = ٠ فينتج:

٢س = ١٢

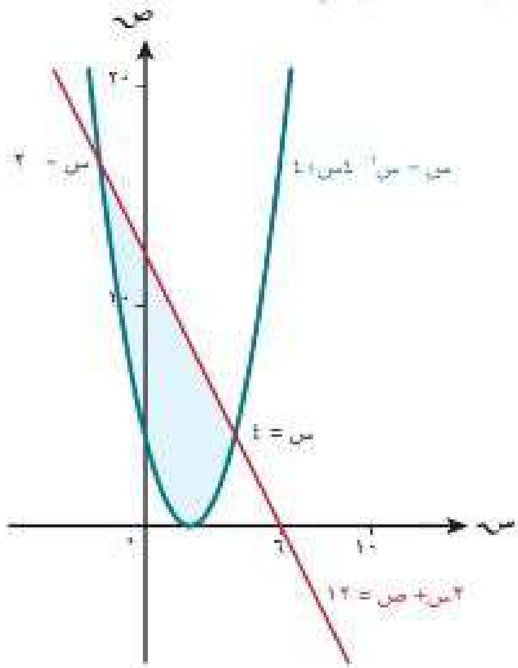
س = ٦

لتجد المقطع الصادي عوّض س = ٠ فينتج:

٢(٠) + ص = ١٢

ص = ١٢

حل المعادلتَين (١) و (٢)، آنيًا لتجد نقطة تقاطع التمثيلَين البيانيَّين. لاحظ الرسم.



من المعادلة (٢)، ٢س + ص = ١٢

نحصل على ص = ١٢ - ٢س

الآن استخدم (١)، فيكون:

س^{٢} - ٤س + ٤ = ١٢ - ٢س

س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠

(س + ٢)(س - ٤) = ٠

س = -٢، س = ٤

يتقاطع المنحنى مع المستقيم عند س = -٢،

س = ٤

لتكن د(س) = ١٢ - ٢س،

هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٤

فتكون المساحة = $\int_{-٢}^{٤}$ د(س) ءس - $\int_{-٢}^{٤}$ هـ(س) ءس

= $\int_{-٢}^{٤}$ (١٢ - ٢س) ءس - $\int_{-٢}^{٤}$ (س^{٢} - ٤س + ٤) ءس

= $\int_{-٢}^{٤}$ (٨ + ٢س - س^{٢}) ءس

= $\left[٨\text{س} + \text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{-٢}^{٤}$

= $\left(٨(٤) + ٤^{٢} - \frac{١}{٣}(٤)^{٣}\right) - \left(٨(-٢) + (-٢)^{٢} - \frac{١}{٣}(-٢)^{٣}\right)$

= ٣٦ وحدة مربعة.

٥) يتقاطع المنحنيان عندما $\text{س}^٢ = \text{س}(٢ - \text{س})$

$\text{س}^٢ = ٢\text{س} - \text{س}^٢$

$٢\text{س}^٢ - ٢\text{س} = ٠$

$٢\text{س}(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ١$

المساحة $= \left| \int_{٠}^{١} \text{س}^٢ - \text{س}(٢ - \text{س})\, \text{ءس} \right|$

$= \left| \int_{٠}^{١} ٢\text{س}^٢ - ٢\text{س}\, \text{ءس} \right|$

$= \left| \left[\left(\frac{٢\text{س}^٣}{٣} - \text{س}^٢ \right) \right]_{٠}^{١} \right|$

$= \left| \left(\frac{٢}{٣} - ١^٢ \right) - ٠ \right|$

$= \left| \frac{٢}{٣} - ١ \right|$

$= \frac{١}{٣}$ وحدات مربعة.

٦) استخدم $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ٤}$ .... (١) $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س} + ٢$ ...... (٢)

اكتب المعادلة (١) في الصورة الأسيّة:

$\text{د}(\text{س}) = (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}$

أوجد تكامل $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}$ لتحصل على:

$\frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(١)} (\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

استخدم المساحة $= \int_{-٤}^{٠} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} - \int_{-٤}^{٠} \text{هـ}(\text{س})\, \text{ءس}$

$= \int_{-٤}^{٠} (\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}}\, \text{ءس} - \int_{-٤}^{٠} \left(\frac{٢}{٣}\text{س} + ٢ \right) \text{ءس}$

$= \int_{-٤}^{٠} \left((\text{س} + ٤)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}\text{س} - ٢ \right) \text{ءس}$

$= \left[\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤}\text{س}^٢ - ٢\text{س} \right]_{-٤}^{٠}$

$= \left(\frac{٢}{٣}(٠ + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤}(٠)^٢ - ٢(٠) \right) - \left(\frac{٢}{٣}(-٤ + ٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٤}(-٤)^٢ - ٢(-٤) \right) = ١\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

٧) أ يعطي $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} + ٣}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة: $\text{ص} = (٢\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}$

المشتقة باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = \frac{١}{٢}(٢\text{س} + ٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = (٢\text{س} + ٣)^{-\frac{١}{٢}}$

ميل المماس عند $\text{س} = ٣$ هو $(٢ \times ٣ + ٣)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$

استخدم $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$، حيث $\text{م} = \frac{١}{٣}$

$\text{س}_١ = ٣$، $\text{ص}_١ = ٣$ فتحصل على:

$\text{ص} - ٣ = \frac{١}{٣}(\text{س} - ٣)$

$\text{ص} - ٣ = \frac{١}{٣}\text{س} - ١$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س} + ٢$

ب لتكن $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\text{س} + ٢$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} + ٣}$

المساحة $= \int_{٠}^{٣} \text{د}(\text{س})ء\text{س} - \int_{٠}^{٣} \text{هـ}(\text{س})ء\text{س}$

$= \int_{٠}^{٣} \left(\frac{١}{٣}\text{س} + ٢\right)ء\text{س} - \int_{٠}^{٣} (٢\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}ء\text{س}$

أوجد تكامل العبارة $(٢\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}$:

$= \frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(٢)}(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= \int_{٠}^{٣} \left(\frac{١}{٣}\text{س} + ٢ - (٢\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}\right)ء\text{س}$

$= \left[\frac{١}{٦}\text{س}^٢ + ٢\text{س} - \frac{١}{٣}(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$

$= \left(\frac{١}{٦}(٣)^٢ + ٢(٣) - \frac{١}{٣}(٢(٣) + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{١}{٦}(٠)^٢ + ٢(٠) - \frac{١}{٣}(٢(٠) + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\right)$

$= -\frac{٣}{٢} + \sqrt{٣}$

$= \frac{١}{٢}(٢\sqrt{٣} - ٣)$ وحدة مربعة.

٨) ⓐ المعطى: $\text{ص} = ١٠ + ٩\text{س} - \text{س}^٢$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٩ - ٢\text{س}$$

ميل المنحنى عند س = ٦ هو $٩ - ٢(٦) = -٣$

لتجد معادلة المماس، استخدم: $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$، حيث م = −٣ و $\text{س}_١ = ٦$، $\text{ص}_١ = ٢٨$

$\text{ص} - ٢٨ = -٣(\text{س} - ٦)$

$\text{ص} - ٢٨ = -٣\text{س} + ١٨$

$\text{ص} = -٣\text{س} + ٤٦$

معادلة المماس عند النقطة ل هي: $\text{ص} = -٣\text{س} + ٤٦$

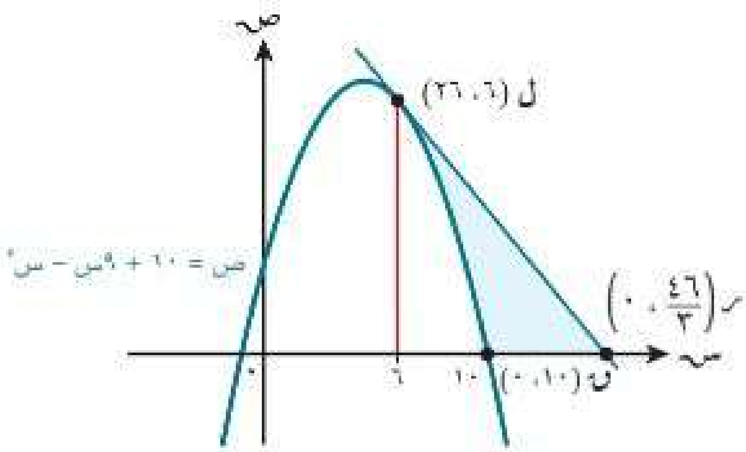
ⓑ لتجد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات، عوّض ص = ٠

$-٣\text{س} + ٤٦ = ٠$

$\text{س} = \frac{٤٦}{٣}$

فتكون، $\left(\frac{٤٦}{٣} ، ٠\right)$

لتكن $\text{د}(\text{س}) = -٣\text{س} + ٤٦$، $\text{هـ}(\text{س}) = ١٠ + ٩\text{س} - \text{س}^٢$



المساحة = مساحة المثلث الموضح في الرسم − $\int_{٦}^{١٠} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} \times \left(\frac{٤٦}{٣} - ٦\right) \times ٢٨ - \int_{٦}^{١٠} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢٨}{٣} \times ٢٨ - \int_{٦}^{١٠} (١٠ + ٩\text{س} - \text{س}^٢)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{٣٩٢}{٣} - \int_{٦}^{١٠} (١٠ + ٩\text{س} - \text{س}^٢)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{٣٩٢}{٣} - \left[١٠\text{س} + \frac{٩}{٢}\text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^٣\right]_{٦}^{١٠}$$

$= \frac{٣٩٢}{٣} - \left(١٠(١٠) + \frac{٩}{٢}(١٠)^٢ - \frac{١}{٣}(١٠)^٣\right) - \left(١٠(٦) + \frac{٩}{٢}(٦)^٢ - \frac{١}{٣}(٦)^٣\right)$

انتبه لوجود الأقواس!

$= \frac{٣٩٢}{٣} - \left(١٠٠ + ٤٥٠ - \frac{١٠٠٠}{٣}\right) - (٦٠ + ١٦٢ - ٧٢)$

$= \frac{٣٩٢}{٣} - \frac{٢٠٠}{٣}$

= ٦٤ وحدة مربعة.

٩) أ المعطى: ص = ٤س − س^٣

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ - ٣س^٢$

ميل مماس المنحنى عند س = ٢ هو: ٤ − ٣(٢)^٢ = −٨

لتجد معادلة المماس استخدم الصيغة: ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)، م = −٨.

س$_١$ = ٢، ص$_١$ = ٠

ص − ٠ = −٨(س − ٢)

ص = −٨س + ١٦

معادلة المماس عند ل هي: ص = ١٦ − ٨س

ب لتجد مساحة المنطقة المظللة استخدم: د(س) = ١٦ − ٨س، ق(س) = ٤س − س^٣

∴ المساحة = $\int_{-٤}^{٢}$ د(س) ءس − $\int_{-٤}^{٢}$ د(س) ءس

$= \int_{-٤}^{٢} (١٦ - ٨س)\,ءس - \int_{-٤}^{٢} (٤س - س^٣)\,ءس$

$= \int_{-٤}^{٢} (١٦ - ١٢س + س^٣)\,ءس$

$= \left[١٦س - ٦س^٢ + \frac{١}{٤}س^٤\right]_{-٤}^{٢}$

$= \left(١٦(٢) - ٦(٢)^٢ + \frac{١}{٤}(٢)^٤\right) - \left(١٦(-٤) - ٦(-٤)^٢ + \frac{١}{٤}(-٤)^٤\right)$

= ١٠٨ وحدة مربعة.

١٠) أ معطى: ص = ٥ − $\sqrt{١٠ - س}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة: ص = ٥ − (١٠ − س)$^{\frac{١}{٢}}$

أوجد المشتقة مستخدمًا قاعدة السلسلة:

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٢}(١٠ - س)^{-\frac{١}{٢}} \times -١$

$= \frac{1}{2}(10 - س)^{-\frac{1}{2}}$

ميل مماس المنحنى عند س = ٩ هو: $\frac{1}{2}(10 - 9)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

لتجد معادلة المماس استخدم: $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ عندما $م = \frac{1}{2}$، $س_1 = 9$، $ص_1 = 4$

$ص - 4 = \frac{1}{2}(س - 9)$

$2ص - 8 = س - 9$

∴ معادلة المماس عند ل هي: $2ص = س - 1$

أو $ص = \frac{1}{2}س - \frac{1}{2}$

ب لتجد مساحة المنطقة المظللة، استخدم:

$د(س) = 5 - (10 - س)^{\frac{1}{2}}$ ، $هـ(س) = \frac{1}{2}س - \frac{1}{2}$

المساحة $= \int_{0}^{9} د(س)\,ءس - \int_{0}^{9} هـ(س)\,ءس$

$= \int_{0}^{9} 5 - (10 - س)^{\frac{1}{2}}\,ءس - \int_{0}^{9} \left(\frac{1}{2}س - \frac{1}{2}\right)ءس$

$= \int_{0}^{9} \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2}س - (10 - س)^{\frac{1}{2}}\right)ءس$

$= \left[\frac{11}{2}س - \frac{1}{4}س^2 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)(-1)}(10 - س)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{9}$

$= \left[\frac{11}{2}س - \frac{1}{4}س^2 + \frac{2}{3}(10 - س)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{9}$

$= \left(\frac{11}{2}(9) - \frac{1}{4}(9)^2 + \frac{2}{3}(10 - 9)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{11}{2}(0) - \frac{1}{4}(0)^2 + \frac{2}{3}(10 - 0)^{\frac{3}{2}}\right)$

$= ٨٫٨٣٤$

∴ المساحة = ٨٫٨٣ وحدة مربعة (إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

تمارين ٦-٨

١) أ) $\text{ص} = \text{س}^2 + \frac{2}{\text{س}}$

$\text{الحجم} = \pi \int_{1}^{2} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{1}^{2} \left(\text{س}^2 + \frac{2}{\text{س}}\right)^2 \text{ءس}$

$= \pi \int_{1}^{2} \left(\text{س}^4 + 4\text{س} + \frac{4}{\text{س}^2}\right) \text{ءس}$

اكتب العبارة في الصورة الأسيّة: $= \pi \int_{1}^{2} (\text{س}^4 + 4\text{س} + 4\text{س}^{-2}) \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{5}\text{س}^5 + 2\text{س}^2 - 4\text{س}^{-1}\right]_{1}^{2}$

$= \pi \left(\left(\frac{1}{5}(2)^5 + 2(2)^2 - 4(2)^{-1}\right) - \left(\frac{1}{5}(1)^5 + 2(1)^2 - 4(1)^{-1}\right)\right)$

$= \frac{71\pi}{5}$ وحدة مكعبة.

د) $\text{ص} = \frac{5}{3 - \text{س}}$

$\text{الحجم} = \pi \int_{-1}^{1} \text{ص}^2 \, \text{ءس} = \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{5}{3 - \text{س}}\right)^2 \text{ءس}$

$= \pi \int_{-1}^{1} 25(3 - \text{س})^{-2} \, \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{25}{(-1)(-1)}(3 - \text{س})^{-1}\right]_{-1}^{1}$

$= \pi \left[25(3 - \text{س})^{-1}\right]_{-1}^{1}$

$= \pi \left(\left(25(3 - 1)^{-1}\right) - \left(25(3 - (-1))^{-1}\right)\right)$

$= \pi \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4}\right)$

$= \frac{25\pi}{4}$ وحدة مكعبة.

٢) أ) معطى: $ص = س^{٢} + ٢$

$س^{٢} = ص - ٢$

$الحجم = \pi \int_{٢}^{١١} س^{٢} \, ءص = \pi \int_{٢}^{١١} (ص - ٢) \, ءص$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} ص^{٢} - ٢ص \right]_{٢}^{١١}$

$= \pi \left(\left(\frac{١٢١}{٢} - ٢٢ \right) - (٢ - ٤) \right)$

$= \frac{٨١ \pi}{٢}$ وحدة مكعبة.

ب) المعطى: $ص = \sqrt{٢س + ١}$

$ص^{٢} = ٢س + ١$

$٢س = ص^{٢} - ١$

$س = \frac{١}{٢} ص^{٢} - \frac{١}{٢}$

$س^{٢} = \left(\frac{١}{٢} ص^{٢} - \frac{١}{٢} \right)^{٢}$ أو $\left(\frac{١}{٢} ص^{٢} - \frac{١}{٢} \right)\left(\frac{١}{٢} ص^{٢} - \frac{١}{٢} \right)$

$س^{٢} = \frac{١}{٤} ص^{٤} - \frac{١}{٢} ص^{٢} + \frac{١}{٤}$

$\therefore$ $الحجم = \pi \int_{١}^{٣} س^{٢} \, ءص = \pi \int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{٤} ص^{٤} - \frac{١}{٢} ص^{٢} + \frac{١}{٤} \right) ءص$

$= \pi \left[\frac{١}{٢٠} ص^{٥} - \frac{١}{٦} ص^{٣} + \frac{١}{٤} ص \right]_{١}^{٣}$

$= \pi \left(\frac{١}{٢٠}(٣)^{٥} - \frac{١}{٦}(٣)^{٣} + \frac{١}{٤}(٣) \right) - \left(\frac{١}{٢٠}(١)^{٥} - \frac{١}{٦}(١)^{٣} + \frac{١}{٤}(١) \right)$

$= \frac{١٢٤ \pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

٣) المعطى: $ص = \frac{أ}{س}$

$الحجم = \pi \int_{١}^{٢} ص^{٢} \, ءس = \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{أ}{س} \right)^{٢} ءس$

$= \pi \int_{١}^{٢} \frac{أ^{٢}}{س^{٢}} \, ءس$

اكتب العبارة في الصورة الأسيّة

$= \pi \int_{١}^{٢} (أ^{٢} س^{-٢}) \, ءس$

$$= \pi \left[-\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{-١} \right]_{١}^{٢}$$

$$= \pi \left(\left(-\text{أ}^{٢}(٢)^{-١} \right) - \left(-\text{أ}^{٢}(١)^{-١} \right) \right)$$

$$١٨\pi = \frac{\text{أ}^{٢}\pi}{٢}$$

$$\text{أ} = \pm ٦$$

يجب أن تكون أ موجبة ليكون التمثيل البياني في الربع الأول.

$$\therefore \text{أ} = ٦$$

٤) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}$

$$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢$$

$$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{-٢}^{١} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{-٢}^{١} (\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢)\, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س} \right]_{-٢}^{١}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{١}{٤}(١)^{٤} + \frac{٤}{٣}(١)^{٣} + \frac{٣}{٢}(١)^{٢} + ٢(١) \right) - \left(\frac{١}{٤}(-٢)^{٤} + \frac{٤}{٣}(-٢)^{٣} + \frac{٣}{٢}(-٢)^{٢} + ٢(-٢) \right) \right)$$

$= \frac{٣٩\pi}{٤}$ وحدة مكعبة.

٥) أ المعطى $٣\text{س} + ٨\text{ص} = ٢٤$

أعد الترتيب على النحو الآتي:

$$٨\text{ص} = ٢٤ - ٣\text{س}$$

$$\text{ص} = ٣ - \frac{٣}{٨}\text{س}$$

$$\text{ص}^{٢} = ٩ - \frac{٩}{٤}\text{س} + \frac{٩}{٦٤}\text{س}^{٢}$$

$$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{٠}^{٨} \text{ص}^{٢}\, \text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٨} \left(٩ - \frac{٩}{٤}\text{س} + \frac{٩}{٦٤}\text{س}^{٢} \right) \text{ءس}$$

$$= \pi \left[٩\text{س} - \frac{٩}{٨}\text{س}^{٢} + \frac{٩}{١٩٢}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٨}$$

$= \pi\left(\left(٩(٨) - \frac{٩}{٨}(٨)^٢ + \frac{٩}{١٩٢}(٨)^٣\right) - \left(٩(٠) - \frac{٩}{٨}(٠)^٢ + \frac{٩}{١٩٢}(٠)^٣\right)\right)$

$= ٢٤\pi$ وحدة مكعبة.

ب حجم المخروط $= \frac{١}{٣}\pi$ ر^{٢}ع

$= \frac{١}{٣}\pi(٣)^٢(٨)$

$= ٢٤\pi$ وحدة مكعبة.

٦) ص $=$ (س $-$ ٢)^٢

ص^٢ $=$ (س $-$ ٢)^٤

يتقاطع المنحنى مع المحور س حيث ٠ $=$ (س $-$ ٢)^٢ أي عند (٢، ٠).

يتقاطع المنحنى مع المحور ص حيث ص $=$ ($-$ ٢)^٢، أي عند (٠، ٤).

وبالتالي فإن حدود التكامل بالنسبة لـ س هي س $=$ ٠ و س $=$ ٢.

∴ الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢}$ ص^٢ ءس $= \pi \int_{٠}^{٢}$ (س $-$ ٢)^٤ ءس

$= \pi\left[\frac{١}{٥}(س - ٢)^٥\right]_{٠}^{٢}$

$= \pi\left(\left(\frac{١}{٥}(٢ - ٢)^٥\right) - \left(\frac{١}{٥}(٠ - ٢)^٥\right)\right)$

$= \frac{٣٢\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٧) أ معطى ٥$\sqrt{س}$ $-$ س $=$ ٠

لتجد نقطة تقاطع المنحنى ل مع محور السينات، عوّض، ص $=$ ٠، فيكون ٥$\sqrt{س}$ $-$ س $=$ ٠

> لا تحاول القسمة على $\sqrt{س}$ لأن هذه العملية تُنقص الحلول واحدًا.

حلّل إلى العوامل: $\sqrt{س}$ (٥ $-$ $\sqrt{س}$) $=$ ٠

إما $\sqrt{س}$ $=$ ٠، فيكون س $=$ ٠ أو ٥ $-$ $\sqrt{س}$ $=$ ٠، فيكون س $=$ ٢٥

∴ إحداثيات ل (٢٥، ٠)

ب ص $=$ ٥$\sqrt{س}$ $-$ س

ص^٢ $=$ (٥$\sqrt{س}$ $-$ س)(٥$\sqrt{س}$ $-$ س)

ص^٢ $=$ (٥س$^{\frac{١}{٢}}$ $-$ س)(٥س$^{\frac{١}{٢}}$ $-$ س)

ص^٢ = ٢٥س − ١٠س$^{\frac{٣}{٢}}$ + س^٢

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{٢٥}$ ص^٢ ءس = $\pi \int_{٠}^{٢٥}$ (٢٥س − ١٠س$^{\frac{٣}{٢}}$ + س^٢) ءس

= $\pi \left[\frac{٢٥}{٢} \right.$ س^٢ + ٤س$^{\frac{٥}{٢}}$ + $\left. \frac{١}{٣} \right.$ س$^٣ \Big]_{٠}^{٢٥}$

= $\pi \left(\left(\frac{٢٥}{٢}(٢٥)^٢ - ٤(٢٥)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}(٢٥)^٣ \right) - \left(\frac{٢٥}{٢}(٠)^٢ - ٤(٠)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٣}(٠)^٣ \right) \right)$

= $\frac{٣١٢٥\pi}{٦}$ وحدة مكعبة.

٨) أ المعطى س = $\frac{٩}{ص^٢}$ − ١

لتجد المقطع الصادي عوّض س = ٠ :

٠ = $\frac{٩}{ص^٢}$ − ١

٩ − ص^٢ = ٠

ص^٢ = ٩

ص = ±٣ (ارفض −٣ لأن **ل** تقع فوق محور السينات)

∴ إحداثيات **ل**(٠، ٣)

ب س = $\frac{٩}{ص^٢}$ − ١

س^٢ = $\left(\frac{٩}{ص^٢} - ١ \right)^٢$

س^٢ = (٩ص$^{-٢}$ − ١)(٩ص$^{-٢}$ − ١)

س^٢ = ٨١ص$^{-٤}$ − ١٨ص$^{-٢}$ + ١

∴ الحجم = $\pi \int_{١}^{٣}$ س^٢ ءص = $\pi \int_{١}^{٣}$ (٨١ص$^{-٤}$ − ١٨ص$^{-٢}$ + ١) ءص

= $\pi \Big[$ −٢٧ص$^{-٣}$ + ١٨ص$^{-١}$ + ص $\Big]_{١}^{٣}$

= $\pi \left(\left(-٢٧(٣)^{-٣} + ١٨(٣)^{-١} + (٣) \right) - \left(-٢٧(١)^{-٣} + ١٨(١)^{-٢} + (١) \right) \right)$

= ١٦π وحدة مكعبة.

٩) المعطى $\text{ص} = \frac{٢}{٢\text{س} + ١}$

$\text{ص}^٢ = \frac{٤}{(٢\text{س} + ١)^٢}$

$\text{ص}^٢ = ٤(٢\text{س} + ١)^{-٢}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٠}^{\text{ل}} \text{ص}^٢ \, \text{ءس} = \pi \int_{٠}^{\text{ل}} \left(٤(٢\text{س} + ١)^{-٢}\right) \text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{٤}{(-١)(٢)} (٢\text{س} + ١)^{-١} \right]_{٠}^{\text{ل}}$

$= \pi \left[-٢(٢\text{س} + ١)^{-١} \right]_{٠}^{\text{ل}}$

$= \pi \left((-٢(٢\text{ل} + ١)^{-١}) - (-٢(٢(٠) + ١)^{-١}) \right)$

$= \pi \left(\frac{-٢}{٢\text{ل} + ١} + ٢ \right)$

$= \pi \left(٢ - \frac{٢}{٢\text{ل} + ١} \right)$

عندما $\text{ل} \leftarrow \infty$، $\frac{٢}{٢\text{ل} + ١} \leftarrow ٠$

$\therefore$ يقترب الحجم من ٢π وحدة مكعبة.

١٠) أ معطى $\text{ص} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}$

لتجد المقطع الصادي عوّض $\text{س} = ٠$

$\text{ص} = \sqrt{٢٥ - ٠^٢}$

$\text{ص} = \pm ٥$ (ارفض -٥ لأن المنحنى يقطع محور الصادات أعلى $\text{ص} = ٠$).

وحيث $\text{ص} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}$

$\text{ص}^٢ = ٢٥ - \text{س}^٢$

$\text{س}^٢ = ٢٥ - \text{ص}^٢$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{٢}^{٥} \text{س}^٢ \, \text{ءص}$

$= \pi \int_{٢}^{٥} (٢٥ - \text{ص}^٢) \, \text{ءص}$

$= \pi \int_{٢}^{٥} (٢٥ - \text{ص}^٢) \, \text{ءص}$

$= \pi \left[٢٥\text{ص} - \frac{١}{٣} \text{ص}^٣ \right]_{٢}^{٥}$

$= \pi\left(\left(٢٥(٥) - \frac{١}{٣}(٥)^٣\right) - \left(٢٥(٣) - \frac{١}{٣}(٣)^٣\right)\right)$

$= \frac{٥٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة.

ب الحجم $= \pi \int_{٠}^{٤}$ ص^٢ ءس، ويمثل حجم الأسطوانة.

$= \pi \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{٢٥ - س^٢}\right)^٢$ ءس $- \pi$ نق^{٢}ع

$= \pi \int_{٠}^{٤} (٢٥ - س^٢)$ ءس $- \pi \times ٣^٢ \times$ ع

$= \pi \left[٢٥س - \frac{١}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٤} - ٣٦\pi$

$= \pi\left(\left(٢٥(٤) - \frac{١}{٣}(٤)^٣\right) - \left(٢٥(٠) - \frac{١}{٣}(٠)^٣\right)\right) - ٣٦\pi$

$= \frac{١٢٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١١ أ المعطى س^٢ + ص^٢ = ١٠٠

س^٢ = ١٠٠ − ص^٢

∴ حجم الإناء $= \pi \int_{-٨}^{٠}$ س^٢ ءص

$= \pi \int_{-٨}^{٠} \left(١٠٠ - ص^٢\right)$ ءص

$= \pi \left[١٠٠ص - \frac{١}{٣}ص^٣\right]_{-٨}^{٠}$

$= \pi\left(\left(١٠٠(٠) - \frac{١}{٣}(٠)^٣\right) - \left(١٠٠(-٨) - \frac{١}{٣}(-٨)^٣\right)\right)$

$= \frac{١٨٨٨\pi}{٣}$ سم^٣.

ب س^٢ + ص^٢ = ١٠٠

بما أن عمق الماء ٣ سم إحداثيات مستوى سطح الماء عند النقطة (٠، −٥)

∴ حجم الماء بداخل الإناء $= \pi \left[١٠٠ص - \frac{١}{٣}ص^٣\right]_{-٨}^{-٥}$

$= \pi\left(\left(١٠٠(-٥) - \frac{١}{٣}(-٥)^٣\right) - \left(١٠٠(-٨) - \frac{١}{٣}(-٨)^٣\right)\right)$

$= ١٧١\pi$ سم^٣.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) $د'(س) = ١٢س^{٣} + ١٠س$

$د(س) = ٣س^{٤} + ٥س^{٢} + جـ$ وحيث $د(-١) = ١$

$١ = ٣(-١)^{٤} + ٥(-١)^{٢} + جـ$

$١ = ٨ + جـ$

$جـ = -٧$

$د(س) = ٣س^{٤} + ٥س^{٢} - ٧$

٢) $\int \left(٥س - \frac{٢}{س}\right)^{٢} ءس$

$= \int \left(٢٥س^{٢} - ٢٠ + \frac{٤}{س^{٢}}\right) ءس$

$= \int \left(٢٥س^{٢} - ٢٠ + ٤س^{-٢}\right) ءس$

$= \frac{٢٥}{٣}س^{٣} - ٢٠س - \frac{٤}{س} + جـ$

٣) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٦}{س^{٢}} - ٥س$

أعد الكتابة في الصورة الأسيّة: $\frac{ءص}{ءس} = ٦س^{-٢} - ٥س$

أوجد التكامل لتحصل على:

$ص = -٦س^{-١} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + جـ$

$ص = -\frac{٦}{س} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + جـ$

عوّض $س = ٣$، $ص = ٥{,}٥$:

$٥{,}٥ = -\frac{٦}{٣} - \frac{٥}{٢}(٣)^{٢} + جـ$

$جـ = ٣٠$

$ص = -\frac{٦}{س} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٣٠$

٤) $د'(س) = \frac{٣}{\sqrt{س + ٢}} - \frac{٨}{س^{٣}}$

اكتب المشتقة في الصورة الأسيّة:

$د'(س) = ٣(س + ٢)^{-\frac{١}{٢}} - ٨س^{-٣}$

أوجد التكامل لتحصل على:

$د(س) = \frac{٣}{\left(\frac{١}{٢}\right)(١)}(س + ٢)^{\frac{١}{٢}} + ٤س^{-٢} + جـ$

$د(س) = ٦(س + ٢)^{\frac{١}{٢}} + \frac{٤}{س^{٢}} + جـ$

وحيث إن $د(٢) = ٣$، عوّض في الدالة لتجد قيمة جـ:

$٣ = ٦(٢ + ٢)^{\frac{١}{٢}} + \frac{٤}{٢^{٢}} + جـ$

$جـ = -١٠$

فتكون الدالة $د(س) = ٦\sqrt{س + ٢} + \frac{٤}{س^{٢}} - ١٠$

٥) $س = \frac{٦}{ص^{٢}} + ١$

$س^{٢} = \left(\frac{٦}{ص^{٢}} + ١\right)\left(\frac{٦}{ص^{٢}} + ١\right)$

$س^{٢} = \frac{٣٦}{ص^{٤}} + \frac{١٢}{ص^{٢}} + ١$

اكتب العبارة في الصورة الأسيّة:

$س^{٢} = ٣٦ص^{-٤} + ١٢ص^{-٢} + ١$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{١}^{٣} س^{٢} ءص$

$= \pi \int_{١}^{٣} \left(٣٦ص^{-٤} + ١٢ص^{-٢} + ١\right) ءص$

$= \pi \left[-١٢ص^{-٣} - ١٢ص^{-١} + ص\right]_{١}^{٣}$

$= \pi\Big(\left(-١٢(٣)^{-٣} - ١٢(٣)^{-١} + ٣\right) - \left(-١٢(١)^{-٣} - ١٢(١)^{-١} + ١\right)\Big)$

$= \frac{١٩٤\pi}{٩}$ وحدة مكعبة.

٦) أ $\text{د}'(\text{س}) = ٦\text{س} - ٦$

توجد نقطة حرجة عندما $\text{د}'(\text{س}) = ٠$

$٦\text{س} - ٦ = ٠$

$\text{س} = ١$

ب أوجد التكامل لتحصل على:

$\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + \text{جـ}$

الدالة تربيعية شكلها $\cup$، لذا توجد نقطة حرجة واحدة، وهي نقطة قيمة صغرى.

$\because$ د(س) $\geq$ ٥، فإن القيمة الصغرى د(س) = ٥، وعليه يكون $٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + \text{جـ} = ٥$

عند س = ١، فيكون: $٣(١)^{٢} - ٦(١) + \text{جـ} = ٥$

جـ = ٨.

وتكون الدالة $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٨$

٧) أوجد نقاط التقاطع ص = ٥، $\text{ص} = ٦\text{س} - \text{س}^{٢}$

حل المعادلة: $٦\text{س} - \text{س}^{٢} = ٥$

$\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥ = ٠$

$(\text{س} - ١)(\text{س} - ٥) = ٠$

س = ١، س = ٥

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة = $\int_{١}^{\text{ب}} \text{ص}\,\text{ءس}$ − مساحة المستطيل

$$= \int_{١}^{٥} (٦\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{ءس} - ٥ \times ٤$$

$$= \left[٣\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{١}^{٥} - ٢٠$$

$$= \left(\left(٣(٥)^{٢} - \frac{١}{٣}(٥)^{٣}\right) - \left(٣(١)^{٢} - \frac{١}{٣}(١)^{٣}\right)\right) - ٢٠$$

$$= \frac{٩٢}{٣} - ٢٠$$

$= ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

طريقة بديلة:

مساحة المنطقة المظللة = $\int_{١}^{٥} (٦\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{دس} - \int_{١}^{٥} ٥\,\text{ءس}$

$$= \int_{١}^{٥} (٦\text{س} - \text{س}^{٢} - ٥)\,\text{ءس}$$

$= \left[٣س^{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} - ٥س \right]_{١}^{٥}$

$= \left(٣ \times ٥^{٢} - \frac{٥^{٣}}{٣} - ٥ \times ٥ \right) - \left(٣ \times ١^{٢} - \frac{١^{٣}}{٣} - ٥ \times ١ \right)$

$= ٨\frac{١}{٣} - \left(-٢\frac{١}{٣} \right)$

$= ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

٨) الحجم $= \pi \int_{٠}^{٣} ص^{٢} ءس$

وحيث $ص = س^{٢} - ٦س + ١١$ فإن:

$ص^{٢} = (س^{٢} - ٦س + ١١)(س^{٢} - ٦س + ١١)$

$ص^{٢} = س^{٤} - ٦س^{٣} + ١١س^{٢} - ٦س^{٣} + ٣٦س^{٢} - ٦٦س + ١١س^{٢} - ٦٦س + ١٢١$

$ص^{٢} = س^{٤} - ١٢س^{٣} + ٥٨س^{٢} - ١٣٢س + ١٢١$

الحجم $= \pi \int_{٠}^{٣} (س^{٤} - ١٢س^{٣} + ٥٨س^{٢} - ١٣٢س + ١٢١) ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}س^{٥} - ٣س^{٤} + \frac{٥٨}{٣}س^{٣} - ٦٦س^{٢} + ١٢١س \right]_{٠}^{٣}$

$= \pi \left(\left(\frac{١}{٥}(٣)^{٥} - ٣(٣)^{٤} + \frac{٥٨}{٣}(٣)^{٣} - ٦٦(٣)^{٢} + ١٢١(٣) \right) - \left(\frac{١}{٥}(٠)^{٥} - ٣(٠)^{٤} + \frac{٥٨}{٣}(٠)^{٣} - ٦٦(٠)^{٢} + ١٢١(٠) \right) \right)$

$= \frac{٤٨٣\pi}{٥}$ وحدة مكعبة.

٩) أ المعطى $ص^{٢} = ٢س - ١$ ...... (١)

$٣ص = ٢س - ١$ .... (٢)

عند نقاط التقاطع يكون $ص^{٢} = ٣ص$ أو $ص^{٢} - ٣ص = ٠$

حلّل إلى العوامل لتحصل على:

$ص(ص - ٣) = ٠$

$ص = ٠$ أو $ص = ٣$

عوّض $ص = ٠$ في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٣(٠) = ٢س - ١$

$٢س = ١$

$س = \frac{١}{٢}$

عوّض $ص = ٣$ في المعادلة (٢) لتحصل على:

$٣(٣) = ٢س - ١$

$٩ = ٢س - ١$

$٢س = ١٠$

س =٥، وعليه يكون أ = ٥

ب مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}\ \text{ءس}$

$$= \int_{\frac{١}{٢}}^{٥} (٢\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}} + \left(\frac{٢}{٣}\text{س} - \frac{١}{٣}\right) \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{١}{\left(\frac{٣}{٢}\right)(٢)} (٢\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} - \left(\frac{١}{٣}\text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}\right) \right]_{\frac{١}{٢}}^{٥}$$

$$= \left[\frac{١}{٣}(٢\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٣}\text{س}^٢ + \frac{١}{٣}\text{س} \right]_{\frac{١}{٢}}^{٥}$$

$$= \left(\left(\frac{١}{٣}\right)(٢(٥) - ١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٣}(٥)^٢ + \frac{١}{٣}(٥)\right) - \left(\frac{١}{٣}\left(٢\left(\frac{١}{٢}\right) - ١\right)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)\right)$$

$= \frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

١٠) أ ص = $\sqrt{١ + ٢\text{س}}$

عوّض ص = ٠ لتجد المقطع السيني:

$٠ = \sqrt{١ + ٢\text{س}}$

ربّع طرفَي المعادلة:

$١ + ٢\text{س} = ٠$

$\text{س} = -\frac{١}{٢}$

إحداثيات أ $\left(-\frac{١}{٢}، ٠\right)$

عوّض س = ٠ لتجد المقطع الصادي:

ص = $\sqrt{١ + ٢(٠)}$

ص = ±١.

وحيث إن ب تقع فوق محور السينات، فيكون ص = ١

∴ إحداثيات ب (٠، ١)

الإحداثي الصادي للنقطة ع، ص = ٣.

فيكون $\sqrt{١ + ٢\text{س}} = ٣$

$١ + ٢\text{س} = ٩$

$\text{س} = ٤$

∴ إحداثيات ع (٤، ٣)

ب) $ص = \sqrt{١ + ٢س}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

$ص = (١ + ٢س)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(١ + ٢س)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = (١ + ٢س)^{-\frac{١}{٢}}$

عند س = ٤،

$\frac{ءص}{ءس} = (١ + ٢(٤))^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$

ميل المماس عند س = ٤ هو $\frac{١}{٣}$

لتجد معادلة العمودي استخدم: $ص - ص_١ = -\frac{١}{م}(س - س_١)$، $م = \frac{١}{٣}$، $س_١ = ٤$، $ص_١ = ٣$

$ص - ٣ = -\frac{١}{\frac{١}{٣}}(س - ٤)$

$ص - ٣ = -٣(س - ٤)$

$ص - ٣ = -٣س + ١٢$

$ص = -٣س + ١٥$

$ص = -٣س + ١٥$

ج) الحجم = $\pi \int_{١}^{٣} س^٢ ءص$

عند $ص = (١ + ٢س)^{\frac{١}{٢}}$

$ص^٢ = ١ + ٢س$

$٢س = ص^٢ - ١$

$س = \frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{١}{٢}$

$س^٢ = \left(\frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{١}{٢}\right)$

$س^٢ = \frac{١}{٤}ص^٤ - \frac{١}{٢}ص^٢ + \frac{١}{٤}$

∴ الحجم = $\pi \int_{٠}^{١} \left(\frac{١}{٤}ص^٤ - \frac{١}{٢}ص^٢ + \frac{١}{٤}\right) ءص$

$= \pi \left[\frac{١}{٢٠}ص^٥ - \frac{١}{٦}ص^٣ + \frac{١}{٤}ص\right]_{٠}^{١}$

$= \pi\left(\left(\frac{١}{٢٠}(١)^٥ - \frac{١}{٦}(١)^٣ + \frac{١}{٤}(١)\right) - \left(\frac{١}{٢٠}(٠)^٥ - \frac{١}{٦}(٠)^٣ + \frac{١}{٤}(٠)\right)\right)$

$= \frac{٢\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة.

١١) أ) $ص = \frac{٢}{\sqrt{س + ١}}$

ربّع طرفي المعادلة:

$$ص^٢ = \frac{٤}{س + ١}$$

$$ص^٢ (س + ١) = ٤$$

$$س + ١ = \frac{٤}{ص^٢}$$

$$س = \frac{٤}{ص^٢} - ١$$

ب) لا حاجة إلى استخدام المطلق لأن المنطقة المظلّلة تقع في الربع الأول حيث لا توجد قيم سالبة لـ س، ص.

$$\int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^٢} - ١\right) ءص = \int_{١}^{٢} (٤ص^{-٢} - ١) ءص$$

$$= \left[\frac{٤ص^{-١}}{-١} - ص\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left[-\frac{٤}{ص} - ص\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(-\frac{٤}{٢} - ٢\right) - \left(-\frac{٤}{١} - ١\right)$$

$$= -٤ - (-٥)$$

$$= ١$$

يتقاطع المنحنى مع المحور الصادي عندما س = ٠، حيث $ص = \frac{٢}{\sqrt{١ + ٠}} = ٢$

المنطقة المظللة محصورة بين المنحنى والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٢

∴ مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^٢} - ١\right) ءص$

= ١ وحدة مربعة.

طريقة بديلة:

لاحظ أن المستقيم ص = ١ يتقاطع مع المنحنى عند $س = \frac{٤}{١^٢} - ١ = ٣$، ∴ يمكن أيضًا إيجاد مساحة المنطقة المظلّلة باستخدام $\int_{٠}^{٣} ص ءس$ − (مساحة المستطيل المحدّد بالمستقيمات ص = ٠، ص = ١، س = ٠، س = ٣):

مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{٠}^{٣} ص ءس$ − مساحة المستطيل

$$= \int_{٠}^{٣} ٢(س + ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس - (١ \times ٣)$$

$$= ٢ \int_{٠}^{٣} (س + ١)^{-\frac{١}{٢}} ءس - ٣$$

$$= ٢ \left[\frac{(س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٣} - ٣$$

$= ٤ \left[(٣ + ١)^{\frac{١}{٢}} - (٠ + ١)^{\frac{١}{٢}} \right] - ٣$

$= ٤ (٢ - ١) - ٣$

$= ١$ وحدة مربعة.

ج) الحجم $= \pi \int_{١}^{٢} س^{٢} ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^{٢}} - ١\right)^{٢} ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٤}{ص^{٢}} - ١\right)\left(\frac{٤}{ص^{٢}} - ١\right) ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{١٦}{ص^{٤}} - \frac{٨}{ص^{٢}} + ١\right) ءص$

$= \pi \int_{١}^{٢} (١٦ص^{-٤} - ٨ص^{-٢} + ١) ءص$

$= \pi \left[-\frac{١٦}{٣} ص^{-٣} + ٨ص^{-١} + ص \right]_{١}^{٢}$

$= \pi \left(\left(\frac{١٦}{٣} (٢)^{-٣} + ٨(٢)^{-١} + ٢\right) - \left(\frac{١٦}{٣} (١)^{-٣} + ٨(١)^{-١} + ١\right) \right)$

$= \frac{٥\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

١٢) أ) توجد النقطة الحرجة عندما $د'(س) = ٠$ وعليه يكون، $٣س^{\frac{١}{٢}} + ٣س^{-\frac{١}{٢}} - ١٠ = ٠$

استبدل $ع = س^{\frac{١}{٢}}$ فتصبح المعادلة:

$٣ع + \frac{٣}{ع} - ١٠ = ٠$

$٣ع^{٢} + ٣ - ١٠ع = ٠$

$٣ع^{٢} - ١٠ع + ٣ = ٠$

$(٣ع - ١)(ع - ٣) = ٠$

$ع = \frac{١}{٣}$ أو $ع = ٣$

وعليه، $س^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$ ومنها $س = \frac{١}{٩}$

أو $س^{\frac{١}{٢}} = ٣$، ومنها $س = ٩$

الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة هي: $س = \frac{١}{٩}$، $س = ٩$

ب) $\because د'(س) = ٣س^{\frac{١}{٢}} + ٣س^{-\frac{١}{٢}} - ١٠$،

$\therefore د''(س) = \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٣}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}}$

عوّض س = $\frac{١}{٩}$ في د″(س) = $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

لتحصل على:

د″$\left(\frac{١}{٩}\right)$ = $\left(\frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{٩}\right)^{-\frac{١}{٢}}$ − $\left(\frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{٩}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{٩}{٢}$ − $\frac{٨١}{٢}$

= −٣٦، وهي قيمة سالبة.

لذا توجد قيمة عظمى عند س = $\frac{١}{٩}$

عوّض س = ٩ في د″(س) = $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

لتحصل على:

د″(٩) = $\left(\frac{٣}{٢}\right)$(٩)$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\left(\frac{٣}{٢}\right)$(٩)$^{-\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٨}$

= $\frac{٤}{٩}$، وهي قيمة موجبة.

لذا توجد قيمة صغرى عند س = ٩

ج) حيث د′(س) = ٣س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٣س$^{-\frac{١}{٢}}$ − ١٠

أوجد التكامل بدلالة س لتحصل على:

د(س) = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠س + جـ

عوّض بدلًا من س = ٤، ص = −٧ في الدالة د(س).

−٧ = ٢(٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦(٤)$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠(٤) + جـ

−٧ = ١٦ + ١٢ − ٤٠ + جـ

جـ = ٥

د(س) = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٦س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١٠س + ٥

١٣) أ) أوجد معادلة العمودي على المماس عند النقطة أ

المعطى: ص = $\frac{٨}{\sqrt{٣س + ٤}}$

اكتب الدالة في الصورة الأسيّة:

ص = ٨(٣س + ٤)$^{-\frac{١}{٢}}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

$\frac{دص}{دس}$ = −$\frac{١}{٢}$ × ٨(٣س + ٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٣

$\frac{دص}{دس}$ = −١٢(٣س + ٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$

عند س = ٠

$\frac{دص}{دس}$ = −١٢(٣(٠) + ٤)$^{-\frac{٣}{٢}}$ = −$\frac{٣}{٢}$

ميل المماس عند س = ٠ هو −$\frac{٣}{٢}$

لتجد معادلة العمودي على المماس عند س = ٠

استخدم ص − ص١ = −$\frac{١}{م}$ (س − س١)،

حيث م = −$\frac{٣}{٢}$، س١ = ٠، ص١ = ٤

ص − ٤ = −$\frac{١}{\left(-\frac{٣}{٢}\right)}$ (س − ٠)

ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٤، وهي معادلة العمودي.

عند س = ٤: ص = $\frac{٢٠}{٣}$

∴ إحداثيات ب $\left(٤، \frac{٢٠}{٣}\right)$

ب مساحة المنطقة ل = $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس

= $\int_{\cdot}^{٤}$ ٨(٣س + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$ ءس = $\left[\frac{٨}{\left(\frac{١}{٢}\right)(٣)}(٣س + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right]_{\cdot}^{٤}$

= $\left[\frac{١٦}{٣}(٣س + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right]_{\cdot}^{٤}$

= $\left(\left(\frac{١٦}{٣}(٣(٤) + ٤)^{\frac{١}{٢}}\right) - \left(\frac{١٦}{٣}(٣(\cdot) + ٤^{\frac{١}{٢}})\right)\right)$

= $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

لتجد مساحة المنطقة ى أوجد مساحة شبه المنحرف أولًا:

استخدم الصيغة م = $\frac{١}{٢}$ (أ + ب) × ع، حيث أ = ٤، ب = $\frac{٢٠}{٣}$، ع = ٤

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}\left(٤ + \frac{٢٠}{٣}\right) \times ٤$

= $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة.

∴ مساحة المنطقة ى = $\frac{٦٤}{٣}$ − مساحة المنطقة ل

= $\frac{٦٤}{٣} - \frac{٣٢}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

فتكون مساحة المنطقة ل = مساحة المنطقة ى = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

١٤) أ ص = (٢ − ٣س)^{٢} ومماس المنحنى عند النقطة $\left(\frac{١}{٢}، ٨\right)$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد المشتقة:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣(٣ − ٢س)^{٢} × −٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٦(٣ − ٢س)^{٢}

عند س = $\frac{١}{٢}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٦(٣ − ٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)$)^{٢} = −٢٤

لتجد معادلة المماس عند س = $\frac{١}{٢}$:

استخدم ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$)، حيث م = −٢٤، س$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$، ص$_{١}$ = ٨

ص − ٨ = −٢٤ $\left(س - \frac{١}{٢}\right)$

ص = −٢٤س + ٢٠، وهي معادلة المماس.

ب لتجد نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات، عوّض س = ٠ في:

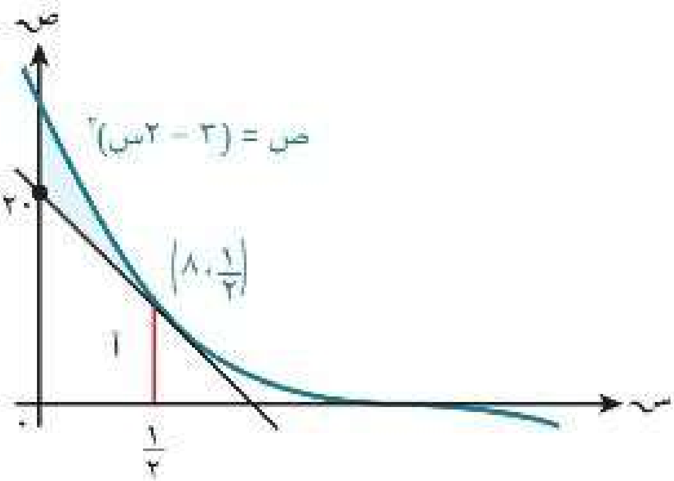
ص = −٢٤س + ٢٠

ص = −٢٤(٠) + ٢٠

ص = ٢٠

استخدم $\int_{أ}^{ب}$ ص ءس لحساب المساحة.

∴ مساحة المنطقة المظلّلة = $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٣ - ٢س)^{٣}$ ءس − مساحة شبه المنحرف أ (انظر الشكل).



استخدم قاعدة مساحة شبه المنحرف وهي: $\frac{١}{٢}$ (أ + ب) × ع

حيث أ = ٢٠، ب = ٨، ع = $\frac{١}{٢}$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (٢٠ + ٨) × $\frac{١}{٢}$

= ٧ وحدات مربعة.

∴ المساحة المظلّلة = $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٣ - ٢س)^{٣}$ ءس − ٧

$$= \left[\frac{١}{(٤)(-٢)}(٣ - ٢س)^{٤}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} - ٧$$

$$= \left[-\frac{١}{٨}(٣ - ٢س)^{٤}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} - ٧$$

$$= \left(\left(-\frac{١}{٨}\left(٣ - ٢\left(\frac{١}{٢}\right)\right)^{٤}\right) - \left(-\frac{١}{٨}\left(٣ - ٢(٠)\right)^{٤}\right)\right) - ٧$$

= $\frac{٩}{٨}$ وحدة مربعة.