الوحدة الثانية : علم المثلثات

الأهداف التعليمية :

- ٢-١ يتذكر القيم الدقيقة للجيب ، جيب التمام ، المماس لزوايا قياسها ٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠° وقيمها المكافئة في الراديان ويجد القيم الدقيقة للزوايا المتعلقة فيها
- ٢-٢ يجد بمعلومية القيم الدقيقة لـ جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ القيم الدقيقة للنسب المثلثية بالدرجات أو الراديان
- ٢-٣ يرسم ويستخدم التمثيلات البيانية لدوال الجيب وجيب التمام وظل الزاوية لأي زاوية وبأي قياس بالدرجات أو بالراديان
- ٢-٤ يرسم التحويلات الهندسية للتمثيلات البيانية لدوال الجيب وجيب التمام وظل الزاوية لزوايا قياسها بين ٠°،٣٦٠° أو بين ٠ ، ٢ π راديان مثل ص = ٢جا(٣س)
- ٢-٥ يستخدم الصيغ جا$^{-١}$(س) ، جتا$^{-١}$(س) ، ظا$^{-١}$(س) للتعبير عن القيم الرئيسية للعلاقات العكسية للمثلثات ويجد قيم الدوال البسيطة باستخدام المعرفة حول القيم الدقيقة للجيب ، جيب التمام ، الظل بزوايا قياسها ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° وقيمها المكافئة في الراديان
- ٢-٦ يجد حلول معادلات مثلثية بسيطة تقع في مجال محدد بالدرجات أو بالراديان (الصورة العامة غير مطلوبة)
- ٢-٧ يستخدم المتطابقات ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ ، جا^{٢}هـ+جتا^{٢}هـ=١ لحل معادلات مثلثية بسيطة أو في براهين مثلثية بسيطة بالدرجات أو بالراديان

النسب المثلثية ومقلوباتها

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = ص

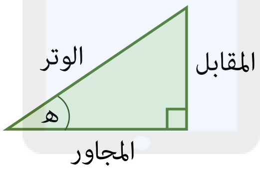
قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = س

قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

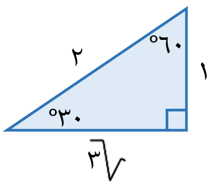
ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

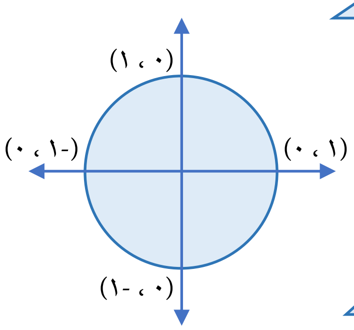
ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

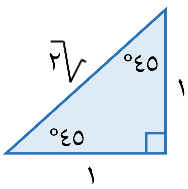


قيم النسب المثلثية ومقلوباتها :

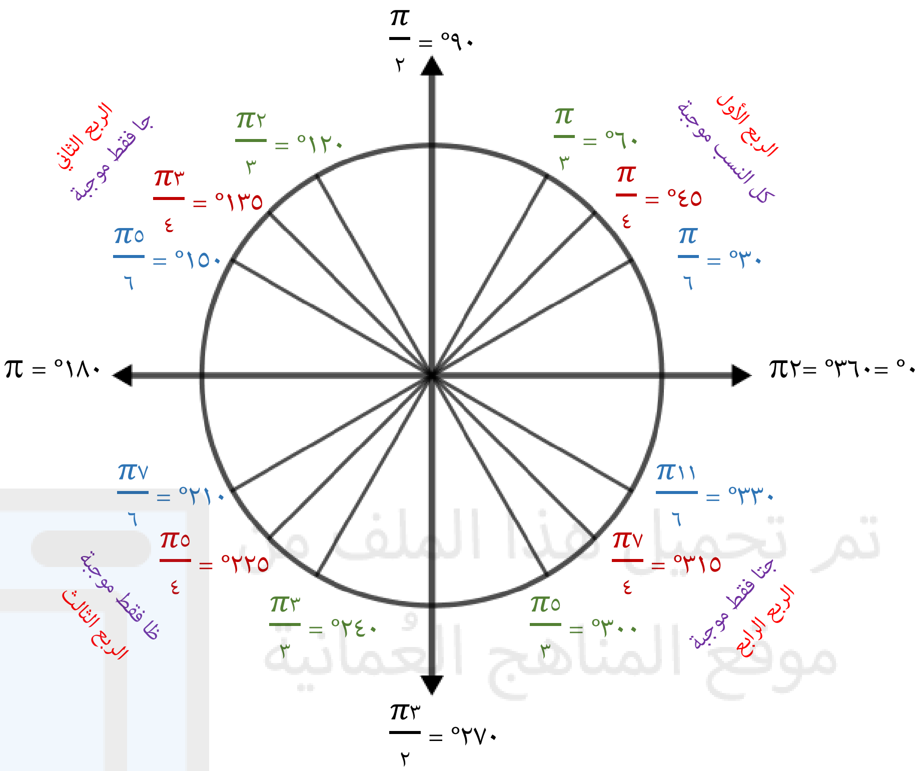
النسبة \ هـ	٠=٢ π (٠°=٣٦٠°)	$\frac{\pi}{٦}$ (٣٠°)	$\frac{\pi}{٤}$ (٤٥°)	$\frac{\pi}{٣}$ (٦٠°)	$\frac{\pi}{٢}$ (٩٠°)	π (١٨٠°)	$\frac{٣\pi}{٢}$ (٢٧٠°)
جا هـ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	-١
جتا هـ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	٠	-١	٠
ظا هـ	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف	٠	غير معرف
قتا هـ	غير معرف	٢	$\sqrt{٢}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	١	غير معرف	-١
قا هـ	١	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٢}$	٢	غير معرف	-١	غير معرف
ظتا هـ	غير معرف	$\sqrt{٣}$	١	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	٠	غير معرف	٠





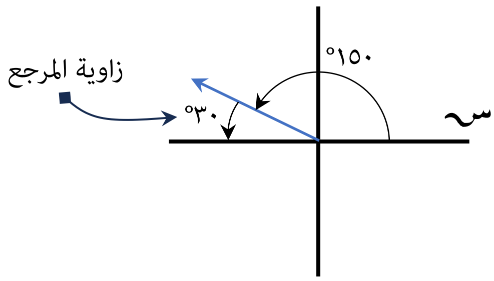


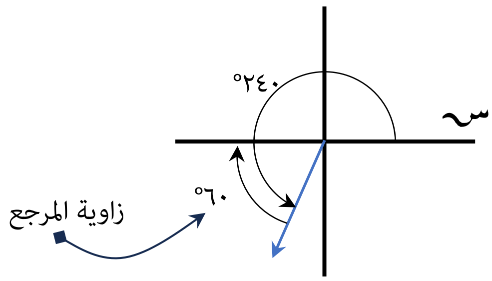
الزوايا في الأرباع المختلفة



تعتبر الزوايا : ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° زوايا مرجعية لزوايا أخرى

زاوية المرجع (زاوية الأساس) : هي الزاوية الحادة المحصورة بين الضلع النهائي للزاوية ومحور س





الزوايا	١٢٠°	١٣٥°	١٥٠°	٢١٠°	٢٢٥°	٢٤٠°	٣٠٠°	٣١٥°	٣٣٠°
زاوية المرجع	٦٠°	٤٥°	٣٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٦٠°	٤٥°	٣٠°

نتيجة : لكل زاوية توجد زاوية حادة ترتبط بها تسمى الزاوية المرجعية أو زاوية الأساس بحيث تحقق العلاقات التالية :

أ) جاس = | جا(π − س) | = | جا(π + س) | = | جا(٢π − س) |

ب) جتاس = | جتا(π − س) | = | جتا(π + س) | = | جتا(٢π − س) |

ج) تتحدد إشارة النسبة المثلثية حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الزاوية النهائي

مثال : أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) جا ٣٠° × جا ١٥٠° - ٢ جتا ٢٢٥° ظ ٢١٠° + ٣ جا ١٢٠°

ب) ٣ ظ ١٥٠° × ظ ٣١٥° + ٤ جتا ٢٤٠° ظ ١٣٥°

الحل

أ) جا ٣٠° جا (١٨٠° – ٣٠°) – ٢ جتا (١٨٠° + ٤٥°) ظ (١٨٠° + ٣٠°) + ٣ جا (١٨٠° – ٦٠°)

= جا ٣٠° جا ٣٠° – ٢ (– جتا ٤٥°) ظ ٣٠° + ٣ جا ٦٠°

= ١/٢ × ١/٢ + ٢ × ١/√٢ × ١/√٣ + ٣ × √٣/٢ ≃ ٣,٧

ب) ٣ ظ (١٨٠° – ٣٠°) × ظ (٣٦٠° – ٤٥°) + ٤ جتا (١٨٠° + ٦٠°) × ظ (١٨٠° – ٤٥°)

= - ٣ ظ ٣٠° × (– ظ ٤٥°) + ٤ (– جتا ٦٠°) (– ظ ٤٥°)

= ٣ ظ ٣٠° ظ ٤٥° + ٤ جتا ٦٠° ظ ٤٥°

= ٣ × ١/√٣ × ١ + ٤ × ١/٢ × ١ ≃ ٣,٧

مثال : إذا كان جا هـ = √٣/٢ ، فما قيمة جا هـ جتا هـ + ٢ ظ هـ قا هـ

الحل

جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ لا تكون جا هـ موجبة إلا إذا كان الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الأول أو الربع الثاني

(√٣/٢)^٢ + جتا^{٢}هـ = ١

٣/٤ + جتا هـ = ١ ومنها جتا^{٢}هـ = ١/٤ وبالتالي جتا هـ = ± ١/٢ ، قا هـ = ± ٢ ، ظ هـ = ± √٣

جا هـ جتا هـ + ٢ ظ هـ قا هـ = √٣/٢ × (– ١/٢) + ٢ (– √٣) (– ٢) = – √٣/٤ + ٤ √٣ = (١٥ + √٣)/٤ (هـ° تقع في الربع الثاني)

أو = √٣/٢ × (١/٢) + ٢ (√٣) (٢) = √٣/٤ + ٤ √٣ = (١٧ + √٣)/٤ (هـ° تقع في الربع الأول)

العلاقات بين الزوايا

العلاقة بين الزاوية هـ والزاوية θ ، حيث هـ زاوية حادة

الزاوية θ	θ = $\frac{\pi}{٢}$ – هـ θ =٩٠° – هـ	θ = $\frac{\pi}{٢}$ + هـ θ =٩٠° + هـ	θ = π – هـ θ =١٨٠° – هـ	θ = π + هـ θ =١٨٠° + هـ	θ = $\frac{٣\pi}{٢}$ – هـ θ =٢٧٠° – هـ	θ = $\frac{٣\pi}{٢}$ + هـ θ =٢٧٠° + هـ	θ = ٢π – هـ θ =٣٦٠° – هـ	θ = – هـ
الربع	الأول	الثاني	الثاني	الثالث	الثالث	الرابع	الرابع	الرابع
جاθ	جتا هـ	جتا هـ	جا هـ	– جا هـ	– جا هـ	– جا هـ	– جا هـ	– جا هـ
جتاθ	جا هـ	– جا هـ	– جتا هـ	– جتا هـ	– جتا هـ	جتا هـ	جتا هـ	جتا هـ
ظθ	ظتا هـ	– ظتا هـ	– ظ هـ	ظ هـ	ظ هـ	– ظ هـ	– ظ هـ	– ظ هـ

مثال : إذا كان جا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جد قيمة :

أ) جا(π − هـ)

ب) جتا(π + هـ)

ج) جا(−هـ)

د) جتا(−هـ)

هـ) جا(π + هـ)

و) جتا(π − هـ)

الحل

أ) جا(π − هـ) = جا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ (زاوية تقع في الربع الثاني فإن جا هـ موجبة)

ب) جتا(π + هـ) = − جتا هـ = $\frac{-١٢}{١٣}$ (زاوية تقع في الربع الثالث فإن جتا هـ سالبة)

ج) جا(−هـ) = − جا هـ = $\frac{-٥}{١٣}$ (زاوية تقع في الربع الرابع فإن جا هـ سالبة)

د) جتا(−هـ) = جتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ (زاوية تقع في الربع الرابع فإن جتا هـ موجبة)

هـ) جا(π + هـ) = − جا هـ = $\frac{-٥}{١٣}$ (زاوية تقع في الربع الثالث فإن جا هـ سالبة)

و) جتا(π − هـ) = − جتا هـ = $\frac{-١٢}{١٣}$ (زاوية تقع في الربع الثاني فإن جتا هـ سالبة)

مثال : إذا كان ضلع انتهاء الزاوية هـ في الربع الأول ، جا هـ = $\frac{١}{٤}$ ، جد كلا من : جتا هـ ، ظا هـ ، قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ

الحل

جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١

جتا^{٢} هـ + $\frac{١}{١٦}$ = ١   جتا^{٢} هـ = $\frac{١٥}{١٦}$ جتا هـ = ± $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ بما أن هـ° تقع في الربع الأول إذن جتا هـ = $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$

قا هـ = $\frac{٤}{\sqrt{١٥}}$ ، قتا هـ = ٤ ، ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{١٥}}$ ، ظتا هـ = $\sqrt{١٥}$

مثال : إذا كانت قتا هـ = ٥ ، جد كلا من جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ

الحل

جا هـ = $\frac{١}{٥}$ (جا هـ تكون موجبة في الربع الأول والثاني فقط)

جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١   جتا^{٢} هـ + $\frac{١}{٢٥}$ = ١   جتا^{٢} هـ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ جتا هـ = ± $\frac{\sqrt{٢٤}}{٥}$

إذا كانت هـ° في الربع الأول فإن جتا هـ = $\frac{\sqrt{٢٤}}{٥}$ وعندما تكون هـ° في الربع الثاني فإن جتا هـ = $\frac{-\sqrt{٢٤}}{٥}$

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢٤}}$

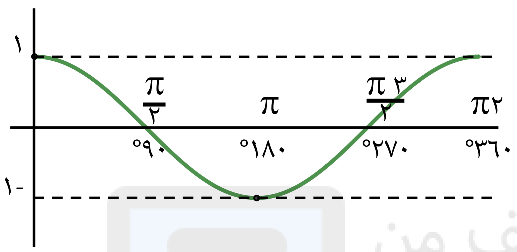
إذا كانت هـ° في الربع الأول فإن ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢٤}}$ وعندما تكون هـ° في الربع الثاني فإن ظا هـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢٤}}$

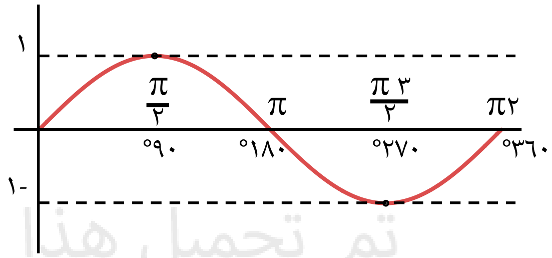
التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

نتيجة :

١) كل نقطة على دائرة الوحدة تمثل نقطة مثلثية لزاوية في الوضع القياسي : ٠ ≤ س ≤ ٣٦٠°.

٢) مدى كل من الدوال ص = جا س ، ص = جتا س هو الفترة [-١ ، ١]

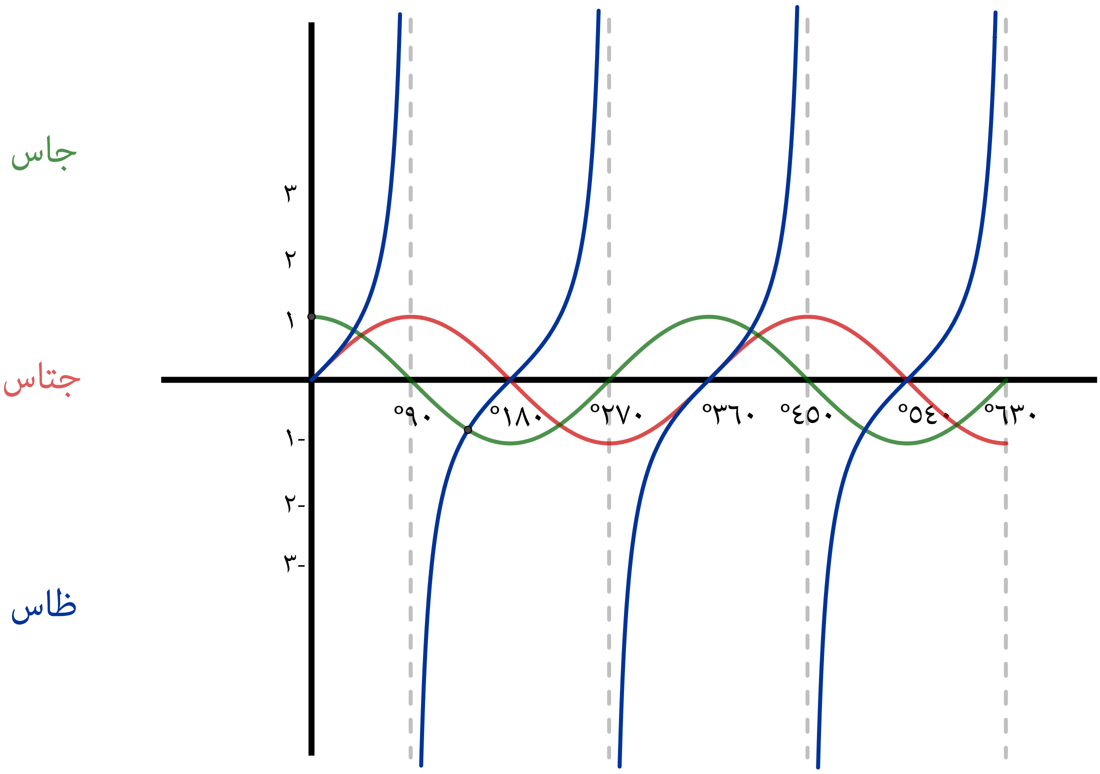




الزيادة والنقصان في قيم النسب المثلثية للزوايا ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ١٨٠° ومضاعفاتها

⇧ ⇩

س	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٣٥°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٢٥°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣١٥°	٣٣٠°
جاس	٠	٠,٥	٠,٧١	٠,٨٧	١	٠,٨٧	٠,٧١	٠,٥	٠	٠,٥-	-٠,٧١	-٠,٨٧	١-	-٠,٨٧	-٠,٧١	٠,٥-
جتاس	١	٠,٨٧	٠,٧١	٠,٥	٠	٠,٥-	-٠,٧١	-٠,٨٧	١-	-٠,٨٧	-٠,٧١	٠,٥-	٠	٠,٥	٠,٧١	٠,٨٧
ظاس	٠	٠,٥٨	١	١,٧٣	∞	-١,٧٣	١-	-٠,٥٨	٠	٠,٥٨	١	١,٧٣	-∞	-١,٧٣	١-	-٠,٥٨



فترات التزايد والتناقص لكل نسبة مثلثية

	٠° - ٩٠°	٩٠° - ١٨٠°	١٨٠° - ٢٧٠°	٢٧٠° - ٣٦٠°
جاس	تناقص	تناقص	تزايد	تزايد
جتاس	تزايد	تناقص	تناقص	تزايد
ظاس	تزايد	تزايد	تزايد	تزايد

منحنى ظاس يعيد نفسه كل ١٨٠° وتوجد نقاط انفصال عند ٩٠° ، ٢٧٠° حيث تقترب قيمة ظاس من −∞ ، ∞

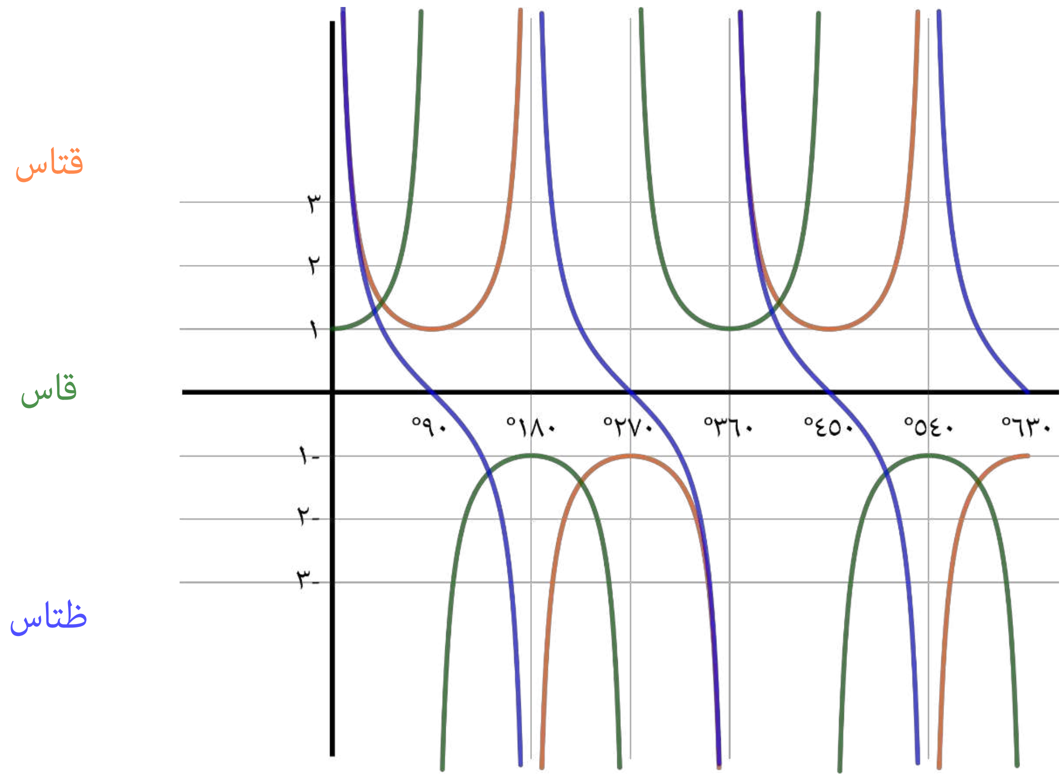
التمثيل البياني لمقلوبات النسب المثلثية

نتيجة :

١) بيان الدالة ص = قتاس على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن جزأين المجال]٠° ، ٣٦٠°[- { ١٨٠° } ومداها ح -]-١ ، ١[

٢) بيان الدالة ص = قاس على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن ثلاثة أجزاء المجال = [٠° ، ٣٦٠°] – {٩٠° ، ٢٧٠°} ومداها ح –]-١ ، ١[

٣) بيان الدالة ص = ظتاس على الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° عبارة عن جزأين المجال =]٠° ، ٣٦٠°[- { ١٨٠° } ومداها = ح



المتطابقات

أ) متطابقات ضعف الزاوية

نتيجة :

١) جا(أ+ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جاب ومنها جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ

٢) جتا(أ+ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب ومنها جتا ٢أ = جتا^{٢} أ − جا^{٢} أ

٣) ظا(أ+ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$ ومنها ظا ٢أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ أ}}$ ، ظا أ ظا ب $\neq$ ١

٤) جا(أ-ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

٥) جتا(أ-ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

٦) ظا(أ−ب) = $\frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$ ومنها ظا ٢أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ أ}}$ ، ظا أ ظا ب $\neq$ ١

مثال : بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة جا ٧٥°

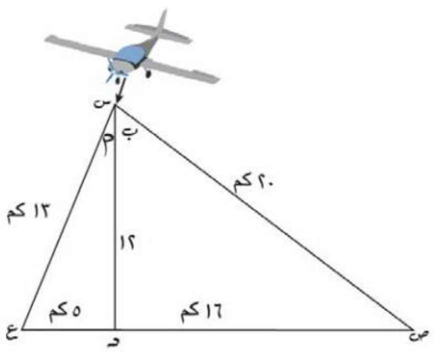
الحل

جا ٧٥ = جا(٤٥+٣٠) = جا ٤٥ جتا ٣٠ + جتا ٤٥ جا ٣٠

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}+١}{٢\sqrt{٢}}$

مثال : تطير طائرة نفاثة على ارتفاع ١٢ كم وتستطيع أن ترصد الأجسام على الأرض من أحد الجوانب

لمسافة ١٣ كم ومن الجانب الآخر لمسافة ٢٠ كم ، ما قيمة جتا الزاوية بين الاتجاهين ؟



الحل

من القياسات المعطاة نستطيع أن نجد : ص د = ١٦ ، د ع = ٥

جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا ب = $\frac{١٦}{٢٠}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{٢٠}$

جتا(أ+ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{٢٠} - \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٦}{٢٠} = \frac{١٦}{٦٥}$

مثال : أثبت أن جا هـ = جتا($\frac{\pi}{٢}$ – هـ)   (جيب أي زاوية يساوي جيب تمام الزاوية المتممة)

الحل

الطرف الأيسر = جتا($\frac{\pi}{٢}$ – هـ)

= جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا هـ + جا $\frac{\pi}{٢}$ جتا هـ

= ٠ + جا هـ

= جا هـ = الطرف الأيمن

مثال : أثبت صحة المتطابقة : جتا ٢هـ = $\frac{\text{١–ظا}^{٢}\text{هـ}}{\text{قا}^{٢}\text{هـ}}$

الحل

الطرف الأيسر = $\frac{\text{١} - \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}}{\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}}$ = $\frac{\frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} - \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}}{\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}}$ = $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$ ÷ $\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$ = $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$ × جتا^{٢} هـ = جتا^{٢} هـ – جا^{٢} هـ

= جتا هـ × جتا هـ – جا هـ × جا هـ = جتا(هـ + هـ) = جتا ٢هـ = الطرف الأيمن

مثال : أثبت صحة العلاقتين : جا٣س = ٣ جاس – ٤ جا^{٣}س ، جتا٣س = ٤جتا^{٣}س – ٣جتاس

الحل

جا٣س = جا(٢س+س) = جا٢س جتاس + جتا٢س جاس

= ٢جاس جتاس جتاس + (١-٢جا^{٢}س) جاس

= ٢جاس جتا^{٢}س + جاس – ٢جا^{٣}س

= ٢جاس(١-جا^{٢}س) + جاس – ٢جا^{٣}س

= ٢جاس – ٢جا^{٣}س + جاس – ٢جا^{٣}س

= ٣جاس – ٤جا^{٣}س

جتا٣س = جتا(٢س+س) = جتا٢س جتاس – جا٢س جاس

= (٢جتا^{٢}س – ١) جتاس – ٢جاس جتاس جاس

= ٢جتا^{٣}س – جتاس – ٢جتاس جا^{٢}س

= ٢جتا^{٣}س – جتاس – ٢جتاس (١-جتا^{٢}س)

= ٢جتا^{٣}س – جتاس – ٢جتاس + ٢جتا^{٣}س

= ٤جتا^{٣}س – ٣جتاس

ب) متطابقات أنصاف الزوايا

مثال : أوجد قيمة كلا من : جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ ، جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ ، ظا $\frac{\text{أ}}{٢}$

الحل

أ باستخدام قانون ضعف الزاوية جتا أ = جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ – جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$

= ١ – ٢جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$

٢جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ١ – جتا أ

جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = $\frac{\text{١– جتا أ}}{٢}$

جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{١– جتا أ}}{٢}}$

ب باستخدام قانون ضعف الزاوية جتا أ = جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ – جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$

= ٢جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ – ١

٢جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = جتا أ + ١

جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = $\frac{\text{جتاأ+١}}{٢}$

جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{\text{جتاأ+١}}{٢}}$

ج ظا٢أ = $\frac{\text{٢ظاأ}}{\text{١–ظا}^{٢}\text{أ}}$ = $\frac{\text{٢ظا}\frac{\text{أ}}{٢}}{\text{١–ظا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}$

مثال : أ) برهن صحة المتطابقة الآتية : $\frac{\text{جتا ٢هـ}}{\text{جتاهـ + جاهـ}}$ = جتا هـ – جا هـ

ب) ٢جتا^{٢}هـ = جا هـ + ١ حيث ٠° < هـ° < ٣٦٠°

الحل

أ $\frac{\text{جتا ٢هـ}}{\text{جتاهـ + جاهـ}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ – جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتاهـ + جاهـ}}$ = $\frac{\text{(جا هـ – جتا هـ)(جا هـ + جتا هـ)}}{\text{جتاهـ + جاهـ}}$ = جا هـ – جتا هـ

ب ٢جتا^{٢}هـ = ٢(١ – جا^{٢}هـ) = ٢ – ٢جا^{٢}هـ لكن ٢جتا^{٢}هـ = جا هـ + ١

إذن جا هـ + ١ = ٢ – ٢جا^{٢}هـ ومنها ٢جا^{٢}هـ + جا هـ – ١ = ٠ وبالتحليل (٢جا هـ – ١)(جا هـ + ١) = ٠

عندما جا هـ = -١ فإن هـ = ٢٧٠° وعندما جا هـ = ٠,٥ فإن هـ = ٣٠° أو ١٥٠°