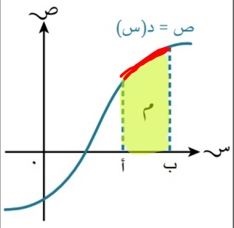
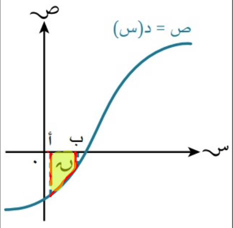
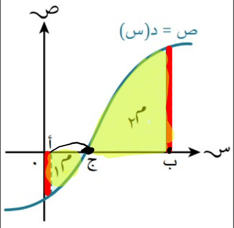
ملخص وحل تمارين درس المساحة تحت منحنى الدالة

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 2024-04-01 04:53:31

٦-٦ المساحة تحت منحنى الدالة

المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات

يجب مراعاة ثلاث حالات عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) ومحور السينات على الفترة المغلقة [أ، ب].

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
د(س) ≥ ٠ ص ≥ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب]	د(س) ≤ ٠ ص ≤ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب]	تتغير إشارة الدالة د(س) عند س = ج: د(س) ≤ ٠ على الفترة المغلقة [أ، ج] د(س) ≥ ٠ على الفترة المغلقة [ج، ب]

تجب ملاحظة النقاط الآتية عند استخدام التكامل لحساب المساحة:

- **من الأفضل إيجاد قيمة (قيم) س التي تكون عندها قيمة الدالة تساوي صفرًا، حتى لو تم إعطاء الحدود.**
- **إذا كانت د(س) متصلة، وكانت هناك قيمتان، على سبيل المثال: ن، ل تقعان في الفترة [أ، ب] حيث تختلف إشارة د(ل) عن إشارة د(ن)، فإن إشارة د(س) تتغير في الفترة [أ، ب].**
- **في الحالة الثالثة نجد مساحة المنطقة الواقعة أسفل المحور السيني، والمنطقة الواقعة فوق المحور السيني بشكل منفصل، ثم نجمع هاتين القيمتين المطلقتين للحصول على المساحة الإجمالية.**

نتيجة ١١

- إذا كانت د(س) متصلة، وكانت د(س) ≥ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة:

  $م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ى س \right|$، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

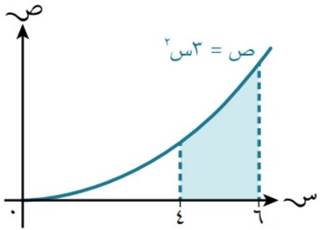
- إذا كانت د(س) متصلة، وكانت د(س) ≤ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة:

  $ن = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ى س \right|$؛ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.

- إذا تغيرت إشارة الدالة د(س) عند س = ج على الفترة [أ، ب]، فإن المساحة الإجمالية م تُعطى بالعلاقة:

$$م = م_١ + م_٢ = \left| \int_{أ}^{ج} د(س)\, ى س \right| + \left| \int_{ج}^{ب} د(س)\, ى س \right|$$

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



$$م = \left|\int_{أ}^{ب} ص \, ءس\right|$$

$$م = \left|\int_{٤}^{٦} ٣س^{٢} \, ءس\right|$$

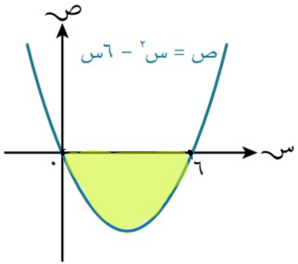
$$= \left|\frac{٣س^{٣}}{٣}\Big|_{٤}^{٦}\right| = \left|س^{٣}\Big|_{٤}^{٦}\right|$$

$$= \left|٦^{٣} - ٤^{٣}\right| = |٢١٦ - ٦٤| = ١٥٢ \text{ وحدة مربعة}$$

في المثال ١٠ تقع المساحة المطلوبة فوق محور السينات، لذلك لم يكن من الضروري إدراج رمز المطلق؛ لأن قيمة التكامل المحدد موجبة.

إذا وقعت المساحة المطلوبة تحت محور السينات، فإن قيمة $\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس$ تكون سالبة؛ وذلك لأن التكامل هو مجموع قيم ص، وهي جميعها سالبة.

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



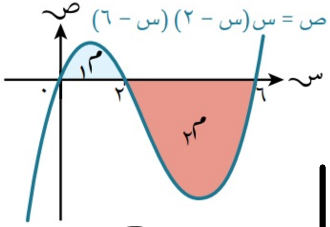
$$م = \left|\int_{أ}^{ب} ص \, ءس\right| = \left|\int_{٠}^{٦} (س^{٢} - ٦س) \, ءس\right|$$

$$= \left|\left(\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٦س^{٢}}{٢}\right)\Big|_{٠}^{٦}\right| = \left|\left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٣س^{٢}\right)\Big|_{٠}^{٦}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{٦^{٣}}{٣} - ٣\times٦^{٢}\right) - \left(\frac{٠^{٣}}{٣} - ٣(٠)^{٢}\right)\right|$$

$$|-٣٦| = ٣٦$$

أوجد المساحة الكلّية للمنطقتَين المظللتَين في الشكل المجاور:



$$م = م_{١} + م_{٢}$$

$$= \left|\int_{٠}^{٢} ص \, ءس\right| + \left|\int_{٢}^{٦} ص \, ءس\right|$$

$$ص = س(س - ٢)(س - ٦)$$

$$= س(س^{٢} - ٨س + ١٢)$$

$$ص = س^{٣} - ٨س^{٢} + ١٢س$$

$$م = \left|\int_{٠}^{٢} (س^{٣} - ٨س^{٢} + ١٢س) \, ءس\right| + \left|\int_{٢}^{٦} (س^{٣} - ٨س^{٢} + ١٢س) \, ءس\right|$$

$$م = \left|\left(\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{٨س^{٣}}{٣} + ٦س^{٢}\right)\Big|_{٠}^{٢}\right| + \left|\left(\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{٨س^{٣}}{٣} + ٦س^{٢}\right)\Big|_{٢}^{٦}\right|$$

$$م = \left(\frac{٢^{٤}}{٤} - \frac{٨\times٢^{٣}}{٣} + ٦\times٢^{٢}\right) - (٠ - ٠ + ٠) + \left|\left(\frac{٦^{٤}}{٤} - \frac{٨\times٦^{٣}}{٣} + ٦\times٤^{٢}\right) - \left(\frac{٢^{٤}}{٤} - \frac{٨\times٢^{٣}}{٣} + ٦\times٢^{٢}\right)\right|$$

$$م = \left(\frac{١٦}{٤} - \frac{٦٤}{٣} + ٢٤\right) + \left|(٣٢٤ - ٥٧٦ + ٩٦) - \left(٤ - \frac{٦٤}{٣} + ٢٤\right)\right|$$

$$م = \frac{٢٠}{٣} + \left|-١٥٦ - \left(\frac{٢٠}{٣}\right)\right|$$

$$م = \frac{٥٠٨}{٣}$$

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ص = س(س − ٤) (س + ٢) ومحور السينات.

$-١ \times -٥ \times ١ = +$

$ص = س(س - ٤)(س + ٢)$

نفع ص = ٠ ، اما س = ٠ ، اما س − ٤ = ٠ ، اما س + ٢ = ٠

س = ٤ ، س = −٢

$م = م_١ + م_٢$

$ص = س(س - ٤)(س + ٢)$

$ص = س(س^٢ - ٢س - ٨)$

$ص = س^٣ - ٢س^٢ - ٨س$

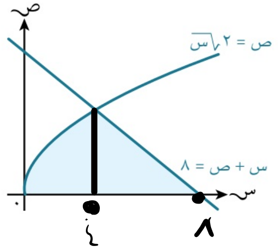
$= \left|\int_{-٢}^{٠} (س^٣ - ٢س^٢ - ٨س)\, ءس\right| + \left|\int_{٠}^{٤} (س^٣ - ٢س^٢ - ٨س)\, ءس\right|$

$= \left|\left(\frac{س^٤}{٤} - \frac{٢س^٣}{٣} - ٤س^٢\right)\Big|_{-٢}^{٠}\right| + \left|\left(\frac{س^٤}{٤} - \frac{٢س^٣}{٣} - ٤س^٢\right)\Big|_{٠}^{٤}\right|$

$= \left|(٠ - ٠ - ٠) - \left(\frac{١٦}{٤} + \frac{١٦}{٣} - ١٦\right)\right| + \left|\left(٦٤ - \frac{١٢٨}{٣} - ٦٤\right) - (صفر)\right|$

$\left|\frac{٢٠}{٣}\right| + \left|\frac{١٢٨}{٣}\right| = \frac{١٤٨}{٣}$

٨) في الشكل المجاور: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٢√س، والمستقيم س + ص = ٨، ومحور السينات.



$ص = ٢\sqrt{س} \qquad ص = ٨ - س$

$٢\sqrt{س} = ٨ - س$

$٤س = (٨ - س)^٢$

$٠ = ٦٤ - ١٦س + س^٢ - ٤س$

$س^٢ - ٢٠س + ٦٤ = ٠$

$(س - ٤)(س - ١٦) = ٠$

اما س − ٤ = ٠ ، س = ٤

اما س − ١٦ = ٠ ، س = ١٦ مرفوضة

س + ص = ٨

ص = ٠

س = ٨

$م = \left(\int_{٠}^{٤} ٢\sqrt{س}\, ءس\right) + \int_{٤}^{٨} (٨ - س)\, ءس$

$= \int_{٠}^{٤} ٢س^{\frac{١}{٢}}\, ءس + \int_{٤}^{٨} (٨ - س)\, ءس$

$= \frac{٢ \times ٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\Big|_{٠}^{٤} + \left|\left(٨س - \frac{س^٢}{٢}\right)\Big|_{٤}^{٨}\right|$

$= \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{٠}^{٤} + \left|\left(٨س - \frac{س^٢}{٢}\right)\Big|_{٤}^{٨}\right|$

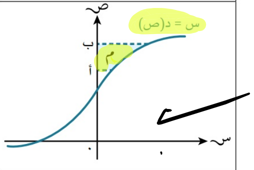
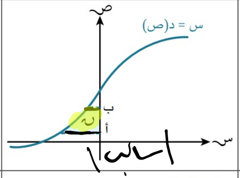
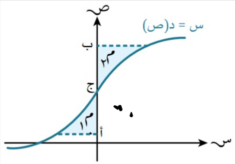
$= \frac{٤}{٣}\left(٤^{\frac{٣}{٢}} - ٠\right) + \left|\left(٨ \times ٨ - \frac{٨^٢}{٢}\right) - \left(٨ \times ٤ - \frac{٤^٢}{٢}\right)\right|$

$= \frac{٣٢}{٣} + \left|(٦٤ - ٣٢) - (٣٢ - ٨)\right|$

$= \frac{٣٢}{٣} + |٣٢ - ٢٤| = \frac{٣٢}{٣} + ٨ = \frac{٣٢ + ٢٤}{٣} = \frac{٥٦}{٣}$

المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور الصادات

يجب مراعاة ثلاث حالات عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى د (ص)، والمحور الصادي في الفترة المغلقة [أ، ب].

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
د (ص) ⩾ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب].	د (ص) ⩽ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب].	تتغير إشارة الدالة د (ص) عند ص = ج: د (ص) ⩽ ٠ على الفترة المغلقة [أ، ج]. د (ص) ⩾ ٠ على الفترة المغلقة [ج، ب].

تجب ملاحظة النقاط الآتية عند استخدام التكامل لحساب المساحة:

- **من الأفضل إيجاد قيمة (قيم) ص التي تكون عندها قيم د (ص) تساوي صفرًا، حتى لو تم إعطاء الحدود.**
- **إذا كانت د (ص) متصلة، وكانت هناك قيمتان، على سبيل المثال: ن، ل تقعان في الفترة [أ، ب] حيث تختلف إشارة د(ل) عن إشارة د(ن)، فإن إشارة د (ص) تتغير في الفترة [أ، ب].**
- **في الحالة الثالثة، نجد مساحة المنطقة الواقعة يسار المحور الصادي، والمنطقة الواقعة يمين المحور الصادي بشكل منفصل، ثم نجمع هاتين القيمتين المطلقتين للحصول على المساحة الإجمالية.**

نتيجة ١٢

- إذا كانت د(ص) متصلة، وكانت د (ص) ⩾ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ ، ص = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة:

$\text{م} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (ص)}\,\text{ءص}\right|$، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

- إذا كانت د (ص) متصلة، وكانت د (ص) ⩽ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ، ص = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة:

$\text{ن} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (ص)}\,\text{ءص}\right|$ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.

- إذا تغيرت إشارة د(ص) عند ص = ج على الفترة [أ، ب]، فإن المساحة الإجمالية تُعطى بالعلاقة:

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{د (ص)}\,\text{ءص}\right| + \left|\int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{د (ص)}\,\text{ءص}\right|$$

$م = \int_{أ}^{ب} ص \, دس$

د(س)

س = ب

س = أ

المساحة تحت المنحنى ومحور السينات

$م = \int_{أ}^{ب} س \, دص$

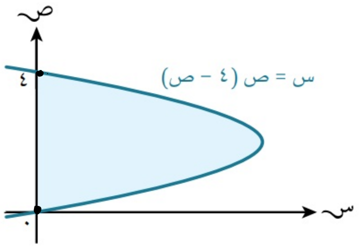
د(ص)

ص = ب

ص = أ

المساحة تحت المنحنى ومحور الصادات

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



$م = \int_{أ}^{ب} س \, دص$

$م = \int_{٠}^{٤} ص(٤ - ص) \, دص$

$م = \left| \int_{٠}^{٤} (٤ص - ص^{٢}) \, دص \right|$

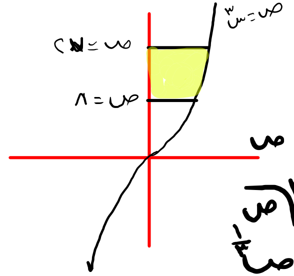
$م = \left(٢ص^{٢} - \frac{ص^{٣}}{٣} \right) \Big|_{٠}^{٤} =$

$م = \left| \left(٢ \times ٤^{٢} - \frac{٤^{٣}}{٣} \right) - (صفر - صفر) \right|$

$م = \left| \left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣} \right) \right| = \left| \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} \right| = \left| \frac{٣٢}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$

٤) أوجد المساحة المحصورة بين كل ممّا يأتي:

أ المنحنى ص = س^{٣}، ومحور الصادات، والمستقيمين ص = ٨، ص = ٢٧



$ص = س^{٣}$

$س = \sqrt[٣]{ص}$

$س = ص^{\frac{١}{٣}}$

$م = \int_{أ}^{ب} س \, دص$

$م = \left| \int_{٨}^{٢٧} ص^{\frac{١}{٣}} \, دص \right|$

$= \left(\frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} \right) \Big|_{٨}^{٢٧}$

$= \frac{٣}{٤} \left(٢٧^{\frac{٤}{٣}} - ٨^{\frac{٤}{٣}} \right)$

$م = \frac{٣}{٤} (٨١ - ١٦) = \frac{٣}{٤} (٦٥) = \frac{١٩٥}{٤}$

٤) أوجد المساحة المحصورة بين كل ممّا يأتي:

ب المنحنى س = ص^{٢} + ١، ومحور الصادات، والمستقيمين ص = −١، ص = ٢

نضع س = ٠ ، $ص^{٢} + ١ = ٠$ ، $ص^{٢} = -١$ ، $ص = \sqrt{-١}$ ∄

$م = \int_{أ}^{ب} س \, دص$

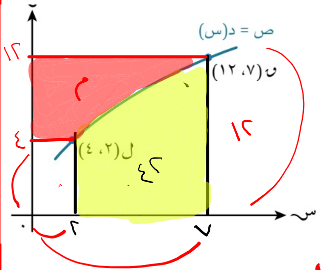
$= \left| \int_{-١}^{٢} (ص^{٢} + ١) \, دص \right| = \left| \left(\frac{ص^{٣}}{٣} + ص \right) \Big|_{-١}^{٢} \right|$

$= \left| \left(\frac{٨}{٣} + ٢ \right) - \left(\frac{-١}{٣} - ١ \right) \right| = \left| \frac{١٤}{٣} + \frac{٤}{٣} \right| = \left| \frac{١٨}{٣} \right| = ٦$

★ **١١)** يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = د (س).

تقع النقطتان ل(٢، ٤)، ن (٧، ١٢) على المنحنى.

إذا علمت أن $\int_{2}^{7}$ ص ءس = ٤٢، فأوجد قيمة $\int_{4}^{12}$ س ءص.



$\int_{2}^{7}$ ص ءس = ٤٢

$\int_{4}^{12}$ س ءص

$\int_{4}^{12}$ س ءص = م المستطيل (٧ × ١٢) − م (المستطيل الأيمن) (٢ × ٤) − $\int_{2}^{7}$ ص ءس

= ٨٤ − ٨ − ٤٢

= ٨٤ − ٥٠ = ٣٤

★ **١٢)** يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى

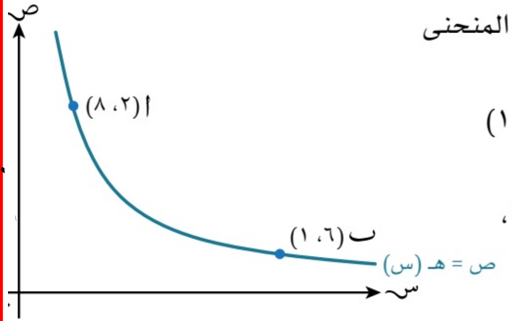
ص = هـ (س).

تقع النقطتان أ(٢، ٨)، ب(٦، ١)

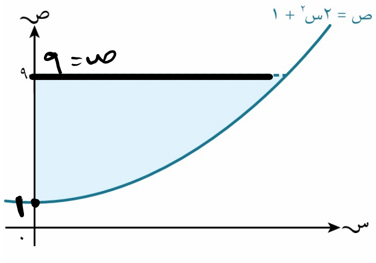
على المنحنى.

إذا علمت أن $\int_{2}^{6}$ ص ءس = ١٦،

فأوجد قيمة $\int_{1}^{8}$ س ءص.



في الشكل المجاور، أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٢س^{٢} + ١، والمستقيم ص = ٩، ومحور الصادات.



لايجاد التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

$\text{ص} = ٢(٠)^{٢} + ١ = ١$

$\text{ص} = ١$

$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س} \, \text{دص}$

$= \int_{١}^{٩} \left(\frac{\text{ص}}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \text{دص}$

$= \frac{٢ \times ٢}{٣} \left(\frac{\text{ص}}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{٩}$

$= \frac{٤}{٣} \left[\left(\left(\frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} \right) - \left(\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} \right) \right]$

$\frac{٤}{٣} \times ٨ = \frac{٣٢}{٣}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + ١$

$\text{ص} - ١ = ٢\text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢} = \frac{\text{ص} - ١}{٢}$

$\text{س} = \sqrt{\frac{(\text{ص} - ١)}{٢}}$