الرياضيات البحتة
الصف الثاني عشر

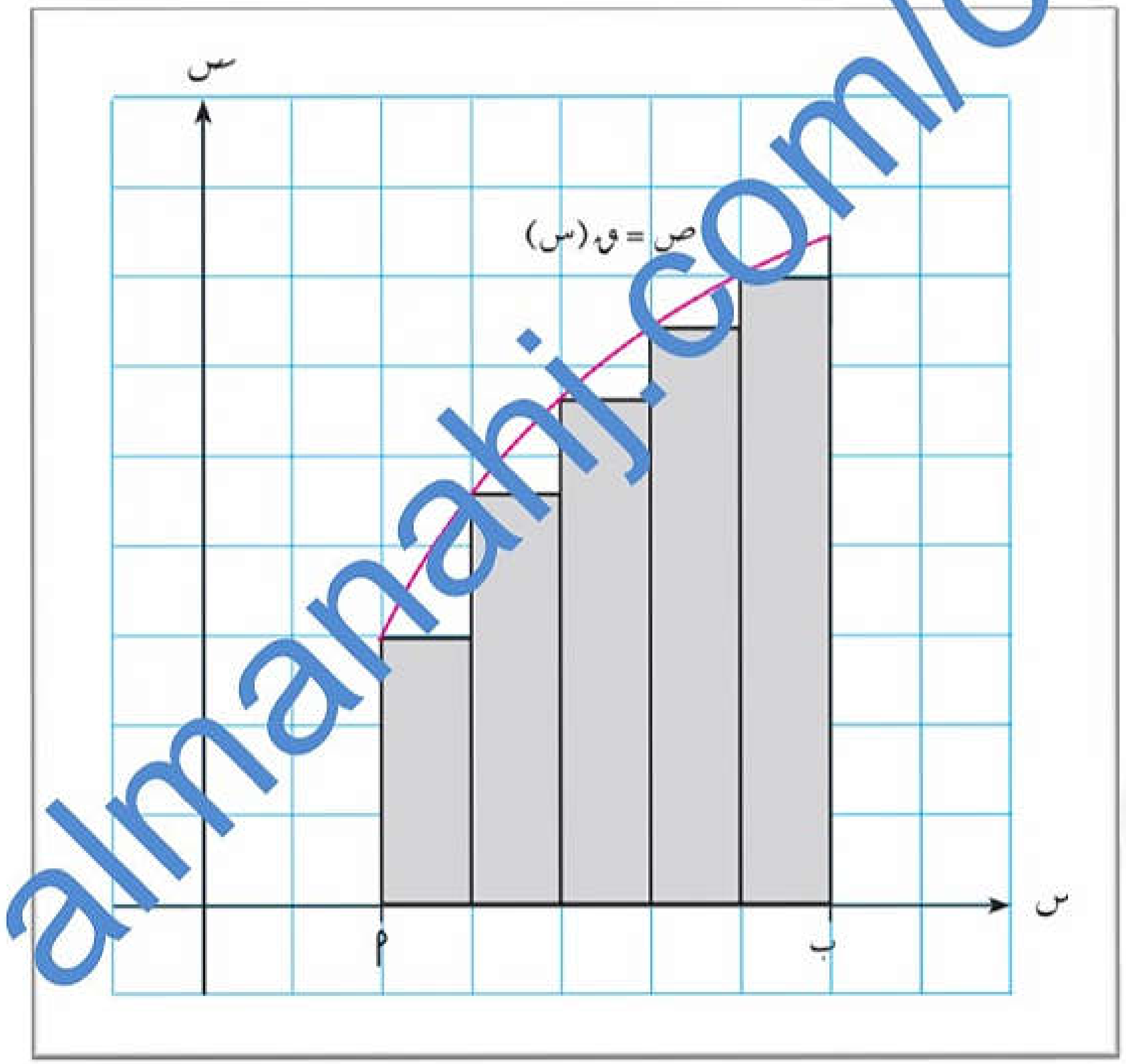
الفصل الدراسي الثاني
٢٠٢٠- ٢٠٢١م

بسم الله الرحمن الرحيم

الموضوع / حصة مراجعه لدروس الاختبار القصير (٣)

معلم المادة / أ.سلطان الرويشدي

الوحدة الرابعة / التكامل وتطبيقاته



وقفة تعلم

الدالة المقابلة

اذا كانت ق (س) دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]   فأن م (س) تسمى دالة مقابلة للدالة ق (س) اذا كان

م/ (س) = ق (س)

١) الدالة المقابلة ليست وحيدة إي أكثر من دالة .

٢) حاصل طرح دالتين مقابلتين لنفس الدالة هو عدد ثابت ق (س)$_1$ – ق (س)$_2$ = ثابت (جـ)

٣) إذا كانت كلاً من ق (س) و هـ (س) دالتين مقابلتين لدالة ما فأن ق/ (س) = هـ/ (س)

مثال تحقق من أن ن(س) = $\frac{٣}{٤}$س^{٤} − ٥ دالة مقابلة للدالة د(س) = ٣س^{٣}

الحل

ن′(س) = د(س) .

ن′(س) = $\frac{٣}{\cancel{٤}}$ × $\cancel{٤}$س^{٣}

ن′(س) = ٣س^{٣} = د(س)

∴ ن(س) دالة مقابلة للدالة د(س) .

مثال اذا كان م(س) ، هـ(س) دوال مقابلة للدالة ق(س) ، فإن (٢م − هـ)´(س) =

أ) ق(س) ب) ق´(س) ج) صفر د) ٢

∵ م´(س) = ق(س)

هـ´(س) = ق(س)

(٢م − هـ)´(س) = ٢م´(س) − هـ´(س)

= ٢ق(س) − ق(س)

= ق(س)

مثال اذا كانت م(س) = س^٣^ + أس^٢^ − ٣س + جـ دالة مقابلة للدالة ق(س) وكان ق(− ٢) = −١١ ، فجد الثابت (أ)

الحل

∵ مَ(س) = ق(س)

مَ(س) = ٣س^٢^ + ٢أس − ٣ ، ق(س) = ٣س^٢^ + ٢أس − ٣ ∵ ق(−٢) = −١١

−١١ = ٣ × (−٢)^٢^ + ٢أ × −٢ − ٣

−١١ = ١٢ − ٤أ − ٣ ، ٤أ = ٩ + ١١ ، ٤أ = ٢٠

أ = ٥

مثال إذا كان م١ (س) ، م٢ (س) دوال مقابلة للدالة ق (س) وكان ل (س) = م١ (س) − م٢ (س) أوجد /

١) ل/ (س)　　　٢) ل// (س)　　　٣) ل/ (أ) ، أ ∈ ص

الحل

∵ م١ (س) − م٢ (س) = ث　　∴ ل (س) = ث

١ ل/ (س) = صفر .　　　٢ ل// (س) = صفر

٣ ل/ (أ) = صفر .

مثال

اذا كان م$_{1}$(س) ، م$_{2}$(س) دوال مقابلة للدالة ق(س) ، وكان م$_{1}$(س) = ٣س^{2} − ٢س + ٥ ، م$_{2}$(٢) = ٤

فأوجد الدالة م$_{2}$(س)

الحل

م$_{2}$(س) = م$_{1}$(س) + ث ∴ م$_{2}$(س) = ٣س^{2} − ٢س + ٥ + ث ∵ م$_{2}$(٢) = ٤

٤ = ٣ × ٤ − ٢ × ٢ + ٥ + ث

٤ = ١٢ − ٤ + ٥ + ث

٤ = ١٣ + ث ∴ $\boxed{\text{ث} = -٩}$

∴ م$_{2}$(س) = ٣س^{2} − ٢س + ٥ − ٩

م$_{2}$(س) = ٣س^{2} − ٢س − ٤

مثال اذا كان $\frac{د}{دس}$ ∫ (م (س) + ٣ ق (س)) دس $\frac{د}{دس}$ = ٢ س^{٢} ، وكان $\frac{د}{دس}$ ∫ (ق (س) ـ م (س)) دس $\frac{د}{دس}$ = ٨ س

فأن قيمة ق (١) =

أ) -٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٨

باشتقاق الطرفين .

$\boxed{م(س) + ٣ ق(س) = ٤ س}$ ـ ① ، ق(س) ـ م(س) = ٨ ، م(س) = ق(س) ـ ٨

بالتعويض في ①

ق(س) ـ ٨ + ٣ ق(س) = ٤ س

ق(١) + ٣ ق(١) = ٤ × ١ + ٨ ، ٤ ق(١) = ١٢ ، = $\frac{١٢}{٤}$ =

مثال اذا كان م(س) ، هـ(س) دوال مقابلة للدالة ق(س) ، وكان ل(س) = ٤هـ(س) − ٧م(س) ، فإن ل′(س) =

أ) ٣ق(س)   ب) ٣   ج) −٣ق(س)   د) −٣

م′(س) = ق(س)

هـ′(س) = ق(س)

ل(س) = ٤هـ(س) − ٧م(س)

ل′(س) = ٤هـ′(س) − ٧م′(س)

ل′(س) = ٤ق(س) − ٧ق(س)

ل′(س) = −٣ق(س)

مثال اذا كان $\int$ ق(س) . دس = س^{٣} − س^{٢} ، فإن قيمة ق$'$(١) − ق(١)

أ) ٤ ب) ٣ ج) ٢ د) صفر

باشتقاق الطرفين .

ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س ⇐ ق(١) = ٣×١ − ٢×١ = ١

ق$'$(س) = ٦س − ٢ ⇐ ق$'$(١) = ٦×١ − ٢ = ٤

ق$'$(١) − ق(١) = ٤ − ١ = $\boxed{٣}$

مثال اذا كانت $م(س)$ دالة مقابلة للدالة $ق(س)$ ، وكان $\int (٦م(س)+س^{٢})\,ءس = \int \frac{س}{٢} ق(س)\,ءس$ ، فإن $ق(٤) =$

أ) -٢ ب) ٢ ج) ١ د) -١

$\because م'(س) = ق(س)$ ، باشتقاق الطرفين .

$٦م'(س) + ٢س = \frac{س}{٢} ق(س)$

$١٢ق(س) + ٤س = س ق(س)$

$١٢ق(٤) + ٤ \times ٤ = ٤ق(٤)$ ، $١٢ق(٤) - ٤ق(٤) = -١٦$

$٨ق(٤) = -١٦$ ، $= \frac{-١٦}{٨} =$

مثال إذا كانت ل (س) دالة مقابلة للدالة م (س) ، فان $\int$ ٢ م (س) × ل (س) . ء س =

أ) (م (س)$)^{٢}$ + ث

ب) (ل (س)$)^{٢}$ + ث

جـ) ٢ م (س) + ث

د) ٢ ل(س) + ث

المشتقة الدالة

ل َ(س) = م (س)

$\int$ ٢ ل َ(س) × ل (س) . ء س

= $\cancel{٢}$ × $\frac{(ل(س))^{٢}}{\cancel{٢}}$ + ث

= (ل (س) $)^{٢}$ + ث

وقفة تعلم

التكامل بالأجزاء

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين احدهما سهله الاشتقاق ويتلاشى المتغير فيها وتمثل (ق (س))

والثانية سهله التكامل ويكون أسها موجب أو سالب أو كسر وتمثل (ءهـ)

$$\int \text{ق} \,.\, \text{ءهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \,.\, \text{ءق}$$

تكامل حاصل ضرب دالتين = الأولى × تكامل الثانية − ∫ مشتقه الأولى × تكامل الثانية

$$\text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{ءق} \times \text{هـ}$$

مثال أوجد $\int س^{٥} \times \left(٢ - \frac{١}{س}\right)^{٤} ءس$ باستخدام التكامل **بالأجزاء**

$\left(\frac{٢}{١} - \frac{١}{س}\right)^{٤}$

$\int س^{٥} \times \left(\frac{٢س - ١}{س}\right)^{٤} ءس = \int \cancel{س^{٥}} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{\cancel{س^{٤}}} ءس = \int س\,(٢س - ١)^{٤} ءس$

$ق = س \longrightarrow ق' = ١$

$ع' = (٢س - ١)^{٤} \longrightarrow ع = \frac{١}{٢} \times \frac{(٢س - ١)^{٥}}{٥} = \frac{١}{١٠}(٢س - ١)^{٥}$

$= س \times \frac{١}{١٠}(٢س - ١)^{٥} - \int \frac{١}{١٠}(٢س - ١)^{٥} ءس$

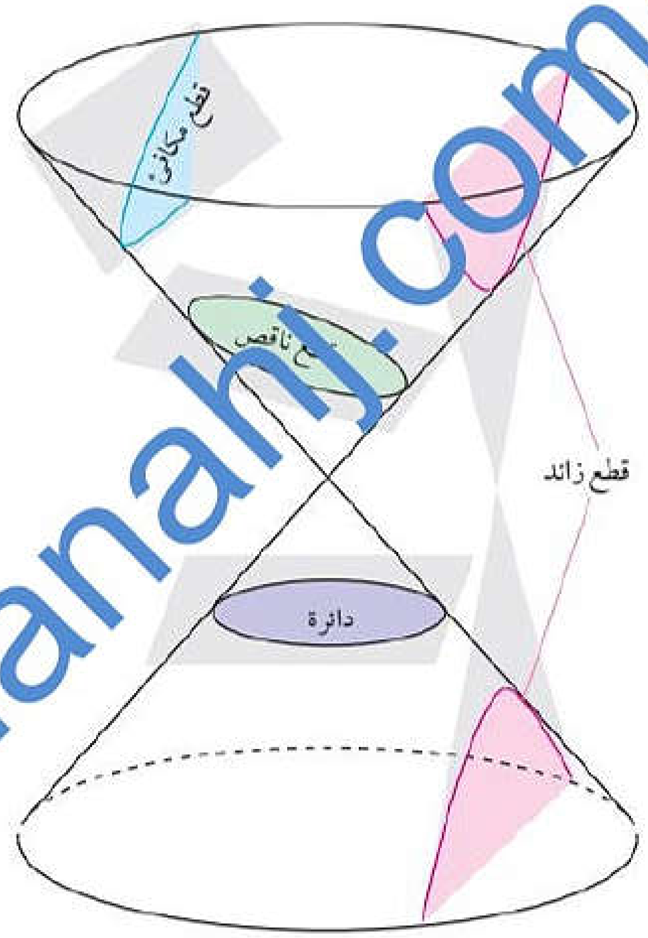
$= \frac{١}{١٠} س (٢س - ١)^{٥} - \frac{١}{١٠} \times \frac{١}{٢} \times \frac{(٢س - ١)^{٦}}{٦} + ث$

مثال أوجد $\int$ (س − ٢)^{٢} (س + ١)^{٥} . ءس باستخدام التكامل **بالأجزاء**

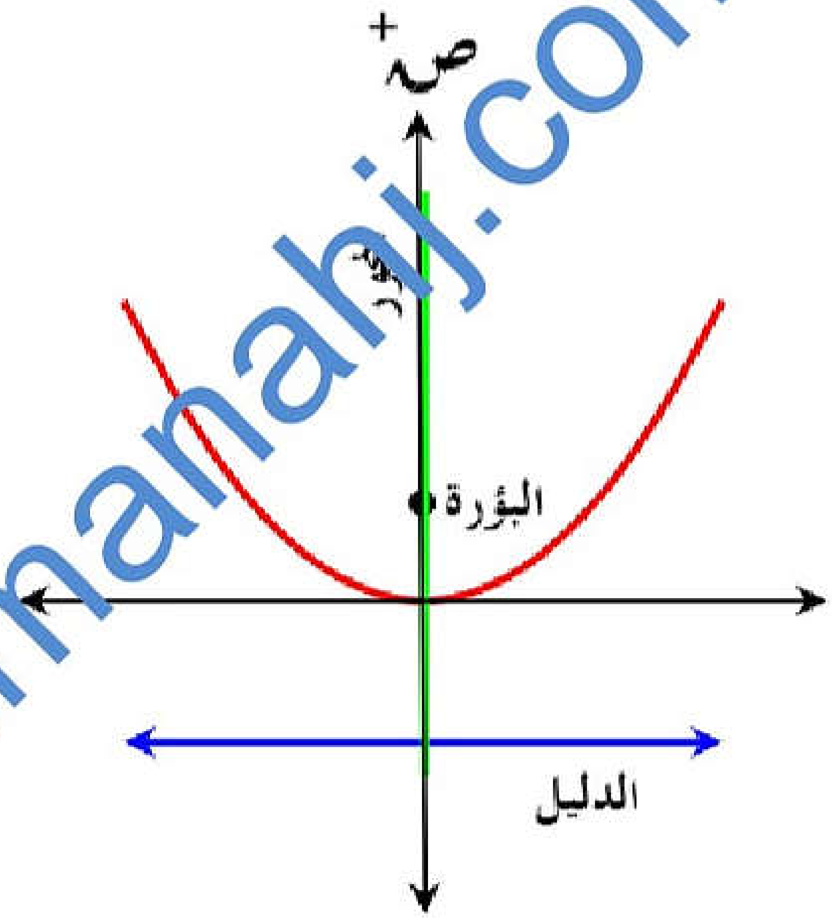
الأشارة	ق	ءهـ
+	(س − ٢)^{٢}	(س + ١)^{٥}
−	٢(س − ٢) = ٢س − ٤	$\frac{١}{٦}$ (س + ١)^{٦}
+	٢	$\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٧}$ (س + ١)^{٧} = $\frac{١}{٤٢}$ (س + ١)^{٧}
−	صفر	$\frac{١}{٤٢} \times \frac{١}{٨}$ (س + ١)^{٨} = $\frac{١}{٣٣٦}$ (س + ١)^{٨}

= $\frac{١}{٦}$ (س − ٢)^{٢} (س + ١)^{٦} − $\frac{١}{٤٢}$ (٢س − ٤)(س + ١)^{٧} + $\frac{٢}{٣٣٦}$ (س + ١)^{٨} + ث

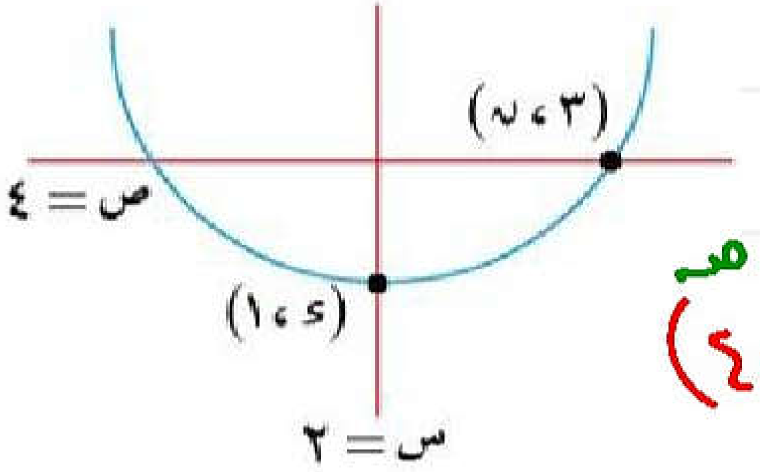
الوحدة السادسة / القطوع المخروطية



القطع المكافئ



مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الممثل بالشكل



$(\text{س} - \text{د})^2 = 4\text{أ}(\text{ص} - \text{هـ})$ ⟵ معادلة القطع

من الرسم ⟸ د = ٢ ∴ الرأس $(\overset{\text{د}}{٢}، \overset{\text{هـ}}{١})$ ، ويمر بالنقطة $(\overset{\text{س}}{٣}، \overset{\text{ص}}{٤})$

$(٣ - ٢) = ٤\,\text{أ}\,(٤ - ١)$

$١ = ٤\,\text{أ} \times ٣$

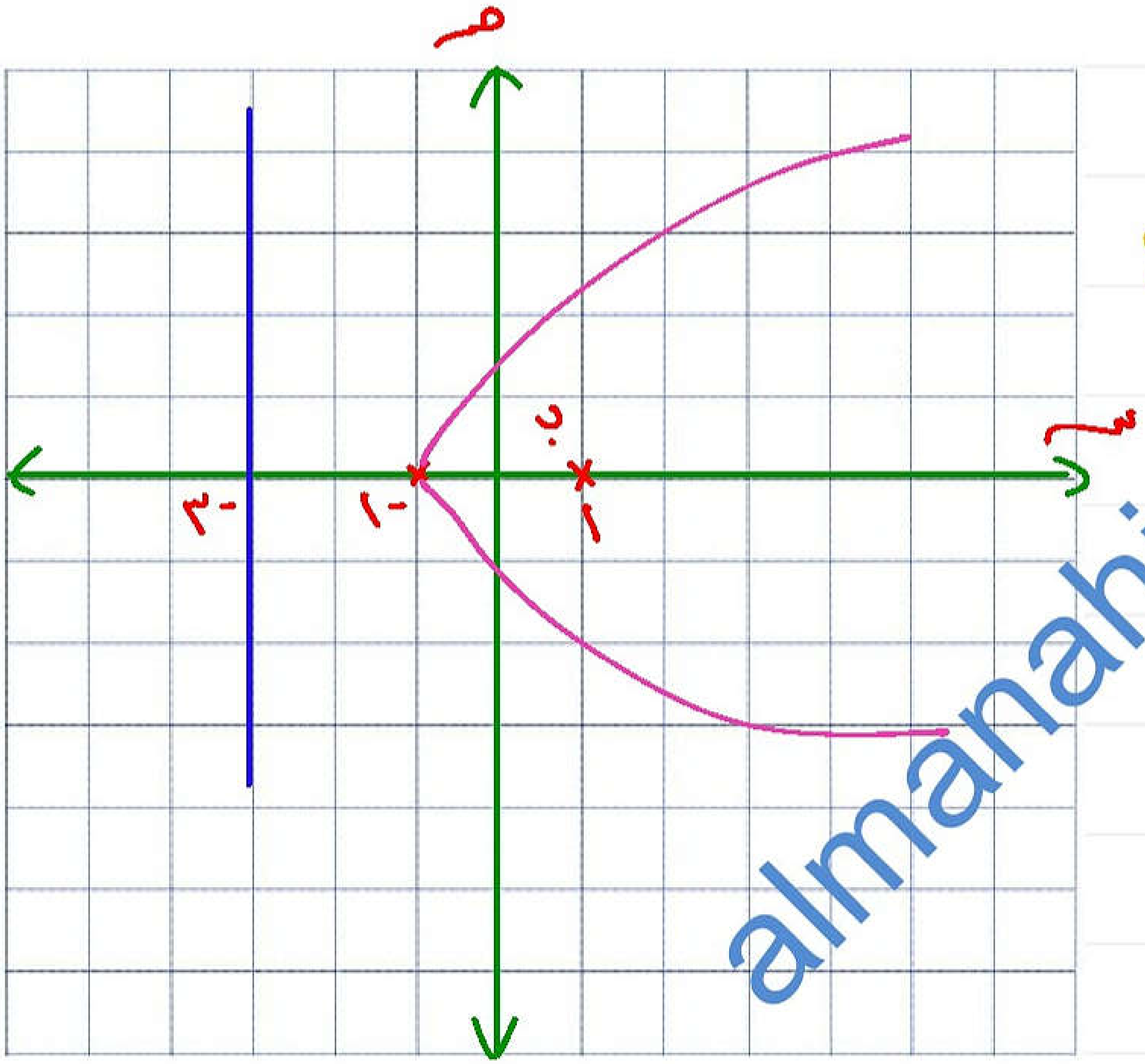
$١ = ١٢\,\text{أ}$

$\boxed{\text{أ} = \frac{١}{١٢}}$

∴ معادلة القطع ⟸ $(\text{س} - ٢)^2 = \cancel{٤} \times \frac{١}{\cancel{١٢}}(\text{ص} - ١)$

$(\text{س} - ٢)^2 = \frac{١}{٣}(\text{ص} - ١)$

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (١، ٠) ومعادلة الدليل س = −٣



٢أ = | ب − الدليل |

٢أ = | ١ − (−٣) | ، ٢أ = | ٤ |

أ = ٢

∴ رأس القطع (−١، ٠)
(د، هـ)

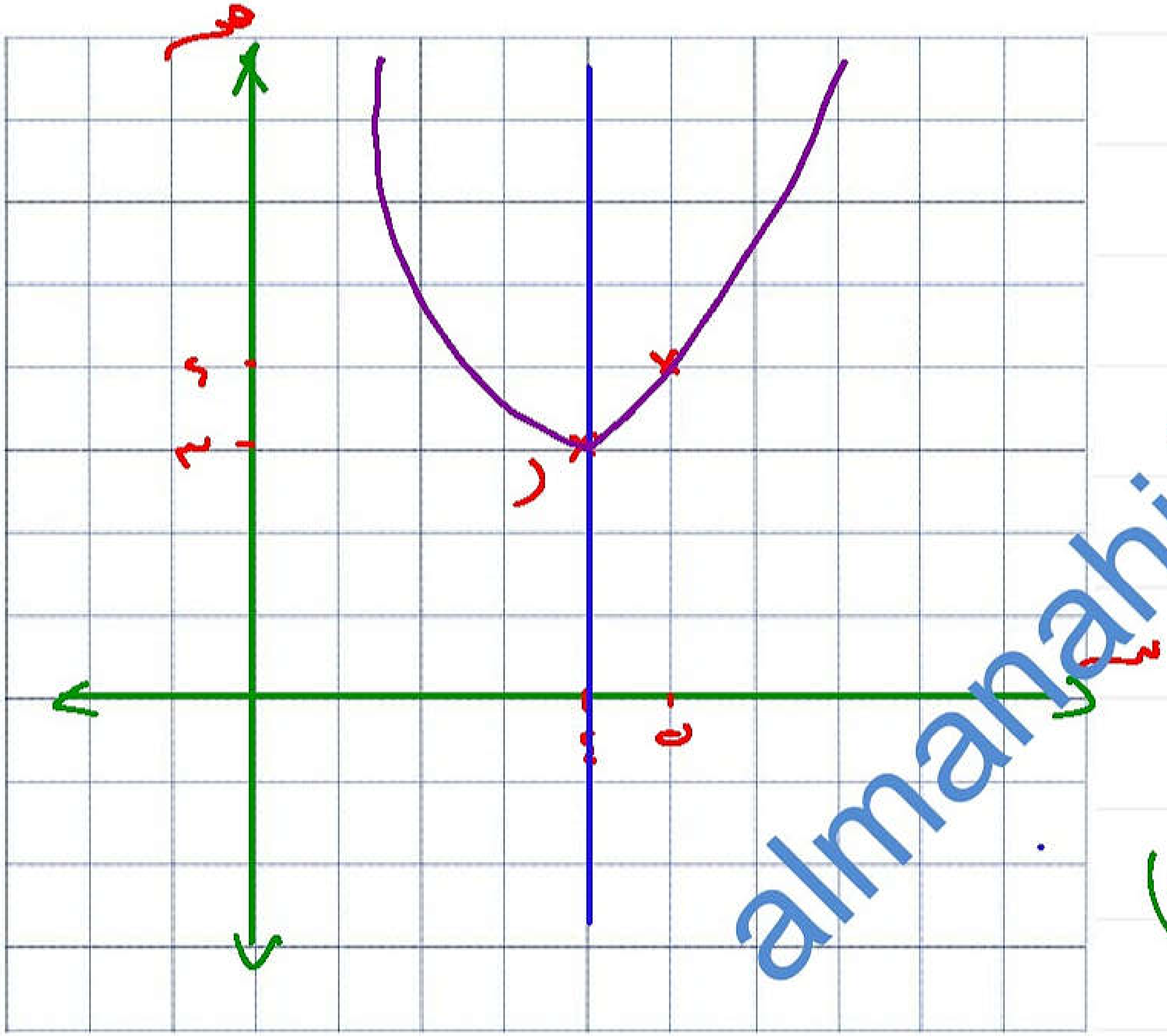
معادلة القطع = (ص − هـ)^٢ = ٤أ (س − د)

(ص − ٠)^٢ = ٤ × ٢ (س + ١)

⟸ ص^٢ = ٨ (س + ١)

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٣،٤) ومحوره يوازي محور الصادات ومنحناه يمر بالنقطة (٥،٤)

معادلة القطع ⟸ (س − د)^2 = ٤أ (ص − هـ)



(٥ − ٤)^2 = ٤أ (٤ − ٣)

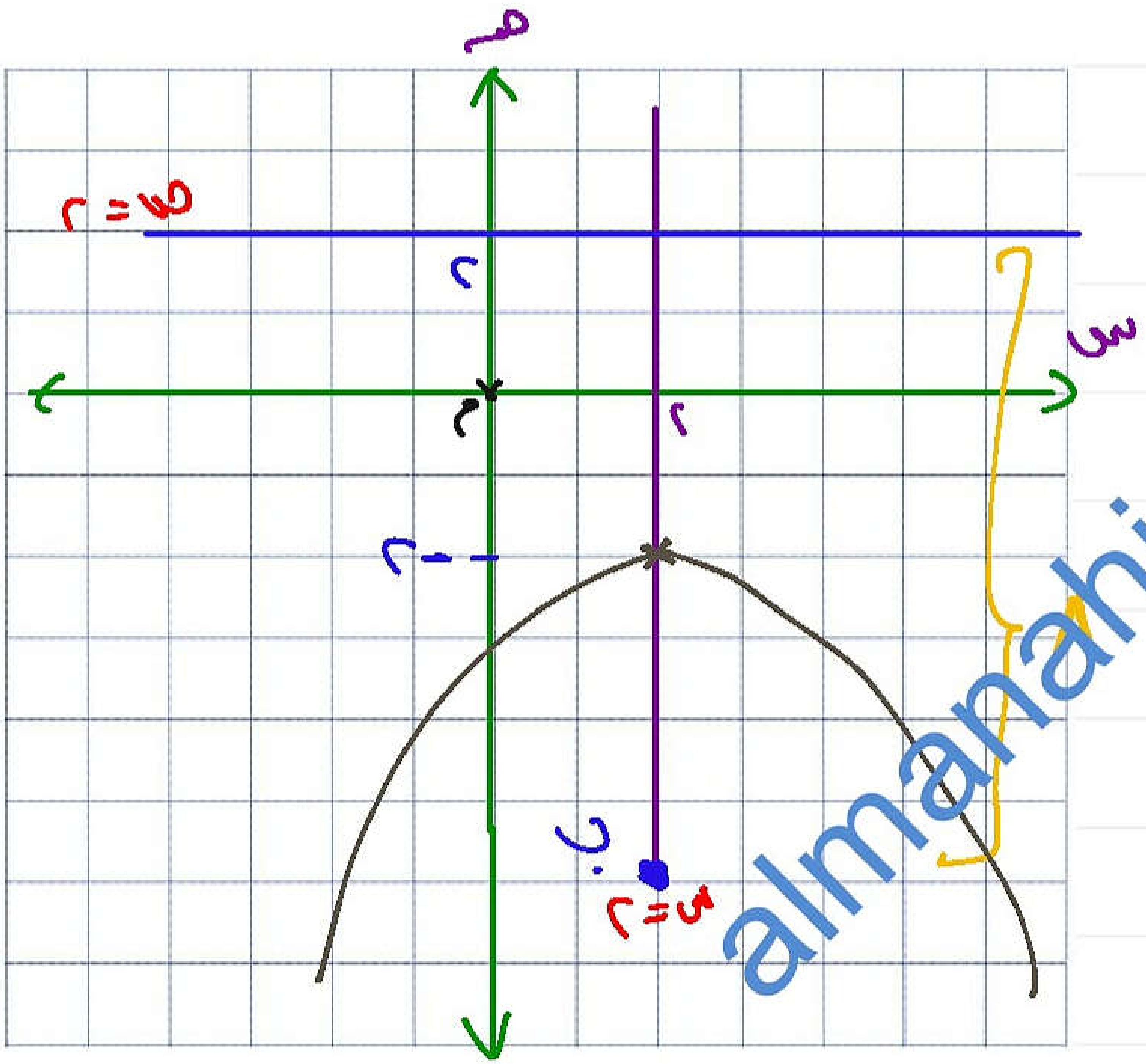
١ = ٤أ × ١ ∴ ٤أ = ١

∴ أ = $\frac{1}{4}$

∴ المعادلة هي ⟸ (س − ٤)^2 = ٤ × $\frac{1}{4}$ (ص − ٣)

(س − ٤)^2 = (ص − ٣)

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره س = ٢ ودليله ص = ٢ وتبعد بؤرته عن دليله (٨) وحدات وهو مقعر للأسفل



المسافة ما بين الدليل والبؤرة = ٢أ

٨ = ٢أ

$\boxed{أ = ٤}$

الرأس (د ، هـ) = (٢ ، ٢ - ٤) = (٢ ، -٢)

معادلة القطع ⟸ $(س - د)^٢ = -٤أ (ص - هـ)$

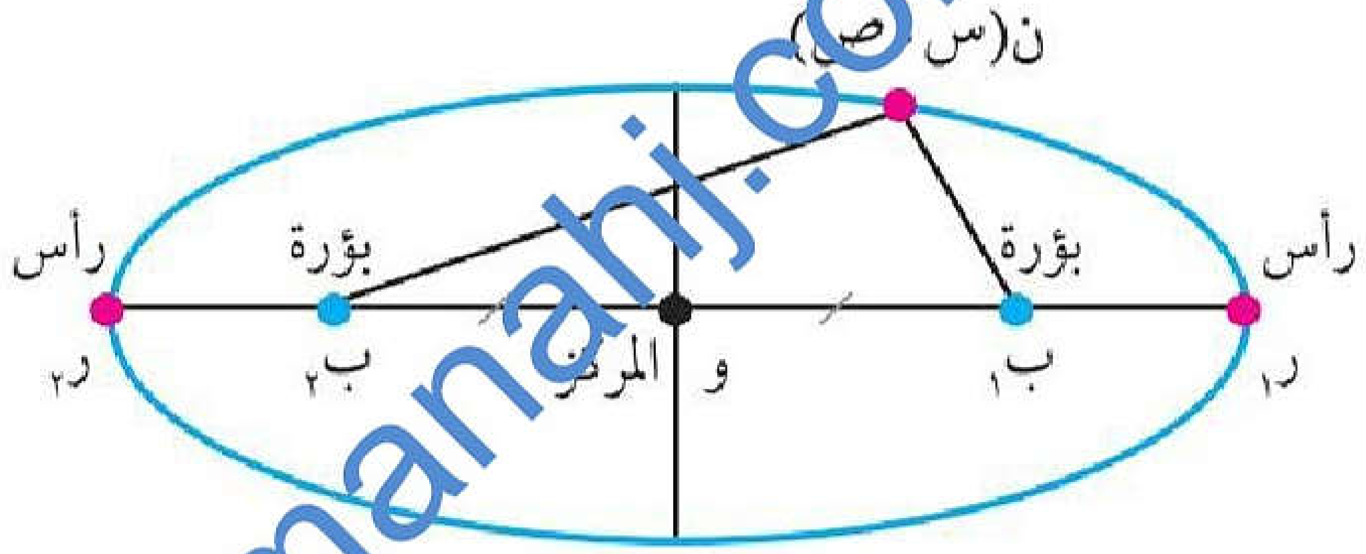
$(س - ٢)^٢ = -٤ \times ٤ (ص + ٢)$

$(س - ٢)^٢ = -١٦ (ص + ٢)$

#

مثال أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه على المستقيم ص = س ويمر بالنقطتين (٠، ٣) (٤، ٣)

القطع الناقص



مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٤، −٢) (١٢، −٢) ورأساه (١٣، −٢) (٣، −٢)

الحل

المقطع يبين .

م = ((٤ + ١٢) / ٢ ، (−٢ − ٢) / ٢) = (٨ ، −٢)

٢جـ = |٤ − ١٢| = |−٨| = ٨

٢جـ = ٨ ∴ [illegible]

٢م = |١٣ − ٣| = |١٠| = ١٠

٢م = ١٠ ∴ [illegible]

جـ² = م² − ب² ، ١٦ = ٢٥ − ب² ، ب² = ٢٥ − ١٦

$\boxed{\text{ب}^2 = 9}$

المعادلة هي: (س − د)² / م² + (ص − هـ)² / ب² = ١

(س − ٨)² / ٢٥ + (ص + ٢)² / ٩ = ١ #

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر منحناه بالنقطتين $(٢ ، \sqrt{٣})$ $(٠، ٢)$ والقطع ناقص سيني

تحقق المعادلة ⟸

الحل

م $(٠ ، ٠)$ ، معادلة القطع ⟸ $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

$(٠ ، ٢)$ ⟸ $\frac{٠}{أ^٢} + \frac{٤}{ب^٢} = ١$ ⟸ $\frac{٤}{ب^٢} = ١$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ٤}$

$(٢ ، \sqrt{٣})$ ⟸ $\frac{٤}{أ^٢} + \frac{٣}{٤} = ١$ ⟸ $\frac{٤}{أ^٢} = ١ - \frac{٣}{٤}$ ⟸ $\frac{٤}{أ^٢} = \frac{١}{٤}$ ⟸ $\boxed{أ^٢ = ١٦}$

معادلة القطع ⟸ $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$ #

مثال أوجد معادلة القطع الناقص الذي اذا كانت معادلتا محوريه س = ٢ ، ص = ٣ واحدى بؤرتيه (٢،٤) وطول محوره الاصغر (٨)

الحل

لا تنسوني من دعواتكم الحارة

معلم المادة / أ.سلطان الرويشدي