شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج العمانية

ملخص شرح درس الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 2023-12-20 05:31:19 | اسم المدرس: أحمد عمار

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر

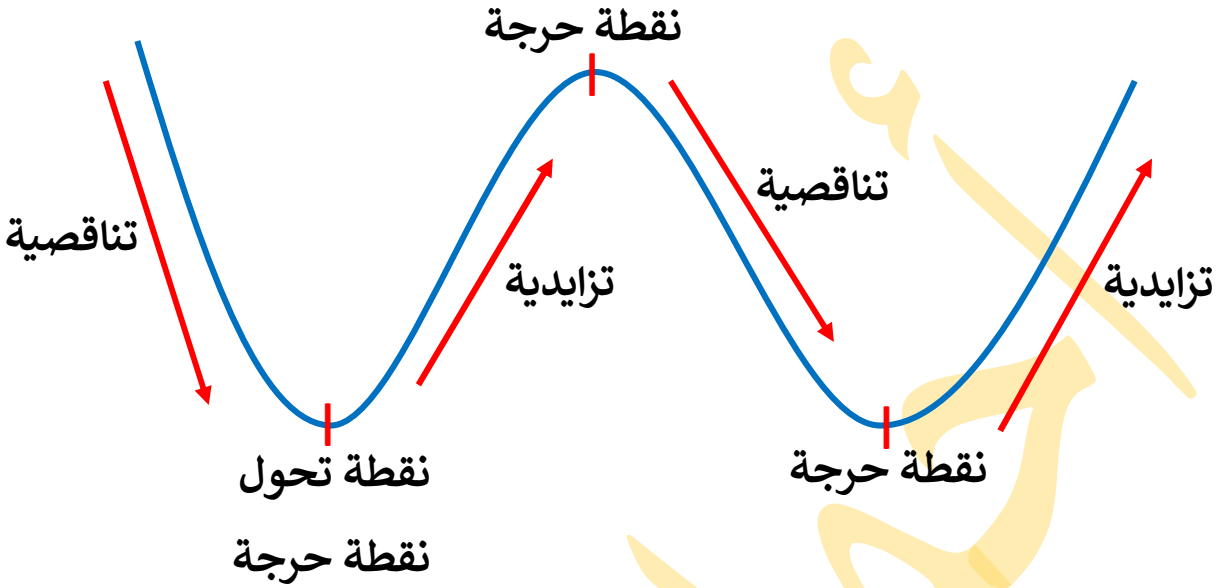
روابط مواد الصف الثاني عشر على تلغرام

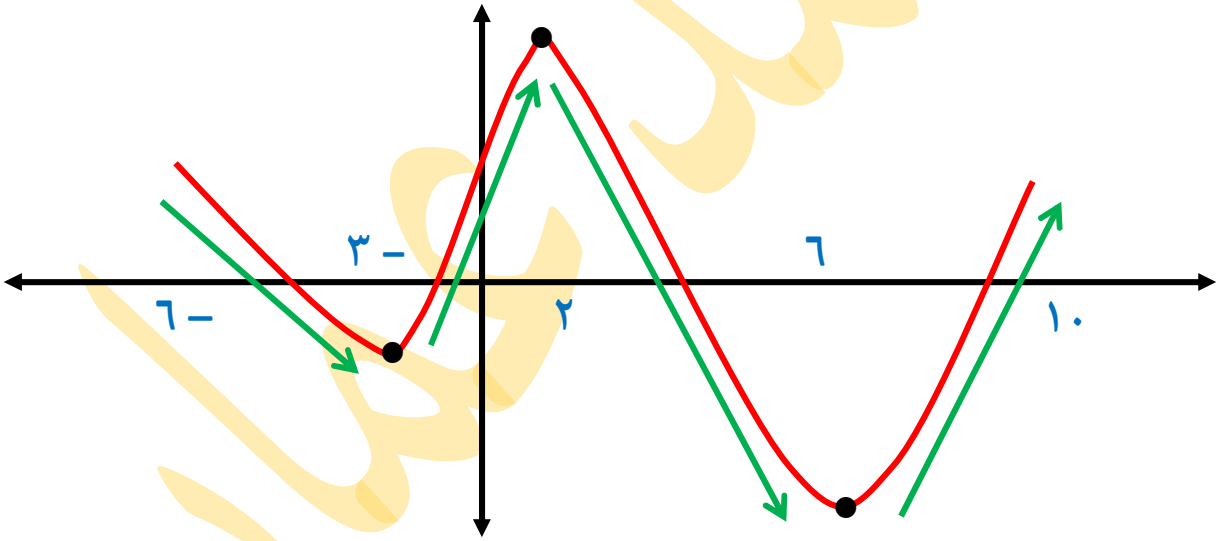
التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول

1	كراسة أسئلة الاختيار من المتعدد
2	اختبار قصير تحريبي
3	تمارين على درس قاعدة السلسلة
4	حل أمثلة وتمارين درس قاعدة السلسلة
5	حل أسئلة درس مشتقة دالة القوة

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة





الدالة تناقصية في الفترة $-٦ < س < -٣$ ، $٢ < س < ٦$

الدالة تزايدية في الفترة $-٦ < س < -٣$ ، $٦ < س < ١٠$

النقاط الحرجة هي $س = -٣$ ، $س = ٢$ ، $س = ٦$

كيف نعرف النقاط الحرجة من غير الرسم

(١) نعين المشتقة الأولى

(٢) نساوى المشتقة الأولى بالصفر ونستنتج قيم س

(٣) تعيين قيم س وهى النقاط الحرجة

كيف نعرف فترات التزايد والتناقص

(١) نعين النقاط الحرجة

(٢) نعين إشارات المشتقة على كل جانب من قيم النقاط الحرجة

ابحث متى تكون الدالة متزايدة ومتى تكون متناقصة

اذا علمت أن د(س) = ٤س^{٣} – ١٥س^{٢} – ٧٢س – ٨

الحل

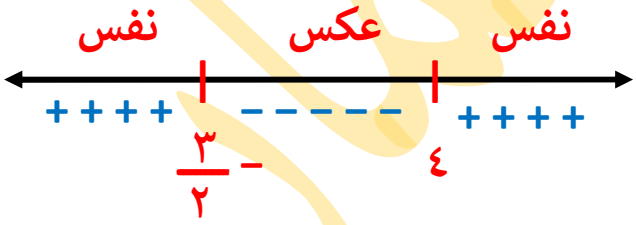
د′(س) = ١٢س^{٢} – ٣٠س – ٧٢

١٢س^{٢} – ٣٠س – ٧٢ = ٠ بالقسمة ÷ ٦

٢س^{٢} – ٥س – ١٢

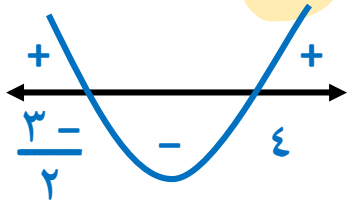
(س – ٤)(٢س + ٣) = ٠

س = ٤ ، س = $\frac{-٣}{٢}$



∴ الدالة متزايدة في الفترة س < ٤ ، س < $\frac{-٣}{٢}$

الدالة متناقصة في الفترة $\frac{-٣}{٢}$ < س < ٤

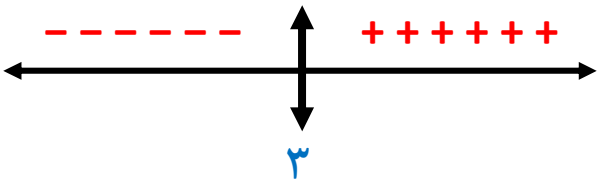


ابحث تزايد وتناقص الدالة د(س) = س^{٢} – ٦س + ٩

د′(س) = ٢س – ٦

٢س – ٦ = ٠

س = ٣



نحدد قيمة س على يمين ٣ ويسار ٣

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (٤) = ٢ × ٤ – ٦ = ٢ > ٠

د′ (٢) = ٢ × ٢ – ٦ = – ٢ < ٠

∴ الدالة متزايدة في س > ٣

الدالة متناقصة في س < ٣

كتاب الطالب صـــــ ١٦٧ رقم ٣

أوجد قيم س عندما تكون د(س) = $\frac{١}{٦}$ (٥ – ٢س)^{٣} + ٤س متزايدة

د′(س) = $\frac{١}{٦}$ × ٣ × (٥ – ٢س)^{٢} × – ٢ + ٤

= – (٥ – ٢س)^{٢} + ٤

∴ د′ (س) = ٠

– (٥ – ٢س)^{٢} + ٤ = ٠

٤ = (٥ – ٢س)^{٢}

٢ = ٥ – ٢س

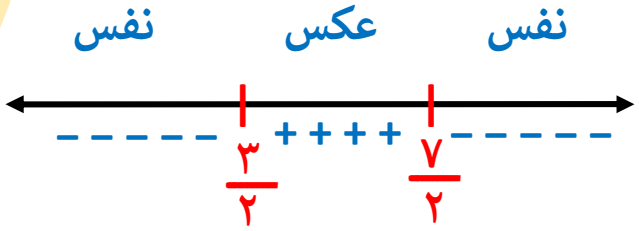
٢س = ٥ – ٢ = ٣

س = $\frac{٣}{٢}$

– ٢ = ٥ – ٢س

٢س = ٥ + ٢ = ٧

س = $\frac{٧}{٢}$

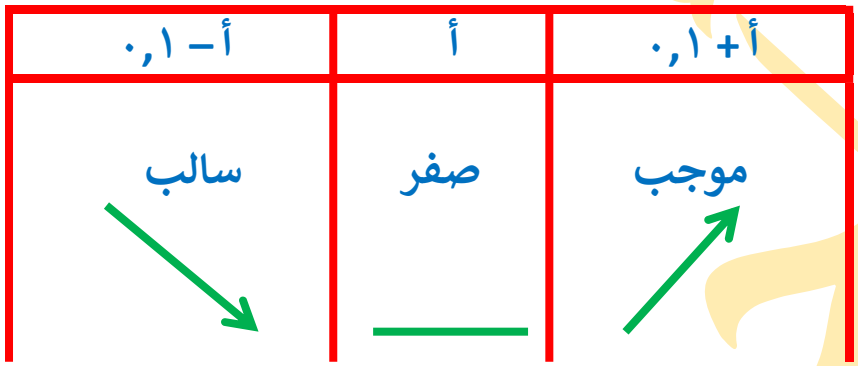


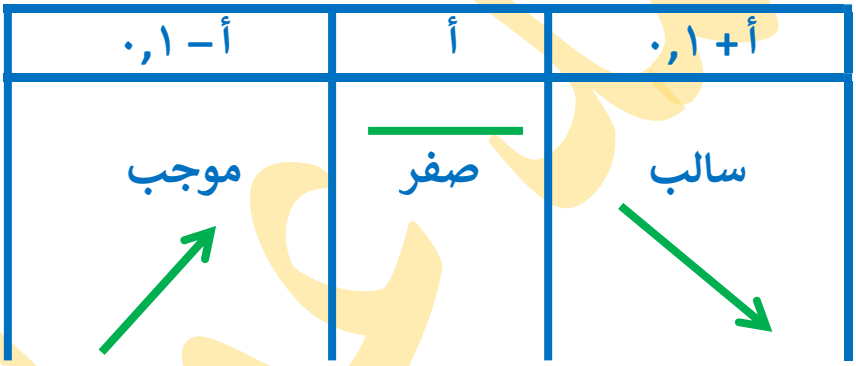
موجبة في الفترة $\frac{٣}{٢}$ < س < $\frac{٧}{٢}$

س = أ نقطة حرجة د′ (أ) = ٠

كيف نعرف أن النقطة الحرجة تكون عظمى أم صغرى

نعين إشارة المشتقة على جانبي النقطة أ





د(س) = س^{٣} – ١٢س + ٥ عين النقاط الحرجة وحدد نوعها

د′(س) = ٣س^{٢} – ١٢ = ٠

٣س^{٢} = ١٢ س^{٢} = ٤

س = ٢ ، س = – ٢

لتعيين احداثى النقطة نعوض في معادلة المنحنى

بينما لتحديد التزايد والتناقص نعوض في المشتقة الأولى

د(٢) = ٢^{٣} – ١٢ × ٢ + ٥ = – ١١

د(– ٢) = (–٢)^{٣} – ١٢ × – ٢ + ٥ = ٢١

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي (٢ ، – ١١) ، (– ٢ ، ٢١)

تعيين نوع النقاط الحرجة

أولا تحديد نوع النقطة (٢ ، – ١١)

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	١,٢٣ > ٠ موجب	صفر	– ١,١٧ > ٠ سالب

∴ النقطة (٢ ، – ١١) صغرى

ثانيا تحديد نوع النقطة (– ٢ ، ٢١)

	– ١,٩	– ٢	– ٢,١
التعويض في المشتقة	– ١,١٧ < ٠ موجب	صفر	١,٢٣ < ٠ سالب

∴ النقطة (– ٢ ، ٢١) عظمى

تحديد نوع النقطة الحرجة

طريقة أخرى وهى : اختبار المشتقة الثانية

اذا كان ص" < ٠ سالب

∴ النقطة الحرجة تعتبر نقطة عظمى

اذا كان ص" > ٠ موجب

∴ النقطة الحرجة تعتبر نقطة صغرى

اذا كان ص" = ٠

اختبار المشتقة الثانية فشل لا يمكن استخدامه والبديل استخدام الطريقة الأولى

ص = ٥س^{٢} + ٧س – ٩ حدد احداثى النقطة الحرجة وبين نوعها

ص′ = ١٠ س + ٧

١٠س + ٧ = ٠ س = $\frac{-٧}{١٠}$

بالتعويض في معادلة المنحنى لتعيين الاحداثى

ص = ٥ × $(\frac{-٧}{١٠})^{٢}$ + ٧ × $(\frac{-٧}{١٠})$ – ٩ = $\frac{-٢٢٩}{٢٠}$

∴ احداثى النقطة الحرجة $(\frac{-٧}{١٠}، \frac{-٢٢٩}{٢٠})$

لتعيين النوع ص" = ١٠ > ٠

∴ النقطة الحرجة $(\frac{-٧}{١٠}، \frac{-٢٢٩}{٢٠})$ تمثل قيمة صغرى

أوجد احداثيات النقاط الحرجة للمنحنى ص = ١٠ + ٩س – ٣س^{٢} – س^{٣} بإستخدام اختبار المشتقة الثانية

ص′ = ٩ – ٦س – ٣س^{٢}

٩ – ٦س – ٣س^{٢} = ٠ ÷ – ٣

س^{٢} + ٢س – ٣ = ٠

(س – ١)(س + ٣) = ٠

عند س = ١

لتعيين الاحداثى الصادى نعوض في عادلة المنحنى

ص = ١٠ + ٩ × ١ – ٣ × ١^{٢} – ١^{٣}

ص = ١٥

عند س = – ٣

ص = ١٠ + ٩ × –٣ – ٣ × (–٣)^{٢} – (–٣)^{٣}

ص = – ١٧

∴ النقاط الحرجة هي (١ ، ١٥) ، (–٣ ، – ١٧)

تعيين النوع

ص″ = – ٦ – ٦س

عند س = ١ ∴ ص″ = – ٦ – ٦ × ١ = – ١٢ < ٠ ∴ (١ ، ١٥) نقطة عظمى

عند س = – ٣ ∴ ص″ = – ٦ – ٦ × –٣ = ١٢ > ٠ ∴ (–٣ ، – ١٧) نقطة صغرى

نقطة الإنعطاف

هي عندها المشتقة = صفر

عند بحث الإشارة للمشتقة الأولى فإذا كان

كلا الجانبين موجبين معا تكون نقطة انعطاف

كلا الجانبين سالبين معا تكون نقطة انعطاف

أحد الجانبين موجب والآخر سالب تكون نقطة حرجة

أوجد ص′ اذا كان ص = س^{٣} وأوجد ص′ ثم حدد قيم س عند ص′ = ٠ وحدد نوع النقطة

ص = س^{٣} ص′ = ٣س^{٢}

٣س^{٢} = ٠ س = ٠

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ص″ = ٦س

عند س = ٠ ∴ ص″ = ٠

∴ اختبار المشتقة الثانية فشل

∴ نستخدم الجدول لتحديد نوع النقطة

	٠,١	٠	٠,١ −
التعويض في د′ (س)	٠ < ٠,٠٣ موجب	صفر	٠ < ٠,٠٣ موجب

∴ النقطة (٠ ، ٠) نقطة انعطاف لا يوجد له نقطة حرجة

تمارين ٤-٥

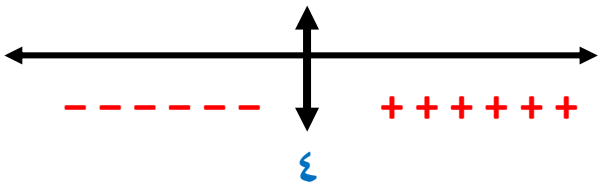
(١) أوجد مجموعة قيم س عندما تكون كل دالة مما يأتي متزايدة :

(أ) د(س) = س^{٢} – ٨س + ٢

د′ (س) = ٢س – ٨

٢س – ٨ = ٠

س = ٤



نحدد قيمة س على يمين ٤ ويسار ٤

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (٥) = ٢ × ٥ – ٨ = ٢ > ٠

د′ (٣) = ٢ × ٣ – ٨ = – ٢ < ٠

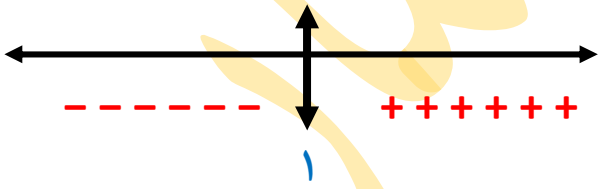
∴ الدالة متزايدة في س > ٤

(ب) د(س) = ٢س^{٢} – ٤س + ٧

د′ (س) = ٤س – ٤

٤س – ٤ = ٠

س = ١



نحدد قيمة س على يمين ١ ويسار ١

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (٢) = ٤ × ٢ – ٤ = ٤ > ٠

د′ (٠) = ٢ × ٠ – ٤ = – ٤ < ٠

∴ الدالة متزايدة في س > ١

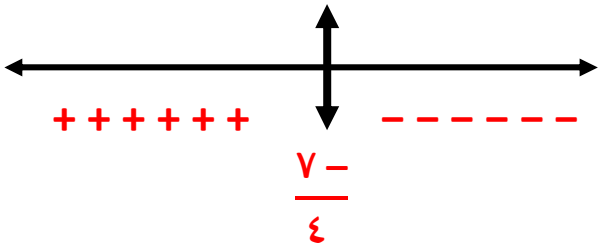
(ج) د(س) = ٥ – ٧س – ٢س^{٢}

د′ (س) = – ٧ – ٤س

– ٤س – ٧ = ٠

– ٤س = ٧

س = $\frac{-٧}{٤}$



نحدد قيمة س على يمين $\frac{-٧}{٤}$ ويسار $\frac{-٧}{٤}$

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (– ١) = – ٧ – ٤ × – ١ = – ٣ < ٠

د′ (– ٢) = – ٧ – ٤ × – ٢ = + ١ > ٠

∴ الدالة متزايدة في س < $\frac{-٧}{٤}$

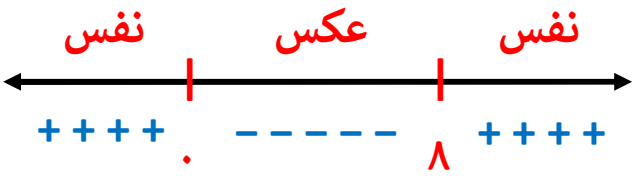
(د) د(س) = س^{٣} – ١٢س^{٢} + ٢

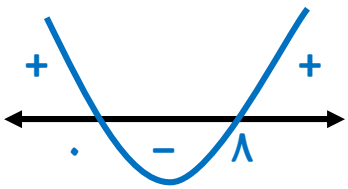
د′ (س) = ٣س^{٢} – ٢٤س

٣س^{٢} – ٢٤س = ٠

٣س (س – ٨) = ٠

٣س = ٠	س – ٨ = ٠
س = ٠	س = ٨





∴ الدالة متزايدة في الفترة س > ٨ ، س < ٠

(هـ) د(س) = ٢س^{٣} – ١٥س^{٢} + ٢٤س + ٦

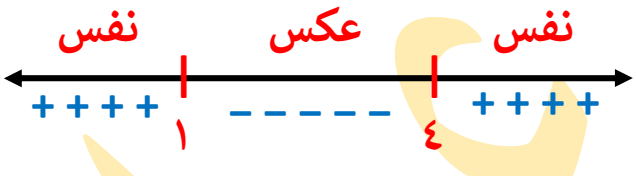
د′ (س) = ٦س^{٢} – ٣٠س + ٢٤

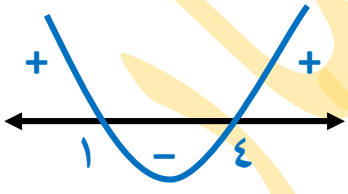
٦س^{٢} – ٣٠س + ٢٤ = ٠

س^{٢} – ٥س + ٤ = ٠

(س – ١)(س – ٤) = ٠

س – ١ = ٠	س – ٤ = ٠
س = ١	س = ٤



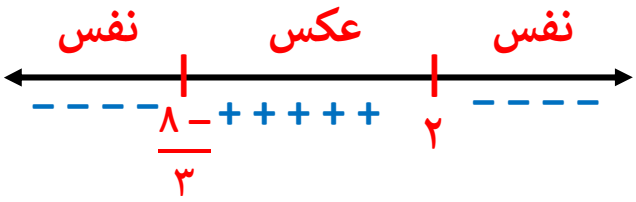


∴ الدالة متزايدة في الفترة س > ٤ ، س < ١

(و) د(س) = ١٦ + ١٦س – س^{٢} – س^{٣}

د′ (س) = ١٦ – ٢س – ٣س^{٢}

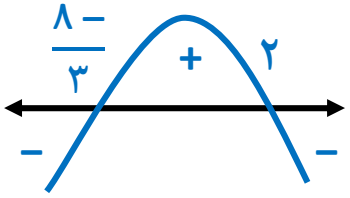
– ٣س^{٢} – ٢س + ١٦ = ٠



٣س^{٢} + ٢س – ١٦ = ٠

(٣س + ٨)(س – ٢) = ٠

٣س + ٨ = ٠	س – ٢ = ٠
س = $\frac{-٨}{٣}$	س = ٢



∴ الدالة متزايدة في الفترة $\frac{-٨}{٣}$ < س < ٢

(٢) أوجد مجموعة قيم س عندما تكون كل دالة مما يأتي متناقصة :

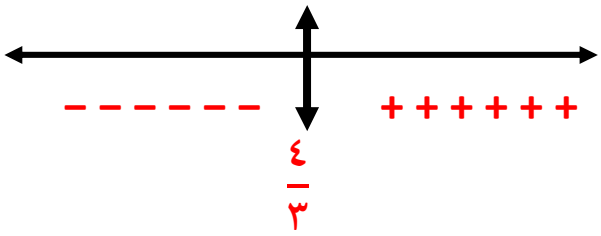
(أ) د(س) = ٣س^{٢} – ٨س + ٢

د′ (س) = ٦س – ٨

٦س – ٨ = ٠

٦س = ٨

س = $\frac{٤}{٣}$



نحدد قيمة س على يمين $\frac{٤}{٣}$ ويسار $\frac{٤}{٣}$

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (٢) = ٦ × ٢ – ٨ = ٤ > ٠

د′ (١) = ٦ × ١ – ٨ = – ٢ < ٠

∴ الدالة متناقصة في س < $\frac{٤}{٣}$

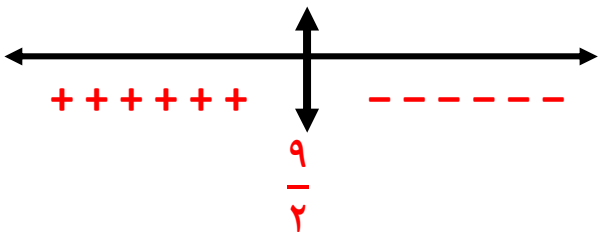
(ب) د(س) = ١٠ + ٩س – س^{٢}

د′ (س) = ٩ – ٢س

– ٢س + ٩ = ٠

– ٢س = – ٩

س = $\frac{٩}{٢}$



نحدد قيمة س على يمين $\frac{٩}{٢}$ ويسار $\frac{٩}{٢}$

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (٥) = ٩ – ٢ × ٥ = – ١ < ٠

د′ (٤) = ٩ – ٢ × ٤ = ١ > ٠

∴ الدالة متناقصة في س > $\frac{٩}{٢}$

(ج) د(س) = ٢س^{٣} – ٢١س^{٢} + ٦٠س – ٥

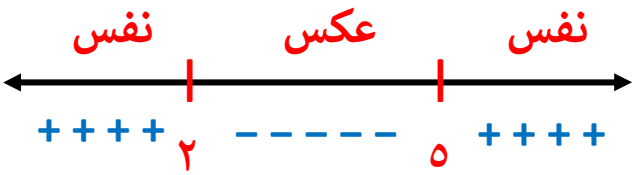
د′ (س) = ٦س^{٢} – ٤٢س + ٦٠

٦س^{٢} – ٤٢س + ٦٠ = ٠

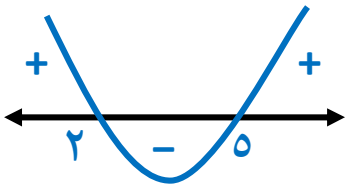
س^{٢} – ٧س + ١٠ = ٠

(س – ٥)(س – ٢)

س – ٥ = ٠	س – ٢ = ٠
س = ٥	س = ٢



∴ الدالة متناقصة في الفترة ٢ < س < ٥



(د) د(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س + ٥

د′ (س) = ٣س^{٢} – ٦س – ٩

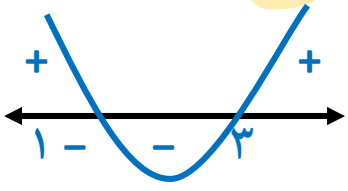
٣س^{٢} – ٦س – ٩ = ٠

س^{٢} – ٢س – ٣ = ٠

(س – ٣)(س + ١)

س – ٣ = ٠	س + ١ = ٠
س = ٣	س = – ١

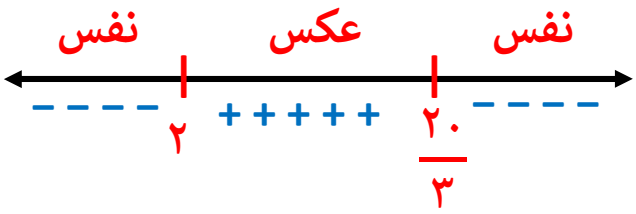
∴ الدالة متناقصة في الفترة – ١ < س < ٣



(هـ) د(س) = – ٤٠س + ١٣س^{٢} – س^{٣}

د′ (س) = – ٤٠ + ٢٦س – ٣س^{٢}

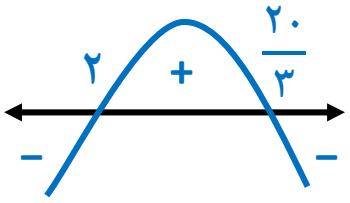
– ٤٠ + ٢٦س – ٣س^{٢} = ٠



– ٣س^{٢} + ٢٦س – ٤٠ = ٠

٣س^{٢} – ٢٦س + ٤٠ = ٠

(٣س – ٢٠)(س – ٢) = ٠



٣س – ٢٠ = ٠ | س – ٢ = ٠

س = ٢٠/٣ | س = ٢

∴ الدالة متناقصة في الفترة س > ٢٠/٣ ، س < ٢

(و) د(س) = ١١ + ٢٤س – ٣س^{٢} – س^{٣}

د′ (س) = ٢٤ – ٦س – ٣س^{٢}

٢٤ – ٦س – ٣س^{٢} = ٠

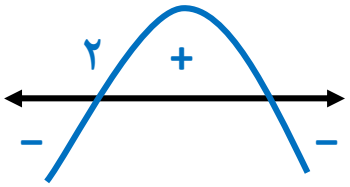
– ٣س^{٢} – ٦س + ٢٤ = ٠

٣س^{٢} + ٦س – ٢٤ = ٠

(٣س + ١٢)(س – ٢) = ٠

٣س + ١٢ = ٠ | س – ٢ = ٠

س = – ٤ | س = ٢



∴ الدالة متناقصة في الفترة س > ٢ ، س < – ٤

(٣) أوجد قيم س عندما تكون د(س) = $\frac{١}{٦}$ (٥ – ٢س)^{٣} + ٤س متزايدة .

د(س) = $\frac{١}{٦}$ (٥ – ٢س)^{٣} + ٤س

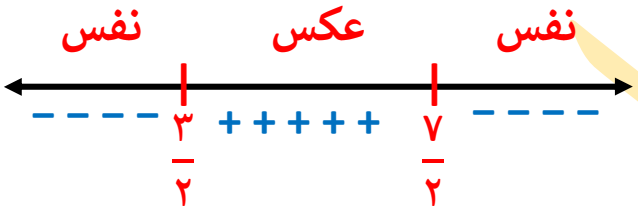
د′(س) = ٣ × $\frac{١}{٦}$ × – ٢(٥ – ٢س)^{٢} + ٤

د′ (س) = ٤ – (٥ – ٢س)^{٢}

د′ (س) = ٤ – (٢٥ – ٢٠س + ٤س^{٢})

د′ (س) = ٤ – ٢٥ + ٢٠س – ٤س^{٢}

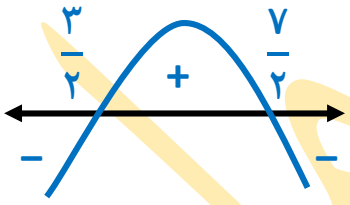
د′ (س) = ٤س^{٢} – ٢٠س + ٢١



٤س^{٢} – ٢٠س + ٢١ = ٠

(٢س – ٣)(٢س – ٧) = ٠

٢س – ٣ = ٠	٢س – ٧ = ٠
س = $\frac{٣}{٢}$	س = $\frac{٧}{٢}$



∴ الدالة متزايدة في الفترة $\frac{٣}{٢}$ < س < $\frac{٧}{٢}$

∴ قيم س عندما تكون الدالة متزايدة $\frac{٣}{٢}$ < س < $\frac{٧}{٢}$

(٤) إذا كانت د(س) = $\frac{٤}{١ - ٢س}$ ، حيث س ≤ ١ ، فأوجد د′ (س) ، وحدد ما اذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو غير ذلك

د(س) = $\frac{٤}{١ - ٢س}$ = ٤ (١ – ٢س)$^{-١}$

د′(س) = –١ × ٤ × –٢ (١ – ٢س)$^{-٢}$

د′(س) = ٨ (١ – ٢س)$^{-٢}$

د′(س) = $\frac{٨}{(١ - ٢س)^{٢}}$

∵ مجال قيم س هي س ≤ ١

∴ (١ – ٢س)^{٢} تكون موجبة لجميع قيم س في مجال قيم س

∵ (١ – ٢س)^{٢} > ٠

∴ د′(س) > ٠ لجميع قيم س في مجال د(س)

∴ د(س) تكون دالة متزايدة

(٥) إذا كانت د(س) = $\frac{٥}{(س + ٢)^{٢}}$ − $\frac{٢}{س + ٢}$ ، حيث س ≥ ٠ ، فأوجد د′ (س) ،

وحدد ما اذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو غير ذلك

د(س) = $\frac{٥}{(س + ٢)^{٢}}$ − $\frac{٢}{س + ٢}$ = ٥ (س + ٢)$^{-٢}$ − ٢ (س + ٢)$^{-١}$

د′(س) = − ٢ × ٥ (س + ٢)$^{-٣}$ − (٢ × − ١(س + ٢)$^{-٢}$)

د′(س) = − ١٠(س + ٢)$^{-٣}$ + ٢ (س + ٢)$^{-٢}$

د′(س) = $\frac{-١٠}{(س + ٢)^{٣}}$ + $\frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$ بتوحيد المقامات

د′ (س) = $\frac{-١٠ + ٢ (س + ٢)}{(س + ٢)^{٣}}$ = $\frac{٢س - ٦}{(س + ٢)^{٣}}$

عند ٢س − ٦ = ٠ يوجد نقاط حرجة

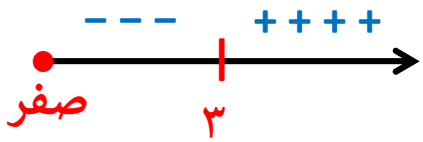
٢س − ٦ = ٠ ٢س = ٦ ∴ س = ٣

∴ يوجد نقطة حرجة عند س = ٣

نحدد قيمة س على يمين ٣ ويسار ٣

ونعوض في المشتقة الأولى

$$د'(س) = \frac{٦ - ٢س}{(س + ٢)^{٣}}$$



عند س = ٤

$$د'(٤) = \frac{٦ - ٤ \times ٢}{(٤ + ٢)^{٣}} = \frac{٢}{٢١٦} = \frac{١}{١٠٨} > ٠$$

عند س = ٢

$$د'(٢) = \frac{٦ - ٢ \times ٢}{(٢ + ٢)^{٣}} = \frac{-٢}{٦٤} = \frac{-١}{٣٢} > ٠$$

∴ الدالة متزايدة عند س > ٣

∴ الدالة متناقصة عند ٠ < س < ٣

(٦) إذا كانت د(س) = (٢س + ٥)^{٢} – ٣ ، حيث س ≥ ٠ ، فأوجد د′ (س) واذكر سبب أن الدالة متزايدة

د(س) = (٢س + ٥)^{٢} – ٣

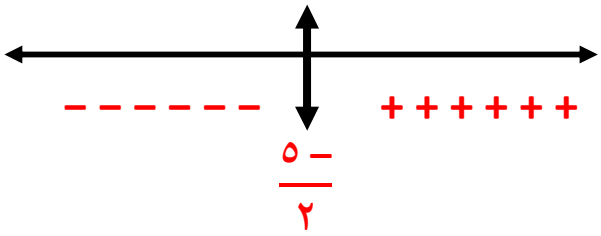
د′(س) = ٢ × ٢ (٢س + ٥)

د′(س) = ٨س + ٢٠

٨س + ٢٠ = ٠

٨ س = – ٢٠

س = $\frac{-٥}{٢}$



نحدد قيمة س على يمين $\frac{-٥}{٢}$ ويسار $\frac{-٥}{٢}$

ونعوض في المشتقة الأولى

د′ (– ٢) = – ٢ × ٨ + ٢٠ = ٤ > ٠

د′ (– ٣) = – ٣ × ٨ + ٢٠ = – ٤ > ٠

∴ الدالة متزايدة في س > $\frac{-٥}{٢}$

∴ الدالة متزايدة عند س ≥ ٠

(٧) بين أن د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س}$ متزايدة .

د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س}$

د(س) = $س^{-١}$ ($س^{٢}$ – ٤)

د′(س) = ١ + ٤$س^{-٢}$

د′ (س) = ١ + $\frac{٤}{س^{٢}}$

عند أي قيمة لـ(س) تكون $س^{٢}$ دائما موجبة

∴ د′(س) دائما موجبة

∴ دالة س تكون تزايدية

(٨) إذا علمت أن الدالة د(س) = $\frac{٢}{س^{٤}}$ – $س^{٢}$ ، حيث س > ٠ ، فبين أن د(س) متناقصة

د(س) = $\frac{٢}{س^{٤}}$ – $س^{٢}$

د(س) = $٢س^{-٤}$ – $س^{٢}$

د′(س) = – ٨ $س^{-٥}$ – ٢ س

د′(س) = $\frac{-٨}{س^{٥}}$ – ٢س

د′(س) = $\frac{-٨ - ٢ س^{٦}}{س^{٥}}$

د′(س) = – $\frac{٨ + ٢ س^{٦}}{س^{٥}}$

عند س > ٠

د′(س) تكون سالبة

∴ عند س > ٠ تكون الدالة تناقصية

أحمد عمار

(٩) ينتج مصنع س سلعة كل يوم وكانت دالة الربح ح(س) = ٢س^{٣} – ٨١ س^{٢} + ٨٤٠ س ، أوجد عدد السلع (س) المنتجة التي يتناقص فيها الربح .

ح(س) = ٢س^{٣} – ٨١ س^{٢} + ٨٤٠ س

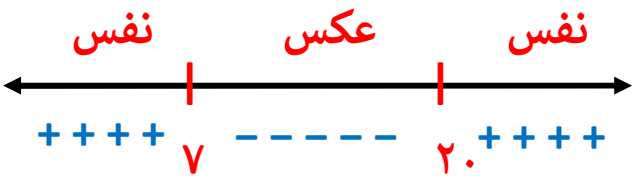
ح′ (س) = ٦س^{٢} – ١٦٢ س + ٨٤٠

ح′ (س) = س^{٢} – ٢٧ س + ١٤٠

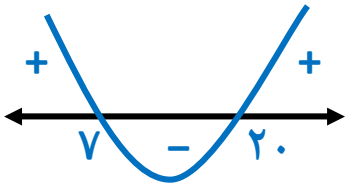
س^{٢} – ٢٧س + ١٤٠ = ٠

(س – ٢٠)(س – ٧)

س – ٢٠ = ٠	س – ٧ = ٠
س = ٢٠	س = ٧



∴ الدالة متناقصة في الفترة ٧ < س < ٢٠



∴ مجال تناقص دالة الربح هو في الفترة ٧ < س < ٢٠

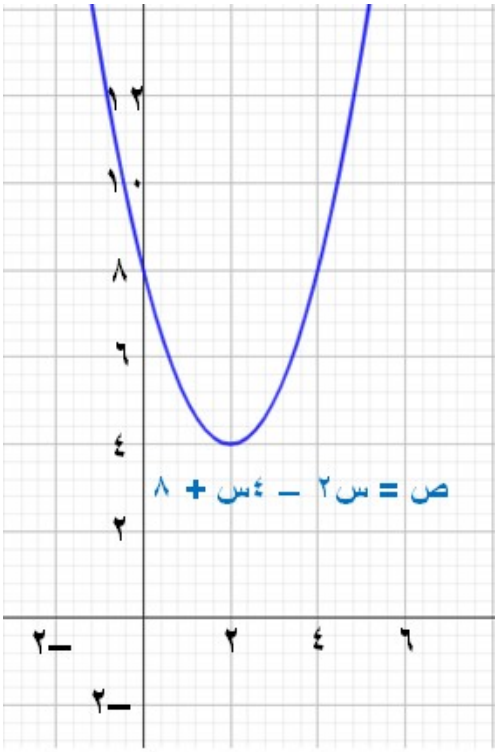
∴ عدد السلع (س) المنتجة التي يتناقص فيها الربح

هى الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٧ ، ٢٠

تمارين ٤-٦

(١) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة لكل من المنحنيات الآتية ، وحدد نوع كل نقطة منها

ارسم كل دالة موضحا النقاط الحرجة :



(أ) ص = س^{٢} – ٤س + ٨

ص′ = ٢س – ٤

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٢س – ٤ = ٠

∴ س = ٢

عند س = ٢

ص = ٢^{٢} – ٤ × ٢ + ٨ = ٤

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٤)

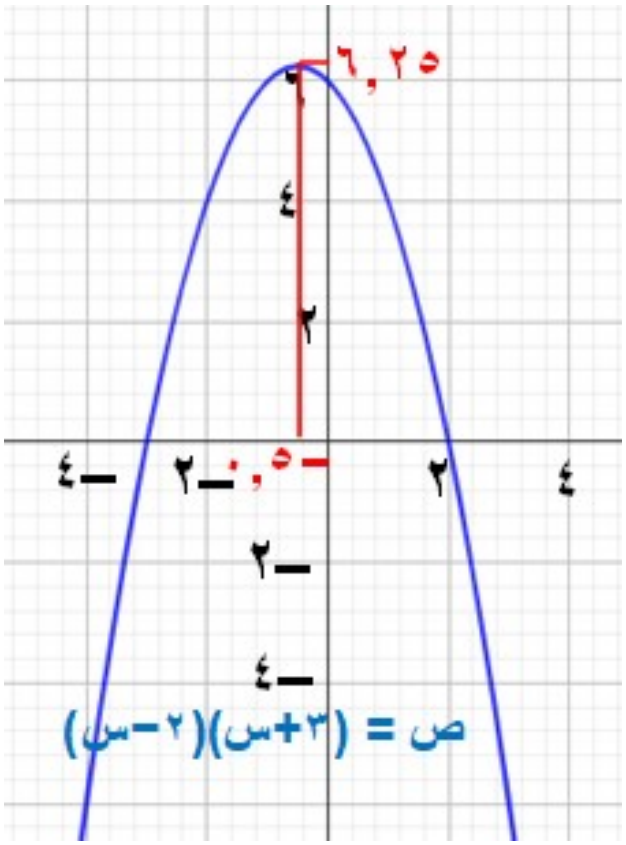
تحديد نوع النقطة (٢ ، ٤)

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠,٢ > ٠ موجب	صفر	– ٠,٢ < ٠ سالب

∴ النقطة (٢ ، ٤) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ٢ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، ٤)



(ب) ص = (٣ + س)(٢ – س)

ص = – س^{٢} – س + ٦

ص′ = – ٢س – ١

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

– ٢س – ١ = ٠

–٢س = ١ ∴ س = $\frac{-١}{٢}$

عند س = $\frac{-١}{٢}$

ص = – $(\frac{-١}{٢})^{٢} - \frac{-١}{٢} + ٦ = ٦,٢٥$

∴ النقطة الحرجة هي (– ٠,٥ ، ٦,٢٥)

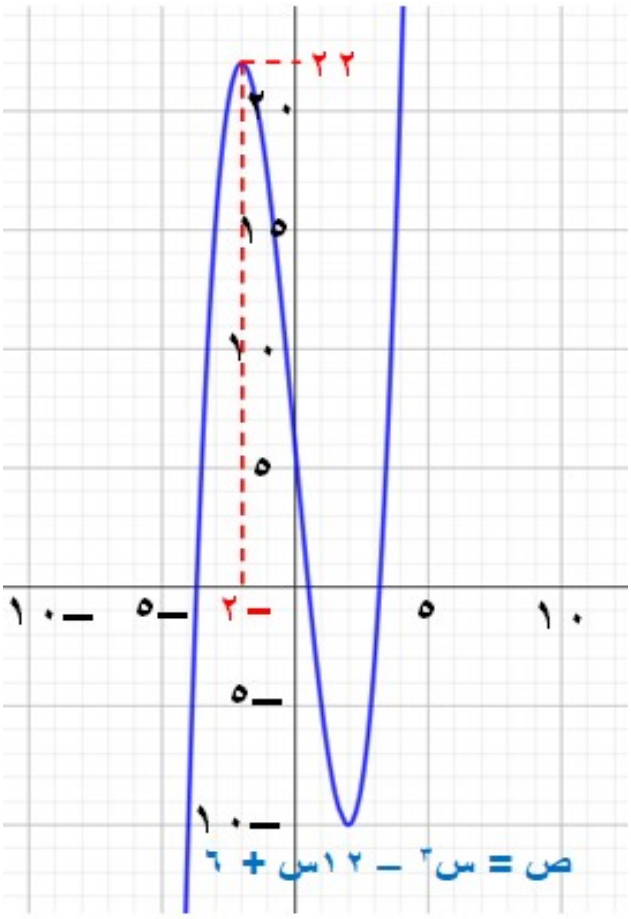
تحديد نوع النقطة (– ٠,٥ ، ٦,٢٥)

	– ٠,٤	– ٠,٥	– ٠,٦
التعويض في المشتقة	– ٠,٢ > ٠ سالب	صفر	٠,٢ > ٠ موجب

∴ النقطة (– ٠,٥ ، ٦,٢٥) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = – ٢ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (– ٠,٥ ، ٦,٢٥)



(ج) ص = س^{٣} – ١٢س + ٦

ص′ = ٣س^{٢} – ١٢

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٣س^{٢} – ١٢ = ٠

٣س^{٢} = ١٢

س^{٢} = ٤ بأخذ ± ∴ س = ٢ ، – ٢

عند س = ٢

ص = ٢^{٣} – ٢ × ١٢ + ٦ = – ١٠

عند س = – ٢

ص = (– ٢)^{٣} – (–٢) × ١٢ + ٦ = ٢٢

∴ النقطة الحرجة هي (–٢ ، ٢٢) ، (٢ ، – ١٠)

أولا تحديد نوع النقطة (–٢ ، ٢٢)

	– ١,٩	– ٢	– ٢,١
التعويض في المشتقة	– ١,١٧ < ٠ سالب	صفر	١,٢٣ > ٠ موجب

∴ النقطة (–٢ ، ٢٢) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ٦س = – ١٢ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (– ٢ ، ٢٢)

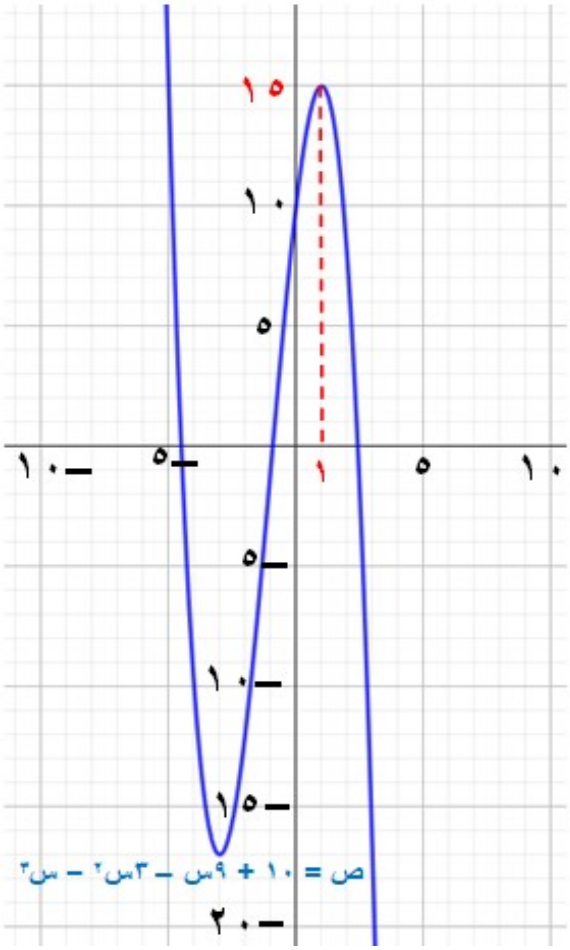
ثانيا تحديد نوع النقطة (٢ ، – ١٠)

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠ < ١,٢٣ موجب	صفر	٠ > – ١,١٧ سالب
	↗		↘

∴ النقطة (٢ ، – ١٠) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ٦س = ١٢ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، – ١٠)



(د) ص = ١٠ + ٩س – ٣س^{٢} – س^{٣}

ص′ = ٩ – ٦س – ٣س^{٢}

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٩ – ٦س – ٣س^{٢} = ٠

٣س^{٢} + ٦س – ٩ = ٠

س^{٢} + ٢س – ٣ = ٠

(س + ٣)(س – ١)

س + ٣ = ٠	س – ١ = ٠
س = – ٣	س = ١

عند س = – ٣

ص = ١٠ + ٩ × –٣ – ٣ × (– ٣)^{٢} – (–٣)^{٣} = – ١٧

عند س = ١

ص = ١٠ + ٩ – ٣ – ١ = ١٥

∴ النقطة الحرجة هي (–٣ ، –١٧) ، (١ ، ١٥)

أولا تحديد نوع النقطة (– ٣ ، – ١٧)

	– ٣,١	– ٣	– ٢,٩
التعويض في المشتقة	٠ > – ١,٢٣ سالب	صفر	٠ < ١,١٧ موجب

∴ النقطة (– ٣ ، – ١٧) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = – ٦ – ٦س = ١٢ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (– ٣ ، – ١٧)

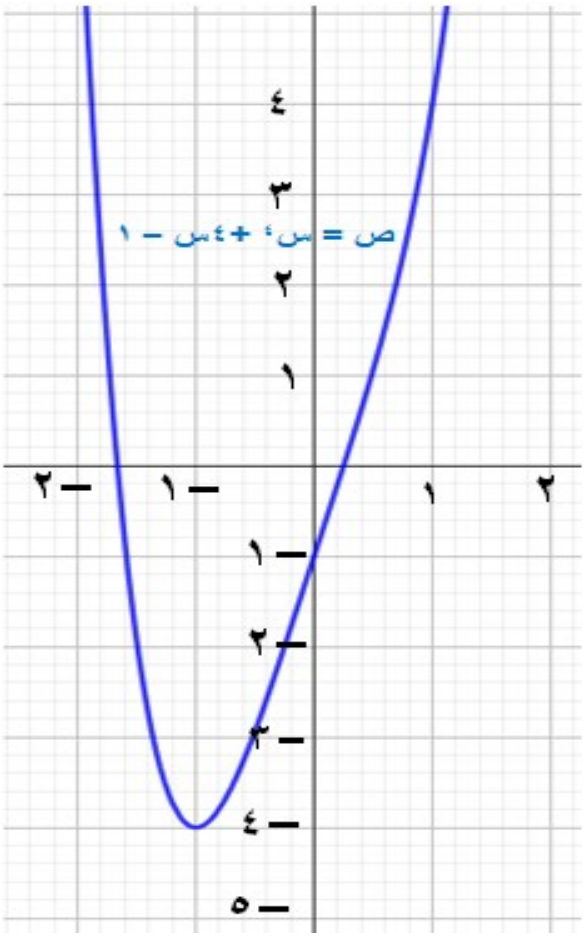
ثانيا تحديد نوع النقطة (١ ، ١٥)

	١,١	١	٠,٩
التعويض في المشتقة	– ١,٢٣ < ٠ سالب	صفر	١,١٧ > ٠ موجب

∴ النقطة (١ ، ١٥) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = – ٦ – ٦س = – ١٢ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (١ ، ١٥)



(هـ) ص = س^{٤} + ٤س – ١

ص′ = ٤س^{٣} + ٤

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٤س^{٣} + ٤ = ٠

٤س^{٣} = – ٤

س^{٣} = – ١ ∴ س = – ١

عند س = – ١

ص = ١ – ٤ – = ٤ –

النقطة الحرجة هي (–١ ، –٤)

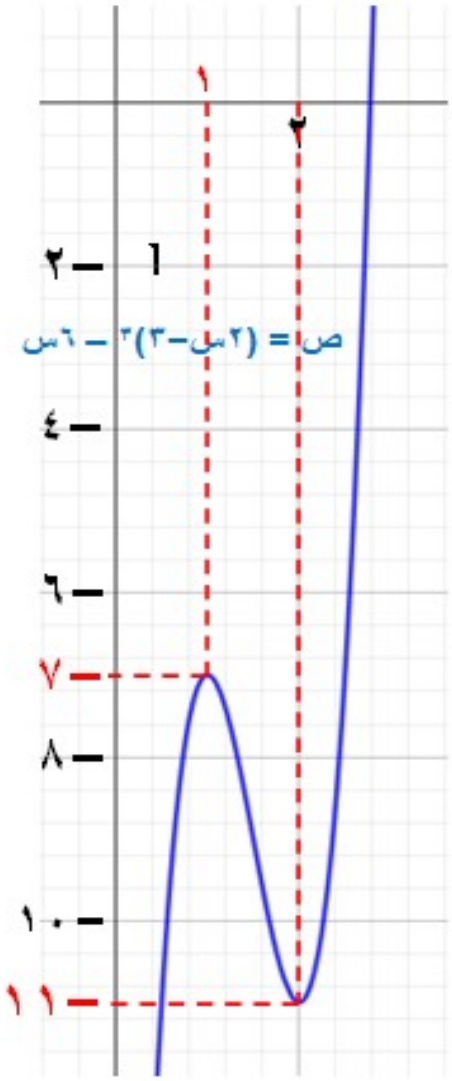
تحديد نوع النقطة (– ١ ، – ٤)

	– ٠,٩	– ١	– ١,١
التعويض في المشتقة	١,٠٨٤ – ٠ < موجب	صفر	١,٣٢٤ – ٠ > سالب

∴ النقطة (– ١ ، – ٤) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ١٢س^{٢} = ١٢ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (– ١ ، – ٤)



(و) ص = $(٢س - ٣)^{٣} - ٦س$

ص′ = $٣ \times ٢ (٢س - ٣)^{٢} - ٦$

ص′ = $٦ (٢س - ٣)^{٢} - ٦$

$٦ (٢س - ٣)^{٢} - ٦ = ٠$

$٦ (٤س^{٢} - ١٢س + ٩) - ٦ = ٠$

$٢٤س^{٢} - ٧٢س + ٥٤ - ٦ = ٠$

$٢٤س^{٢} - ٧٢س + ٤٨ = ٠$

$س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

$س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

(س – ٢)(س – ١)

س – ٢ = ٠	س – ١ = ٠
س = ٢	س = ١

عند س = ٢

ص = $(٢ \times ٢ - ٣)^{٣} - ٦ \times ٢ = -١١$

عند س = ١

ص = $(٢ \times ١ - ٣)^{٣} - ٦ \times ١ = -٧$

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، –١١) ، (١ ، –٧)

أولا تحديد نوع النقطة (٢ ، – ١١)

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠ < ٢,٦٤ موجب	صفر	٠ > -٢,١٦ سالب

∴ النقطة (٢ ، – ١١) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ٤٨س – ٧٢ = ٢٨,٨ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، – ١١)

ثانيا تحديد نوع النقطة (١ ، – ٧)

	١,١	١	٠,٩
التعويض في المشتقة	٠ > -٢,١٦ سالب	صفر	٠ < ٢,٦٤ موجب

∴ النقطة (١ ، – ٧) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ٤٨س – ٧٢ = – ٢٤ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (١ ، – ٧)

(٢) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة لكل من المنحنيات الآتية ، وحدد نوع كل نقطة منها

(أ) $ص = \sqrt{س} + \frac{٩}{\sqrt{س}}$

$ص = (س)^{\frac{١}{٢}} + ٩ (س)^{-\frac{١}{٢}}$

$ص' = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + ٩ \times \frac{-١}{٢} (س)^{-\frac{٣}{٢}}$

$ص' = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢} (س)^{-\frac{٣}{٢}}$

توجد نقاط حرجة عند ص' = ٠

$٠ = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٩}{٢} (س)^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٩}{٢} (س)^{-\frac{٣}{٢}}$ بتربيع الطرفين

$\frac{١}{٤} س^{-١} = \frac{٨١}{٤} (س)^{-٣}$

$\therefore ٤س = \frac{٤}{٨١} س^{٣}$

$س^{٣} = ٨١ س$

$س^{٢} = ٨١$ بأخذ $\pm \sqrt{}$

$\therefore س = ٩ ، -٩$

-٩ مرفوض لأن الدالة عند س = -٩ غير معرفة

عند س = ٩

$$ص = \sqrt{٩} + \frac{٩}{\sqrt{٩}} = ٣ + ٣ = ٦$$

∴ النقطة الحرجة هى (٩ ، ٦)

تحديد نوع النقطة (٩ ، ٦)

	٩,١	٩	٨,٩
التعويض في المشتقة	٠,٠١٨ > ٠ موجب	صفر	٠,٠١٨ – < ٠ سالب

∴ النقطة (٩ ، ٦) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

$ص'' = -\frac{١}{٤}س^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٧}{٤}س^{-\frac{٥}{٣}}$ = ٠,٠١٨٥ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٩ ، ٦)

(ب) $ص = ٤س^{٢} + \frac{٨}{س}$

$ص = ٤س^{٢} + ٨ س^{-١}$

$ص' = ٨س - ٨س^{-٢}$

توجد نقاط حرجة عند $ص' = ٠$

$٨س - ٨س^{-٢} = ٠$ بضرب الطرفين × $س^{٢}$

$٨س^{٣} - ٨ = ٠$

$٨س^{٣} = ٨$

$س^{٣} = ١$ ∴ $س = ١$

عند $س = ١$

$ص = ٤ + ٨ = ١٢$ ∴ احداثى النقطة الحرجة هي (١ ، ١٢)

تحديد نوع النقطة (١ ، ١٢)

	١,١	١	٠,٩
التعويض في المشتقة	٢,١٨٨ > ٠ موجب	صفر	٢,٦٧ - > ٠ سالب

∴ النقطة (١ ، ١٢) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

$ص'' = ٨ + ١٦س^{-٣}$ = ٢٤ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (١ ، ١٢)

(ج) $ص = \frac{(س - ٣)^{٢}}{س}$

$ص = س^{-١} (س^{٢} - ٦س + ٩)$

$ص = س - ٦ + ٩س^{-١}$

$ص' = ١ - ٩س^{-٢}$

$ص' = ١ - \frac{٩}{س^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عند $ص' = ٠$

$١ - \frac{٩}{س^{٢}} = ٠$

$\frac{٩}{س^{٢}} = ١ \quad \therefore س^{٢} = ٩$ بأخذ $\pm$

$س = ٣ ، -٣$

عند $س = ٣ \quad ص = \frac{(٣ - ٣)^{٢}}{٣} = ٠$

عند $س = -٣ \quad ص = \frac{(-٣ - ٣)^{٢}}{-٣} = -١٢$

∴ إحداثيات النقاط الحرجة هي (٣ ، ٠) ، (-٣ ، -١٢)

أولا تحديد نوع النقطة (٣ ، ٠)

	٣,١	٣	٢,٩
التعويض في المشتقة	٠ < ٠,٠٦٣ موجب	صفر	٠ > -٠,٠٧ سالب

∴ النقطة (٣ ، ٠) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ١٨س$^{-٣}$ = ٠,٦٦٧ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٣ ، ٠)

ثانيا تحديد نوع النقطة (-٣ ، -١٢)

	-٣,١	-٣	-٢,٩
التعويض في المشتقة	٠ < ٠,٠٦ موجب	صفر	٠ > -٠,٠٧٠ سالب

∴ النقطة (-٣ ، -١٢) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ١٨س$^{-٣}$ = -٠,٦٦٧ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (-٣ ، -١٢)

(د) $ص = س^{٣} + \frac{٤٨}{س} + ٤$

$ص = س^{٣} + ٤٨س^{-١} + ٤$

$ص' = ٣س^{٢} - ٤٨س^{-٢}$

توجد نقاط حرجة عند $ص' = ٠$

$٣س^{٢} - ٤٨س^{-٢} = ٠$

$٣س^{٢} = ٤٨س^{-٢}$

$س^{٢} = \frac{١٦}{س^{٢}}$

$س^{٤} = ١٦$

$س = \pm ٢$

عند $س = ٢$

$ص = (٢)^{٣} + \frac{٤٨}{٢} + ٤ = ٣٦$

عند $س = -٢$

$ص = (-٢)^{٣} + \frac{٤٨}{-٢} + ٤ = -٢٨$

∴ إحداثيات النقاط الحرجة هي (٢ ، ٣٦) ، (-٢ ، -٢٨)

أولا تحديد نوع النقطة (٢ ، ٣٦)

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠ < ٢,٣٤٥ موجب	صفر	٠ > – ٢,٤٦ سالب

∴ النقطة (٢ ، ٣٦) صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ٦س + ٩٦س$^{-٣}$ = ٢٤ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، ٣٦)

ثانيا تحديد نوع النقطة (–٢ ، – ٢٨)

	– ١,٩	– ٢	– ٢,١
التعويض في المشتقة	٠ > – ٢,٤٦٦ سالب	صفر	٠ < ٢,٣٤٥ موجب

∴ النقطة (–٢ ، – ٢٨) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ٦س + ٩٦س$^{-٣}$ = – ٢٤ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (– ٢ ، – ٢٨)

(هـ) $ص = ٤\sqrt{س} - س$

$ص = ٤س^{\frac{١}{٢}} - س$

$ص' = \frac{١}{٢} \times ٤ س^{-\frac{١}{٢}} - ١$

$ص' = \frac{٢}{\sqrt{س}} - ١$ توجد نقاط حرجة عند $ص' = ٠$

$\frac{٢}{\sqrt{س}} - ١ = ٠$ $\sqrt{س} = ٢$ $\therefore س = ٤$

عند $س = ٤$

$ص = ٤\sqrt{٤} - ٤ = ٨ - ٤ = ٤$

∴ احداثيات النقطة الحرجة هي (٤ ، ٤)

تحديد نوع النقطة (٤ ، ٤)

	٤,١	٤	٣,٩
التعويض في المشتقة	$-٠,١٢٢ < ٠$ سالب	صفر	$٠,٠١٢٧ > ٠$ موجب

∴ النقطة (٤ ، ٤) نقطة عظمى

حل آخر (باستخدام اختبار المشتقة الثانية)

$ص'' = ٢س^{-\frac{٣}{٢}} = -٠,١٢٥ <$ صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (٤ ، ٤)

(و) $ص = ٢س + \frac{٨}{س^{٢}}$

$ص = ٢س + ٨س^{-٢}$

$ص' = ٢ + ٨ \times -٢ س^{-٣}$ $\quad ص' = ٢ - ١٦ س^{-٣}$

$ص' = ٢ - \frac{١٦}{س^{٣}}$

توجد نقاط حرجة عند $ص' = ٠$

$٢ - \frac{١٦}{س^{٣}} = ٠$

$\frac{١٦}{س^{٣}} = ٢$

$س^{٣} = ٨$ $\quad \therefore س = ٢$ $\quad$ عند $س = ٢$

$ص = ٢ \times ٢ + \frac{٨}{٤} = ٦$

∴ احداثيات النقطة الحرجة هي (٢ ، ٦)

تحديد نوع النقطة (٢ ، ٦)

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠,٢٧٢ > ٠ موجب	صفر	-٠,٣٣ < ٠ سالب

∴ النقطة (٢ ، ٦) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص" = ٤٨ س$^{-٤}$ = ٣ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، ٦)

(٣) إذا كانت ص = $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}}$. فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ ثم اشرح سبب عدم وجود نقطة حرجة للمنحنى

ص = س$^{-٢}$ (س^{٢} – ٩)

ص = ١ – ٩س$^{-٢}$

ص′ = – ٢ × – ٩ س$^{-٣}$

ص′ = ١٨ س$^{-٣}$

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

ص′ = $\frac{١٨}{س^{٣}}$ ولكن $\frac{١٨}{س^{٣}}$ لا يمكن أن تساوى صفر

لا يوجد حل لهذه المعادلة ∴ لا يوجد نقطة حرجة للمنحنى

(٤) إذا علمت أن ص = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – ٣٦س + ك ، فأوجد :

(أ) الإحداثى السينى للنقطتين الحرجتين على المنحنى .

ص = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – ٣٦س + ك

ص′ = ٦س^{٢} – ٦س – ٣٦

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٦س^{٢} – ٦س – ٣٦ = ٠

س^{٢} – س – ٦ = ٠

(س – ٣) (س + ٢) = ٠

س – ٣ = ٠	س + ٢ = ٠
س = ٣	س = – ٢

∴ الاحداثى السينى هو ٣ ، – ٢

(ب) قيمتى ك عندما يكون للمنحنى نقطة حرجة تقع على محورالسينات .

عندما تقع النقطة الحرجة على محور السينات

∴ ص = ٠

عند س = ٣

ص = ٢ × ٣^{٣} – ٣ ×٣^{٢} – ٣٦ ×٣ + ك

ك – ٨١ = ٠ ∴ ك = ٨١

عند س = – ٢

ص = ٢ ×(– ٢)^{٣} – ٣ × (– ٢)^{٢} – ٣٦ × – ٢ + ك

ك + ٤٤ = ٠ ∴ ك = – ٤٤

∴ قيمتا ك هي – ٤٤ ، ٨١

(٥) إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أ س^{٢} – ٩س + ٢ نقطة عظمى عند س = –٣ فأوجد :

(أ) قيمة أ .

ص = س^{٣} + أ س^{٢} – ٩س + ٢

ص′ = ٣س^{٢} + ٢أ س – ٩

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٣س^{٢} + ٢أ س – ٩ = ٠

توجد نقطة عظمى عند س = – ٣

∴ ص′ = ٠ عند س = – ٣

٣ × (– ٣)^{٢} + ٢أ × – ٣ – ٩ = ٠

١٨ – ٦ أ = ٠ ٦ أ = ١٨

∴ أ = ٣

(ب) مجال قيم س عندما تكون الدالة متناقصة .

ص′ = ٣س^{٢} + ٦س – ٩

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

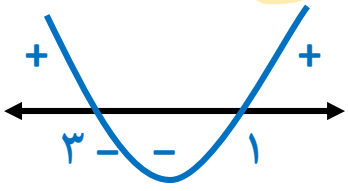
٣س^{٢} + ٦س – ٩ = ٠

س^{٢} + ٢س – ٣ = ٠

(س + ٣)(س – ١) = ٠

س = – ٣ ، س = ١

∴ الدالة متناقصة في الفترة – ٣ < س < ١



(٦) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س – ٣٠ يمر بالنقطة (٤ ، ٢)

وله نقطة حرجة عند س = ٣ ، فأوجد :

(أ) قيمتى أ ، ب .

ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س – ٣٠

ص′ = ٦س^{٢} + ٢ أ س + ب

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠ ∴ ٦س^{٢} + ٢ أ س + ب = ٠

∵ توجد نقطة حرجة عند س = ٣

∴ ص′ = ٠ عند س = ٣

٦ × (٣)^{٢} + ٢ × ٣ × أ + ب = ٠

٦ أ + ب = – ٥٤ ← (١)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٤ ، ٢) ∴ تحقق معادلته

٢ = ٢ × (٤)^{٣} + أ × (٤)^{٢} + ٤ ب – ٣٠

٢ = ١٢٨ + ١٦ أ + ٤ ب – ٣٠ ← ١٦ أ + ٤ ب = – ٩٦

٤ أ + ب = – ٢٤ ← (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معا

٦ أ + ب = – ٥٤

٤ أ + ب = – ٢٤ بالطرح

٢ أ = – ٣٠ ∴ أ = – ١٥

ب = – ٢٤ – ٤ أ ∴ ب = ٣٦

∴ أ = – ١٥ ، ب = ٣٦

(ب) إحداثيات النقطة الحرجة الأخرى ، وحدد نوعها.

$ص = ٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٣٦س - ٣٠$

$ص' = ٦س^{٢} - ٢ \times ١٥ س + ٣٦$

$ص' = ٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦$ $\quad$ $ص' = س^{٢} - ٥س + ٦$

توجد نقاط حرجة عند $ص' = ٠$

$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٢) = ٠$

$س - ٣ = ٠$ $\quad$ $س - ٢ = ٠$

$س = ٣$ $\quad$ $س = ٢$

∴ النقطة الحرجة الأخرى تكون عند $س = ٢$

$ص = ٢ \times (٢)^{٣} - ١٥ \times (٢)^{٢} + ٣٦ \times ٢ - ٣٠$ $\quad$ $ص = -٢$

∴ النقطة الحرجة الأخرى هي $(٢ ، -٢)$

تحديد نوع النقطة $(٢ ، -٢)$

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	$-٠,٥٤ < ٠$ سالب	صفر	$٠,٦٦ > ٠$ موجب

∴ النقطة $(٢ ، -٢)$ نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

$ص'' = ١٢س - ٣٠ = -٦ <$ صفر $\quad$ ∴ توجد نقطة عظمى عند $(٢ ، -٢)$

(٧) إذا علمت أنه لا يوجد لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أ س^{٢} + ب س – ٣٠ نقاط حرجة ، فبين أن أ^{٢} < ٦ب .

ص = ٢س^{٣} + أ س^{٢} + ب س – ٣٠

ص′ = ٦س^{٢} + ٢ أ س + ب

توجد نقاط حرجة عندما ص′ = ٠

٦س^{٢} + ٢ أ س + ب = ٠

بحل المعادلة التربيعية بإستخدام القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$

أ = ٦ ، ب = ٢ أ ، ج = ب

$$س = \frac{-٢ أ \pm \sqrt{(٢ أ)^{٢} - ٤ \times ٦ ب}}{١٨}$$

∵ لا يوجد لمنحنى الدالة ص نقاط حرجة

∴ لا يوجد حلول حقيقية للدالة ص′

∴ المميز < ٠

(٢ أ)^{٢} – ٤ × ٦ ب < ٠

٤ أ^{٢} – ٢٤ ب < ٠ ← أ^{٢} – ٦ ب < ٠

∴ أ^{٢} < ٦ ب

(٨) إذا علمت أن ص = ١ + ٢س + $\frac{ك^{٢}}{٢س - ٣}$ ، حيث ك عدد موجب ، فأوجد قيمة س بدلالة ك عندما يكون للمنحنى عندها نقاط حرجة ، وحدد نوع كل منها

ص = ١ + ٢س + ك^{٢} (٢س – ٣)$^{-١}$

ص′ = ٢ + ك^{٢} × –١ × ٢(٢س – ٣)$^{-٢}$

ص′ = ٢ – ٢ك^{٢} (٢س – ٣)$^{-٢}$

ص′ = ٢ – $\frac{٢ ك^{٢}}{(٢ س - ٣)^{٢}}$

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٢ – $\frac{٢ ك^{٢}}{(٢ س - ٣)^{٢}}$ = ٠

$\frac{٢ ك^{٢}}{(٢ س - ٣)^{٢}}$ = ٢

$\frac{ك^{٢}}{(٢ س - ٣)^{٢}}$ = ١

ك^{٢} = (٢س – ٣)^{٢} بأخذ ± $\sqrt{}$

٢س – ٣ = ± ك

عند ٢س – ٣ = ك

٢س = ٣ + ك

$س = \frac{٣ + ك}{٢}$

عند ٢س – ٣ = – ك

٢س = ٣ – ك

$س = \frac{٣ - ك}{٢}$

∴ توجد قيمتان لـ(س) هما $س = \frac{٣ + ك}{٢}$ ، $س = \frac{٣ - ك}{٢}$

أولا تحديد نوع النقطة عند $س = \frac{٣ + ك}{٢}$

بإستخدام طريقة المشتقة الثانية

$ص' = ٢ - ٢ك^{٢} (٢س - ٣)^{-٢}$

$ص'' = -٢ \times -٢ ك^{٢} \times ٢ (٢س - ٣)^{-٣}$

$ص'' = ٨ك^{٢} (٢س - ٣)^{-٣}$

$ص'' = \frac{٨ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٣}}$ بالتعويض عن قيمة $س = \frac{٣ + ك}{٢}$

$ص'' = \frac{٨ك^{٢}}{(٢ \times \frac{٣ + ك}{٢} - ٣)^{٣}} = \frac{٨ك^{٢}}{ك^{٣}} = \frac{٨}{ك}$ ، ∵ ك موجبة

∴ ص'' > صفر

∴ النقطة الحرجة عند $س = \frac{٣ + ك}{٢}$ هي قيمة صغرى

ثانيا تحديد نوع النقطة عند س = $\frac{٣ - ك}{٢}$

بإستخدام طريقة المشتقة الثانية

ص" = $\frac{٨ك^{٢}}{(٢س - ٣)^{٣}}$ بالتعويض عن قيمة س = $\frac{٣ - ك}{٢}$

ص" = $\frac{٨ك^{٢}}{(٢ \times \frac{٣ - ك}{٢} - ٣)^{٣}}$ = $\frac{٨ك^{٢}}{(- ك)^{٣}}$ = $\frac{٨}{- ك}$

عندما ك تكون موجبة ∴ ص" < صفر

∴ النقطة الحرجة عند س = $\frac{٣ - ك}{٢}$ هي قيمة عظمى

(٩) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة لمنحنى الدالة ص = س^{٤} – ٤س^{٣} + ٤س^{٢} + ١ ،
وحدد نوع كل منها ثم ارسم المنحنى موضحا النقاط الحرجة .

ص′ = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢} + ٨س

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٤س^{٣} – ١٢س^{٢} + ٨س = ٠

٤س(س^{٢} – ٣س + ٢) = ٠

٤س(س – ١)(س – ٢) = ٠

أولا ٤س = ٠ ∴ س = ٠

عند س = ٠ ص = ١

∴ النقطة الحرجة الأولى هي (٠ ، ١)

ثانيا س – ١ = ٠ ∴ س = ١

عند س = ١

ص = ١ – ٤ + ٤ + ١ = ٢

∴ النقطة الحرجة الثانية (١ ، ٢)

ثالثا س – ٢ = ٠ ∴ س = ٢

عند س = ٢

ص = ٢^{٤} – ٤ × ٢^{٣} + ٤ × ٢^{٢} + ١ = ١

∴ النقطة الحرجة الثالثة هي (٢ ، ١)

تحديد نوع النقاط الحرجة

أولا تحديد نوع النقطة (٠ ، ١)

ص′ = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢} + ٨س

	٠,١	٠	– ٠,١
التعويض في المشتقة	٠ < ٠,٦٨٤ موجب	صفر	٠ > – ٠,٩٢٤ سالب

∴ النقطة (٠ ، ١) نقطة صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ١٢س^{٢} – ٢٤س + ٨ = ٨ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٠ ، ١)

ثانيا تحديد نوع النقطة (١ ، ٢)

	١,١	١	٠,٩
التعويض في المشتقة	٠ > – ٠,٣٩٦ سالب	صفر	٠ < ٠,٣٩٦ موجب

∴ النقطة (١ ، ٢) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ١٢س^{٢} – ٢٤س + ٨ = – ٤ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (١ ، ٢)

ثالثا تحديد نوع النقطة (٢ ، ١)

ص′ = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢} + ٨س

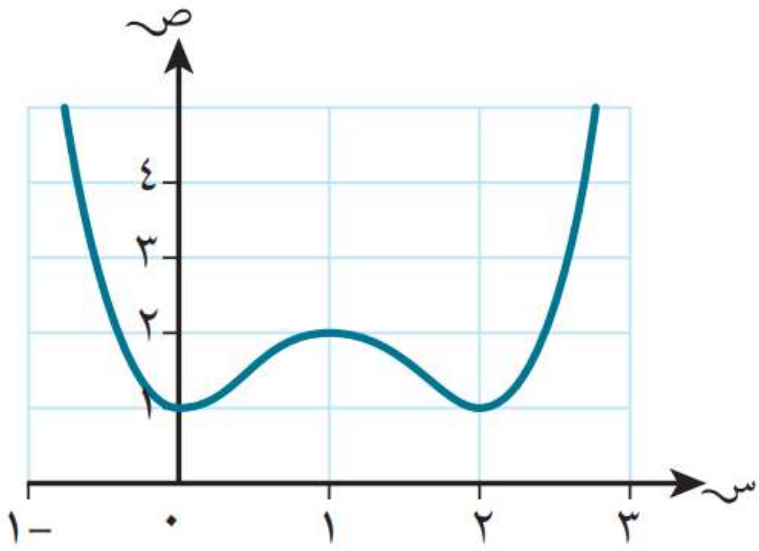
	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠,٩٢٤ > ٠ موجب	صفر	– ٠,٦٨٤ < ٠ سالب

∴ النقطة (٢ ، ١) صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ١٢س^{٢} – ٢٤س + ٨ = ٨ > صفر ∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، ١)

رسم المنحنى



(١٠) يوجد لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب نقطة حرجة عند (٤ ، – ٢٧) :

(أ) أوجد قيمتى أ ، ب .

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب

ص′ = ٣س^{٢} + ٢ أ س

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٣س^{٢} + ٢ أ س = ٠

∵ يوجد نقطة حرجة عند (٤ ، – ٢٧)

∴ ص′ = ٠ عند س = ٤

٣ × ١٦ + ٢ × ٤ × أ = ٠

٤٨ + ٨ أ = ٠ ٨ أ = – ٤٨

∴ أ = – ٦

النقطة (٤ ، – ٢٧) نقطة حرجة تقع على المنحنى

∴ تحقق معادلة ص

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب

بالتعويض عن س = ٤ ، ص = – ٢٧ ، أ = – ٦ في معادلة المنحنى

– ٢٧ = ٤^{٣} + (– ٦) × ٤^{٢} + ب

– ٢٧ = ٦٤ – ٩٦ + ب

ب = – ٢٧ – ٦٤ + ٩٦

∴ ب = ٥

∴ أ = – ٦ ، ب = ٥

(ب) حدد نوع النقطة الحرجة (٤ ، – ٢٧) .

ص = س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٥

ص′ = ٣س^{٢} – ١٢س

		٤,١	٤	٣,٩
التعويض في المشتقة		٠ < ١,٢٣ موجب	صفر	٠ > – ١,١٧ سالب

∴ النقطة (٤ ، – ٢٧) صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ٦س – ١٢ = ١٢ > صفر

∴ توجد نقطة صغرى عند (٤ ، – ٢٧)

(ج) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الأخرى على المنحنى ، وحدد نوع كل منها .

ص′ = ٣س^{٢} – ١٢س

توجد النقاط الحرجة عند ص′ = ٠

٣س^{٢} – ١٢س = ٠

س(٣س – ١٢) = ٠

عند س = ٠

ص = س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٥

ص = ٥

∴ احداثيات النقطة الحرجة هي (٠ ، ٥)

عند ٣س – ١٢ = ٠

س = ٤ وهي النقطة المعطاه في السؤال

∴ احداثيات النقطة الحرجة الأخرى هي (٠ ، ٥)

تحديد نوع النقطة (٠ ، ٥)

	٠,١	٠	– ٠,١
التعويض في المشتقة	– ١,١٧ < ٠ سالب	صفر	٠ < ١,٢٣ موجب

∴ النقطة (٠ ، ٥) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ٦ س – ١٢ = – ١٢ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (٠ ، ٥)

(د) أوجد إحداثيات النقطة الواقعة على المنحنى التي يكون لدالة الميل عندها قيمة صغرى ، وأوجد هذه القيمة الصغرى

نحتاج نقطة على المنحنى تكون عندها ص′ قيمة صغرى

$٣س^{٢} - ١٢س$ قيمة صغرى

$٣(س^{٢} - ٤س)$ بإضافة ٤ وطرح ٤ داخل القوس للمعادلة لإكمال المربع

$= ٣((س^{٢} - ٤س + ٤ - ٤)$

$= ٣((س - ٢)^{٢} - ٤)$

$= ٣(س - ٢)^{٢} - ١٢$

$٣(س - ٢)^{٢} \geq ٠$ لجميع قيم س وتكون أقل قيمة للمقدار $٣(س - ٢)^{٢} = ٠$

∴ أقل قيمة للمقدار $٣(س - ٢)^{٢} - ١٢$ تكون $٠ - ١٢ = -١٢$

$س - ٢ = ٠$ ∴ $س = ٢$

عند $س = ٢$

بالتعويض في المعادلة $ص = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٥$

$ص = ٢^{٣} - ٦ \times ٢^{٢} + ٥ = -١١$

∴ أصغر قيمة للميل هي -١٢ عند النقطة $(٢ ، -١١)$

(١١) يوجد لمنحنى الدالة ص = أ س + $\frac{ب}{س^{٢}}$ نقطة حرجة عند (٢ ، ١٢) .

(أ) أوجد قيمتى أ ، ب

ص = أ س + ب س$^{-٢}$

ص′ = أ – ٢ ب س$^{-٣}$

∵ توجد نقطة حرجة عند النقطة (٢ ، ١٢)

∴ ص′ = ٠ عند س = ٢

٠ = أ – $\frac{ب}{٨}$ × ٢

أ – $\frac{ب}{٤}$ = ٠

∴ ب = ٤ أ ⟵ (١)

النقطة (٢ ، ١٢) تقع على المنحنى ∴ تحقق معادلته

١٢ = ٢ أ + $\frac{ب}{٤}$

٨ أ + ب = ٤٨ ⟵ (٢)

بالتعويض عن ب = ٤ أ في المعادلة رقم (٢)

٨ أ + ٤ أ = ٤٨

١٢ أ = ٤٨ ∴ أ = ٤

ب = ٤أ ∴ ب = ١٦

∴ أ = ٤ ، ب = ١٦

(ب) حدد نوع النقطة الحرجة (٢ ، ١٢)

ص = ٤س + ١٦ $س^{-٢}$

ص′ = ٤ – ٣٢ $س^{-٣}$

	٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة	٠,٥٤٤ > ٠ موجب	صفر	– ٠,٦٦٥ > ٠ سالب

∴ النقطة (٢ ، ١٢) صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ٩٦ $س^{-٤}$ = ٦ > صفر

∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، ١٢)

(١٢) يوجد لمنحنى الدالة ص = س^{٢} + $\frac{أ}{س}$ + ب نقطة حرجة عند (٣ ، ٥).

(أ) أوجد قيمتى أ ، ب .

ص = س^{٢} + أ س$^{-١}$ + ب

ص′ = ٢س – أ س$^{-٢}$

توجد نقطة حرجة عند النقطة (٣ ، ٥)

∴ ص′ = ٠ عند س = ٣

٢س – أ س$^{-٢}$ = ٠

٢ × ٣ – أ × (٣)$^{-٢}$ = ٠

$\frac{أ}{٩}$ = ٦

∴ أ = ٥٤

النقطة (٣ ، ٥) تقع على المنحنى ∴ تحقق معادلته

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = ٥ ، أ = ٥٤ في معادلة المنحنى ص

ص = س^{٢} + أ س$^{-١}$ + ب

٥ = ٣^{٢} + ٥٤ × ٣$^{-١}$ + ب

ب = ٥ – ٩ – ١٨

∴ ب = – ٢٢

∴ أ = ٥٤ ، ب = – ٢٢

(ب) حدد نوع النقطة الحرجة (٣ ، ٥)

ص = س^{٢} + ٥٤ س$^{-١}$ – ٢٢

ص′ = ٢س – ٥٤ س$^{-٢}$

	٣,١	٣	٢,٩
التعويض في المشتقة	٠,٥٨٠ > ٠ موجب	صفر	– ٠,٦٢ < ٠ سالب

∴ النقطة (٣ ، ٥) صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ٢ + ١٠٨ س$^{-٣}$ = ٦ > صفر

∴ توجد نقطة صغرى عند (٣ ، ٥)

(١٣) يوجد لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٧ نقطة حرجة عند (٢، – ١٣)

(أ) أوجد قيمتى أ ، ب .

ص = ٢س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٧

ص′ = ٦س^{٢} + ٢ أ س + ب

توجد نقاط حرجة عند ص′ = ٠

٦س^{٢} + ٢ أ س + ب = ٠

∵ يوجد نقطة حرجة عند (٢ ، – ١٣)

∴ ص′ = ٠ عند س = ٢

٦ × ٤ + ٢ × ٢ × أ + ب = ٠

٢٤ + ٤ أ + ب = ٠

٤ أ + ب = – ٢٤ ⟵ (١)

النقطة (٢ ، – ١٣) نقطة حرجة تقع على المنحنى

∴ تحقق معادلة ص

ص = ٢س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٧

بالتعويض عن س = ٢ ، ص = – ١٣ في معادلة المنحنى

– ١٣ = ٢ × ٢^{٣} + أ × ٢^{٢} + ٢ ب + ٧

– ١٣ = ١٦ + ٤ أ + ٢ ب + ٧

٤ أ + ٢ب = – ٣٦

٢ أ + ب = – ١٨ ⟵ (٢)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ معا

٤ أ + ب = – ٢٤
٢ أ + ب = – ١٨ بالطرح
٢ أ = – ٦ ∴ أ = – ٣

بالتعويض في المعادلة (٢)

ب = – ١٨ – ٢ × – ٣

∴ ب = – ١٢

(ب) أوجد إحداثيات النقطة الحرجة الثانية الواقعة على المنحنى .

عند النقاط الحرجة ص′ = ٠

ص = ٢س^{٣} – ٣ س^{٢} – ١٢ س + ٧

ص′ = ٦س^{٢} – ٦س – ١٢

س^{٢} – س – ٢ = ٠

(س – ٢)(س + ١) = ٠

س – ٢ = ٠ س = ٢ معطى

س + ١ = ٠

∴ س = – ١

عند س = – ١

ص = ٢ × (–١)^{٣} – ٣ × (–١)^{٢} – ١٢ × – ١ + ٧ = ١٤

عند س = – ١ ص = ١٤

∴ احداثى النقطة الحرجة الأخرى هي (–١ ، ١٤)

(ج) حدد نوع النقطتين الحرجتين .

أولا تحديد نوع النقطة (٢ ، -١٣)

ص′ = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢

		٢,١	٢	١,٩
التعويض في المشتقة		٠ < ١,٨٦ موجب	صفر	٠ > -١,٧٤ سالب

∴ النقطة (٢ ، -١٣) صغرى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ١٢س - ٦ = ١٨ > صفر

∴ توجد نقطة صغرى عند (٢ ، -١٣)

ثانيا تحديد نوع النقطة (-١ ، ١٤)

		-٠,٩	-١	-١,١
التعويض في المشتقة		٠ > -١,٧٤ سالب	صفر	٠ < ١,٨٦ موجب

∴ النقطة (-١ ، ١٤) نقطة عظمى

حل آخر (بإستخدام اختبار المشتقة الثانية)

ص″ = ١٢س - ٦ = -١٨ < صفر ∴ توجد نقطة عظمى عند (-١ ، ١٤)

(د) أوجد إحداثيات النقطة الواقعة على المنحنى ، والتي يكون عندها لدالة الميل قيمة صغرى ، وأوجد هذه القيمة الصغرى .

نحتاج نقطة على المنحنى تكون عندها ص′ قيمة صغرى

$٦س^{٢} - ٦س - ١٢$ قيمة صغرى

$٦(س^{٢} - س) - ١٢$

$= ٦((س - \frac{١}{٢})^{٢} - \frac{١}{٤}) - ١٢$

$= ٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} - ١٣,٥$

$٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} \geq ٠$ لجميع قيم س وتكون أقل قيمة للمقدار $٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} = ٠$

∴ أقل قيمة للمقدار $٦(س - \frac{١}{٢})^{٢} - ١٣,٥$ تكون $٠ - ١٣,٥ = - ١٣,٥$

أقل قيمة للمقدار $س - \frac{١}{٢} = ٠$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

عند $س = \frac{١}{٢}$

بالتعويض في المعادلة $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ٧$

$ص = ٢ \times (\frac{١}{٢})^{٣} - ٣ \times (\frac{١}{٢})^{٢} - ١٢ \times (\frac{١}{٢}) + ٧ = \frac{١}{٢}$

∴ أصغر قيمة للميل هي $- ١٣,٥$ عند النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$