تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العمانية

كراسة تدريبية في الوحدة الثانية حساب المثلثات مع الإجابات الجزء الثاني

موقع المناهج ⇦ المناهج العمانية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات متقدمة ⇦ الفصل الأول ⇦ الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2024-09-26 08:40:09

إعداد: سلطان محمد السيابي

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العلمي

اضغط هنا للحصول على جميع روابط "الصف الثاني عشر العلمي"

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العلمي والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

كراسة تدريبية

المادة:الرياضيات المتقدمة

الوحدة:حساب المثلثات

(الجزء الثاني)

اعداد: أ.سلطان محمد السيابي

دعواتكم لي ولوالديَّ بدخول الجنة

الفهرس

الموضوع	الصفحة
الدوال المثلثية العكسية	٣ ـ ٧
المعادلات المثلثية	٨ ـ ١٣
المتطابقات المثلثية	١٤ ـ ١٨
المزيد من المعادلات المثلثية	١٩ ـ ٢٢

fileae.com/om
2025 2024
موقع فايلاتي العمانية

الدرس الخامس : الدوال المثلثية العكسية

١

اكتب قيمة كل ممّا يأتي بالدرجات:

أ $جتا^{-١}(٠)$ ب $جا^{-١}\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ج $ظا^{-١}\sqrt{٣}$

د $جا^{-١}(١)$ هـ $ظا^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ و $جتا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

٢

اكتب قيمة كل ممّا يأتي بدلالة π:

أ $جا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ب $ظا^{-١}(-١)$ ج $جتا^{-١}\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

د $ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ هـ $جتا^{-١}\left(-\frac{١}{٢}\right)$ و $جا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

٣

أوجِد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ $جا(جا^{-١}(٠,٥))$ ب $جتا(جتا^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right))$

ج $ظا(ظا^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right))$ د $جتا(جتا^{-١}(١))$

٤

أوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ $جتا^{-١}(جتا\ \frac{٣\pi}{٤})$ ب $جا^{-١}(جا\ \frac{١٣\pi}{٦})$

ج $ظا^{-١}(ظا\ \frac{\pi}{٦})$ د $جتا^{-١}(جتا\ ٢\pi)$

هـ $جا^{-١}(جا\ \frac{٢\pi}{٣})$ و $ظا^{-١}(ظا\ \frac{٥\pi}{٤})$

ز $جتا^{-١}(جتا\ \frac{٥\pi}{٤})$ ح $جا^{-١}(جا\ \frac{١١\pi}{٦})$

٥

إذا علمت أن هـ = $جتا^{-١}\left(\frac{٣}{٥}\right)$، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ $جا^{٢}$ هـ ب $ظا^{٢}$ هـ

٦	**٣)** إذا علمت أن هـ = جا$^{-١}$ $\left(\frac{\sqrt{٧}}{٤}\right)$ ، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي: أ جتا^{٢} هـ ب ظا^{٢} هـ
٧	إذا علمت أن هـ = ظا$^{-١}$ $(-\sqrt{٣})$ ، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي: أ جتا هـ ب جا هـ
٨	إذا علمت أن هـ = جا$^{-١}$ $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي: أ ظا هـ ب $\frac{١٢}{١ + \text{جتا هـ}}$
٩	إذا علمت أن هـ = جتا$^{-١}$ $\left(-\frac{٢}{٣}\right)$ ، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي: أ جا هـ ب ظا هـ
١٠	إذا علمت أن الدالة د (س) = -٤ + ٣جا س معرّفة على المجال $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ س $\leqslant \frac{\pi}{٢}$، فأوجِد: أ مدى الدالة د (س). ب د$^{-١}$ (س).
١١	إذا علمت أن الدالة د (س) = -٦ + ٢ جتا س معرّفة على المجال ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$ ، فأوجِد: أ مدى الدالة د (س). ب د$^{-١}$ (س).
١٢	إذا علمت أن الدالة د (س) = ٦ -٤ جا$\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$ معرّفة على المجال $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$ فأوجِد: أ مدى الدالة د (س). ب د$^{-١}$ (س).
١٣	الدالة د (س) = ٤ - ٢جتا س معرّفة على المجال ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$: أ أوجِد مدى الدالة د (س)، وارسم بيان الدالة ص = د (س). ب فسّر سبب وجود دالة عكسية للدالة د (س)، وأوجِد د$^{-١}$(س). ج ارسم بيان الدالة ص = د$^{-١}$ (س) فى المستوى الإحداثى نفسه للدالة فى الجزئية (أ).

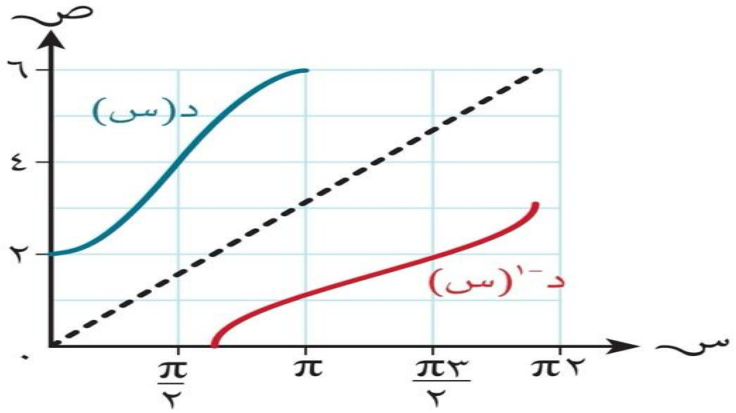
١٤	إذا علمت أن الدالة د (س) = −٥ + ٤جتا$\left(\frac{س}{٢}\right)$ معرّفة على المجال ٠ ≤ س ≤ ٢π، فأوجِد: أ مدى الدالة د (س). ب د$^{-١}$(س)، وحدد مداها.
١٥	الدالة د(س) = ٢جتا س - ٣ ، حيث ك ≤ س ≤ ٢π أ أوجِد أقل قيمة لـ ك عندما تكون للدالة د(س) دالة عكسية. _____ _____ ب مستخدمًا الإجابة في الجزئية (أ)، أوجِد د$^{-١}$(س) واذكر مجالها.
١٦	الدالة د(س) = ٥ − ٢جا س، حيث $\frac{\pi}{٢}$ ≤ س ≤ ك أ أوجِد أكبر قيمة لـ ك عندما تكون للدالة د(س) دالة عكسية. _____ _____ ب مستخدمًا الإجابة في الجزئية (أ)، أوجِد د$^{-١}$(س) واذكر مجالها.
١٧	**أوجد مجال ومدى كل دالة من الدوال الآتية:** أ ص = ظا$^{-١}$ (٣س) ب ص = جا$^{-١}$ (س) + ٣ ج ص = جتا$^{-١}$ (س) - ٢ د ص = جا$^{-١}$ (٢س) + ١ هـ ص = ٣ جتا$^{-١}$ ($\frac{١}{٢}$ س - ١) + ٢

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	أ) 90° ب) -30° ج) 60° د) 90° هـ) -30° و) 45°
٢	أ) $\frac{\pi}{3}$ ب) $-\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{5\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{6}$ هـ) $\frac{2\pi}{3}$ و) $\frac{\pi}{4}$
٣	أ) ٠,٥ ب) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ج) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ د) ١
٤	أ) $\frac{3\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{6}$ ج) $\frac{\pi}{6}$ د) ٠ هـ) $\frac{\pi}{3}$ و) $\frac{\pi}{4}$ ز) $\frac{3\pi}{4}$ ح) $-\frac{\pi}{6}$
٥	أ) $\frac{16}{25}$ ب) $\frac{16}{9}$
٦	أ) $\frac{9}{16}$ ب) $\frac{7}{9}$
٧	أ) $\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
٨	أ) $-\sqrt{3}$ ب) ٨
٩	أ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ب) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$
١٠	أ) $-7 \leq ص \leq -1$ ب) $د^{-1}(س) = جا^{-1}\left(\frac{س+4}{3}\right)$
١١	أ) $-8 \leq ص \leq -4$ ب) $د^{-1}(س) = جتا^{-1}\left(\frac{س+6}{2}\right)$
١٢	أ) $2 \leq ص \leq 10$ ب) $د^{-1}(س) = 2جا^{-1}\left(\frac{6-س}{4}\right)$

١٣

أ) $٢ \leqslant د(س) \leqslant ٦$



ب) الدالة د(س) واحد إلى واحد،

$د^{-١}(س) = جتا^{-١}\left(\frac{٤ - س}{٢}\right)$

١٤

أ) $-٩ \leqslant د(س) \leqslant -١$

ب) $د^{-١}(س) = ٢ جتا^{-١}\left(\frac{س + ٥}{٤}\right)$، $٠ \leqslant د^{-١}(س) \leqslant ٢\pi$

١٥

أ) π ب) $د^{-١}(س) = جتا^{-١}\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$

المجال $-٥ \leqslant س \leqslant -١$

١٦

أ) $\frac{٣\pi}{٢}$

ب) $د^{-١}(س) = جا^{-١}\left(\frac{٥ - س}{٢}\right)$، $٣ \leqslant س \leqslant ٧$

١٧

أ) المجال: ع

المدى: $-\frac{\pi}{٢} < ص < \frac{\pi}{٢}$

ب) المجال: $-١ \leqslant س \leqslant ١$

المدى: $-\frac{\pi}{٢} + ٣ \leqslant ص \leqslant \frac{\pi}{٢} + ٣$

ج) المجال: $-١ \leqslant س \leqslant ١$

المدى: $-٢ \leqslant ص \leqslant \pi - ٢$

د) المجال: $-\frac{١}{٢} \leqslant س \leqslant \frac{١}{٢}$

المدى: $-\frac{\pi}{٢} + ١ \leqslant ص \leqslant \frac{\pi}{٢} + ١$

هـ) المجال: $٠ \leqslant س \leqslant ٤$

المدى: $٢ \leqslant ص \leqslant \pi٣ + ٢$

الدرس السادس : المعادلات المثلثية

١	حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $0^\circ \leq$ س $\leq 360^\circ$: أ ظا س = ١,٨ ب جا س = ٠,٦ ج جتا س = ٠,٢٥ د ٢ جا س + ١ = ٠ هـ ظا س - ١ = ٠ و ٤ جتا س + ٣ = ٠ ز $\sqrt{3}$ ظا س + ١ = ٠ ح ٥ جا س - ٢ = ٠
٢	حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π: أ جا س = ٠,٣ ب جتا س = ٠,٦ ج ظا س = ٢ د ٢ جا س + $\sqrt{3}$ = ٠ هـ ٢ ظا س + ٣ = ٠ و ٢ جتا س + ١ = ٠ ز ٤ جا س - ١ = ٠ ح ٥ ظا س + ٨ = ٠
٣	أوجِد قيم هـ في الفترة $-360^\circ <$ هـ $< 360^\circ$ عندما ٣ جا $\left(\frac{هـ}{٢}\right) = -٢$ حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $0^\circ \leq$ س $\leq 180^\circ$: أ جتا (٤س) = ٠,٨ ب جا (٣س) = ٠,٦ ج ظا (٢س) = ٣ د ٥ جا (٢س) = -١ هـ ٣ جتا (٢س) = ١ و ٢ + ٢ ظا (٢س) = ٠ ز ٢ جتا (٣س) + $\sqrt{3}$ = ٠ ح ١ - ٤ جا (٣س) = ٠
٤	أوجِد قيم هـ في الفترة $-360^\circ <$ هـ $< 360^\circ$ عندما ٣ جا $\left(\frac{هـ}{٢}\right) = -٢$
٥	حل المعادلة ٢ ظا $\left(\frac{هـ}{٣}\right)$ = ٥، حيث $0^\circ <$ هـ $< 540^\circ$
٦	أوجِد قيم س في الفترة $-360^\circ <$ س $< 360^\circ$ عندما ٢ جا (٢س + 30°) + $\sqrt{3}$ = ٠
٧	حل المعادلة ٢ جتا (٣س - 50°) - $\sqrt{2}$ = ٠، حيث $-90^\circ <$ س $< 90^\circ$
٨	حل المعادلة (ظا س + ١)(٥ جا س - ٢) = ٠، حيث $0^\circ \leq$ س $\leq 360^\circ$، س $\neq 90^\circ$، س $\neq 270^\circ$

٩

حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة المعطاة:

أ $\text{جتا}(س - ٣٠°) = ٠,٥$ حيث $٠° \leq س \leq ٣٦٠°$

ب $\text{جا}(س + \frac{\pi}{٣}) = -٠,٥$ حيث $٠ < س < ٢\pi$

ج $\text{جتا}(٢س + ٦٠°) = -٠,٦$ حيث $٠° \leq س \leq ١٨٠°$

د $٥\,\text{جا}(٢س - ٣°) = ٢$ حيث $٠ < س < \pi$

هـ $٣\sqrt{٧}\,\text{ظا}(\frac{س}{٢}) - ١ = ٠$ حيث $٠° \leq س \leq ٥٤٠°$

و $٢\sqrt{٧}\,\text{جتا}(\frac{س}{٣} + \frac{\pi}{٤}) + ١ = ٠$ حيث $٠ \leq س \leq ٤\pi$

ز $٢\,\text{ظا}(٢س + ٤٥°) + ٧ = ٠$ حيث $٠° \leq س \leq ١٨٠°$

ح $٤\text{جا}(٢س - ٦٠°) - ٣ = ٠$ حيث $٠° \leq س \leq ١٨٠°$

١٠

حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $٠° \leq س \leq ٣٦٠°$:

أ $\text{جا}س = \text{جتا}س$

ب $٢\,\text{جا}س - \text{جتا}س = ٠$

ج $٤\,\text{جا}س + ٧\,\text{جتا}س = ٠$

د $٢\,\text{جا}س - ١١\,\text{جتا}س = ٠$

هـ $٣\,\text{جتا}(٢س) + ٤\,\text{جا}(٢س) = ٠$

و $٤\,\text{جتا}(س + ٤٥°) - \text{جا}(س + ٤٥°) = ٠$

١١

حل المعادلة $٤\,\text{جا}(٢س + ٠,٥) - ٦\,\text{جتا}(٢س + ٠,٥) = ٠$ حيث $٠ \leq س \leq \pi$

١٢

حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $٠° \leq س \leq ٣٦٠°$:

أ $\text{جا}س \times \text{جتا}(س - ٦٠°) = ٠$

ب $٥\text{جا}^٢س - ٣\text{جا}س = ٠$

ج $\text{ظا}^٢س = ٥\,\text{ظا}س$

د $\text{جا}^٢س + ٢\,\text{جا}س \times \text{جتا}س = ٠$

هـ $٢\,\text{جا}س \times \text{جتا}س = \text{جا}س$

و $\text{جا}س \times \text{ظا}س = ٤\,\text{جا}س$

١٣ حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $0^\circ \leq$ س $\leq 360^\circ$:

أ) $جتا^2 س - جتا س = 0$ ب) $2جا^2 س = جا س$

ج) $جتا^2 س - 2جا س \times جتا س = 0$ د) $ظا س \times (جا س - 5جتا س) = 0$

١٤ حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $0^\circ \leq$ س $\leq 360^\circ$:

أ) $2جا^2 س + جا س - 1 = 0$ ب) $ظا^2 س + 2ظا س - 3 = 0$

ج) $3جتا^2 س - 2جتا س - 1 = 0$ د) $2جا^2 س - جتا س - 1 = 0$

هـ) $3جتا^2 س - 3 = جا س$ و) $جتا س + 5 = 6جا^2 س$

ز) $2جتا^2 س - جا^2 س - 2جا س - 1 = 0$ ح) $1 + ظا س \times جتا س = 2جتا^2 س$

١٥ حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $0^\circ \leq$ س $\leq 360^\circ$:

أ) $4 جتا^2 س + 4 جتا س + 1 = 0$ ب) $جا^2 س - جا س = 2$

ج) $ظا^2 س + 2ظا س + 1 = 0$ د) $6 جتا^2 س + 7 جا س - 8 = 0$

هـ) $4جا^2 س + 11جتا س - 1 = 0$ و) $2جتا^2 س = 3 جا س + 3$

ز) $3 جا^2 س + جتا^2 س + 3 جتا س - 4 = 0$ ح) $ظا س \times جا س = 1 + جتا س$

١٦ حل المعادلة $جا^2 س + 3جا س \times جتا س + 2جتا^2 س = 0$، حيث $0 \leq$ س $\leq 2\pi$.

١٧ حل المعادلة $جا^2 س - 2 جا س \times جتا س + جتا^2 س = 0$، حيث $0 \leq$ س $\leq 2\pi$.

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	أ) ٦٠,٩٥°، ٢٤٠,٩٥° ب) ٣٦,٨٧°، ١٤٣,١٣° ج) ٧٥,٥٢°، ٢٨٤,٤٨° د) ٢١٠°، ٣٣٠° هـ) ٤٥°، ٢٢٥° و) ١٣٨,٥٩°، ٢٢١,٤١° ز) ١٥٠°، ٣٣٠° ح) ٢٣,٥٨°، ١٥٦,٤٢°
٢	أ) ٠,٣٠٥ث، ٢,٨٤ث ب) ٠,٩٢٧ث، ٥,٣٦ث ج) ١,١١ث، ٤,٢٥ث د) $\frac{\pi ٤}{٣}$، $\frac{\pi ٥}{٣}$ هـ) ٢,١٦ث، ٥,٣ث و) $\frac{\pi ٢}{٣}$، $\frac{\pi ٤}{٣}$ ز) ٠,٢٥٣ث، ٢,٨٩ث ح) ٢,١٣ث، ٥,٢٧ث
٣	أ) ٩,٢٢°، ٨٠,٧٨°، ٩٩,٢٢°، ١٧٠,٧٨° ب) ١٢,٢٩°، ٤٧,٧١°، ١٣٢,٢٩° ج) ٣٥,٧٩°، ١٢٥,٧٩° د) ٩٥,٧٧°، ١٧٤,٢٣° هـ) ٣٥,٢٦°، ١٤٤,٧٤° و) ٦٧,٥°، ١٥٧,٥° ز) ٥٠°، ٧٠°، ١٧٠° ح) ٤,٨٣°، ٥٥,١٧°، ١٧٥,١٣°
٤	−٢٧٦°، −٨٣°
٥	٢٠٥°
٦	−٢٥٥°، −٢٢٥°، −٧٥°، −٤٥°، ١٠٥°، ١٣٥°، ٢٨٥°، ٣١٥°

٧	$-٣,٨٨^\circ$ ، $١,٦٧^\circ$ ، $٣١,٧^\circ$
٨	$٢٣,٦^\circ$ ، ١٣٥° ، $١٥٦,٤^\circ$ ، ٣١٥°
٩	أ) ٩٠° ، ٣٣٠° ، -٣٠° ب) $\frac{\pi ٣}{٢}$ ، $\frac{\pi ٥}{٦}$ ج) $٣٣,٤٤^\circ$ ، $٨٦,٦٦^\circ$ د) $١,٧١^{ج}$ ، $٢,٨٦^{ج}$ هـ) ٦٠° ، ٤٢٠° و) $\frac{\pi ٣}{٢}$ ، $\pi ٣$ ز) $٣٠,٤٥^\circ$ ، $١٢٠,٤٥^\circ$ ح) $٥٤,٣^\circ$ ، $٩٥,٧١^\circ$
١٠	أ) ٤٥° ، ٢٢٥° ب) $٢٦,٥٧^\circ$ ، $٢٠٦,٥٧^\circ$ ج) $١١٩,٧٤^\circ$ ، $٢٩٩,٧٤^\circ$ د) $٧٩,٧^\circ$ ، $٢٥٩,٧^\circ$ هـ) $٧١,٥٧^\circ$ ، $١٦١,٥٧^\circ$ ، $٢٥١,٥٧^\circ$ ، $٣٤١,٥٧^\circ$ و) $٣٠,٩٦^\circ$ ، $٢١٠,٩٦^\circ$
١١	$٠,٢٤^{ج}$ ، $١,٨١^{ج}$
١٢	أ ٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠° ، ٣٣٠° ، ٣٦٠° ب ٠° ، $٣٦,٩^\circ$ ، $١٤٣,١^\circ$ ، ١٨٠° ، ٣٦٠° ج ٠° ، $٧٨,٧^\circ$ ، ١٨٠° ، $٢٥٨,٧^\circ$ ، ٣٦٠° د ٠° ، $١١٦,٦^\circ$ ، ١٨٠° ، $٢٩٦,٦^\circ$ ، ٣٦٠° هـ ٠° ، ٦٠° ، ١٨٠° ، ٣٠٠° ، ٣٦٠° و ٠° ، $٧٦,٠^\circ$ ، ١٨٠° ، $٢٥٦,٠^\circ$ ، ٣٦٠°
١٣	أ) ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٠° ، ٣٦٠° ب) ١٥٠° ، ٣٠° ، ٠° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° ج) ٩٠° ، ٢٧٠° ، $٢٦,٥٧^\circ$ ، $٢٠٦,٥٧^\circ$ د) ٠° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° ، $٧٨,٦٩^\circ$ ، $٢٥٨,٦٩^\circ$

١٤	أ ٣٠°، ١٥٠°، ٢٧٠° ب ٤٥°، ١٠٨,٤°، ٢٢٥°، ٢٨٨,٤° ج ٠°، ١٠٩,٥°، ٢٥٠,٥°، ٣٦٠° د ٦٠°، ١٨٠°، ٣٠٠° هـ ٠°، ١٨٠°، ١٩٩,٥°، ٣٤٠,٥°، ٣٦٠° و ٧٠,٥°، ١٢٠°، ٢٤٠°، ٢٨٩,٥° ز ١٩,٥°، ١٦٠,٥°، ٢٧٠° ح ٣٠°، ١٥٠°، ٢٧٠°
١٥	أ) ١٢٠°، ٢٤٠° ب) ٢٧٠° ج) ١٣٥°، ٣١٥° د) ٣٠°، ١٥٠°، ٤١,١٨°، ١٣٨,١٩° هـ) ١٠٤,٤٨°، ٢٥٥,٥٢° و) ٢١٠°، ٣٣٠°، ٢٧٠° ز) ٠°، ٣٦٠°، ٦٠°، ٣٠٠° ح) ١٨٠°، ٦٠°، ٣٠٠°
١٦	٢,٠٣ ج، $\frac{\pi ٣}{٤}$، ٥,١٨ ج، $\frac{\pi ٧}{٤}$
١٧	$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi ٥}{٤}$

الدرس السابع: المتطابقات المثلثية

١	اكتب العبارة ٢جا^{٢}س − ٧جتا^{٢}س + ٤ بدلالة جا س.
٢	اكتب جتا^{٢} س − جا^{٢} س بدلالة جتا س.
٣	اكتب ٣جا^{٢} س + ٤جتا^{٢} س بدلالة جا س.
٤	اكتب ٣جتا^{٢} س − ٢جا^{٢} س بدلالة جتا س.
٥	أوجِد قيمة كل ممّا يأتي: أ ٣جا^{٢} (س) + ٣جتا^{٢} (س) ب جا^{٢} (٥س) + جتا^{٢} (٥س) ج −٢جتا^{٢} (٢س) − ٢جا^{٢} (٢س) د $\frac{٣}{٢جا^{٢}(٤س)} - \frac{٣}{٢ظا^{٢}(٤س)}$
٦	اكتب كلًّا ممّا يأتي بدلالة جتا س: أ ٣ − ٢ظا^{٢} س ب $\frac{١}{١ + ظا^{٢}س}$
٧	أثبت المتطابقة: $\frac{١ + ظا^{٢}س}{١ + \frac{جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}} \equiv ظا^{٢}س$
٨	أثبت أن: $\frac{جاس \times جتاس}{ظاس} + \frac{ظاس}{\frac{١}{جاس} \times \frac{١}{جتاس}} \equiv ١$
٩	أثبت المتطابقة: $\frac{جتاس}{جاس} - ظاس \equiv \frac{١ - ظا^{٢}س}{ظاس}$

١٠ أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) جتا س × ظا س ≡ جا س

ب) $\frac{١ - جتا^{٢}س}{جا س \times جتا س} \equiv ظا س$

ج) $\frac{جتا^{٢}س}{(١ - جا س)} \equiv ١ + جا س$

د) $\frac{١ + جا س - جا^{٢}س}{جتا س} \equiv جتا س + ظا س$

هـ) $\frac{جتا^{٢}س - جا^{٢}س}{جتا س + جا س} + جا س \equiv جتا س$

و) $جتا^{٤}س + جا^{٢}س \times جتا^{٢}س \equiv جتا^{٢}س$

١١ أثبت المتطابقة: $\frac{١}{جتا هـ} - جتا هـ \equiv جا هـ \times ظا هـ$.

١٢ أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $(جا س + جتا س)^{٢} \equiv ١ + ٢جا س \times جتا س$

ب) $٢(١ + جتا س) - (١ + جتا س)^{٢} \equiv جا^{٢}س$

ج) $٢ - (جا س + جتا س)^{٢} \equiv (جا س - جتا س)^{٢}$

د) $(جتا^{٢}س - ٢)^{٢} - ٣جا^{٢}س \equiv جتا^{٤}س + جا^{٢}س$

١٣ أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $جتا^{٢}س - جا^{٢}س \equiv ٢جتا^{٢}س - ١$

ب) $جتا^{٢}س - جا^{٢}س \equiv ١ - ٢جا^{٢}س$

ج) $ظا^{٢}س - جا^{٢}س \equiv ظا^{٢}س \times جا^{٢}س$

د) $جتا^{٤}س + جا^{٢}س \equiv جا^{٤}س + جتا^{٢}س$

١٤ أثبت المتطابقة: $\frac{جتا س - جا س \times ظا س}{جتا س + جا س} \equiv ١ - ظا س$

١٥ أثبت المتطابقة: $\frac{(جا س + جتا س)^{٢}}{جتا س} \equiv \frac{١}{جتا س} + ٢جا س$

١٦ أثبت المتطابقة: $\frac{جا س}{١ - جا س} \equiv \frac{ظا س}{جتا س} + ظا^{٢}س$

١٧ استخدم المتطابقتَين: ظا هـ $\equiv \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$، حيث جتا هـ $\neq ٠$، جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ $\equiv ١$ لتبيّن كلًّا ممّا يأتي:

أ $\frac{١}{\text{جا هـ}} - \frac{١}{\text{ظا هـ}} \equiv \frac{١ - \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

ب $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{١ - \text{جتا هـ}} \equiv ١ + \text{جتا هـ}$

ج $\frac{١}{\text{جتا هـ}} + \text{ظا هـ} \equiv \frac{\text{جتا هـ}}{١ - \text{جا هـ}}$

د $\frac{\text{ظا هـ} \times \text{جا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}} \equiv ١ + \frac{١}{\text{جتا هـ}}$

١٨ أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ ١) $(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} + (\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢} \equiv ٢$

٢) $(٢\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢} + (\text{جا س} + ٢\text{جتا س})^{٢} \equiv ٥$

ب ١) جا هـ × ظا هـ + جتا هـ $\equiv \frac{١}{\text{جتا هـ}}$

٢) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{١}{\text{جا هـ}} - \text{جا هـ}$

١٩ أثبت المتطابقة: $\frac{١}{١ - \text{جا س}} + \frac{١}{١ + \text{جا س}} \equiv \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$

٢٠ أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ $\frac{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{\text{جتا س} - \text{جا س}} \equiv \text{جتا س} + \text{جا س}$

ب $\text{جا}^4 س - \text{جتا}^4 س \equiv 2\text{جا}^2 س - 1$

ج $\frac{\text{جتا}^4 س - \text{جا}^4 س}{\text{جتا}^2 س} \equiv 1 - \text{ظا}^2 س$

د $\frac{\text{جتا س}}{\text{ظا س}(1 - \text{جا س})} \equiv 1 + \frac{1}{\text{جا س}}$

هـ $\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \equiv \frac{\text{ظا س} - 1}{\text{ظا س} + 1}$

و $\left(\frac{1}{\text{جا س}} - \frac{1}{\text{ظا س}}\right)^2 \equiv \frac{1 - \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$

ز $\frac{\text{ظا س} + 1}{\text{جا س} \times \text{ظا س} + \text{جتا س}} \equiv \text{جا س} + \text{جتا س}$

ح $\frac{\text{جا}^2 س(1 - \text{جتا}^2 س)}{\text{جتا}^2 س(1 - \text{جا}^2 س)} \equiv \text{ظا}^4 س$

٢١ بسّط العبارة $\left(\frac{1}{\text{جا س}} - \frac{1}{\text{ظا س}}\right)\left(\frac{1}{\text{جا س}} + \frac{1}{\text{ظا س}}\right)$

٢٢ أثبت المتطابقة: $\frac{1}{\text{جتا س}} - \frac{\text{جتا س}}{1 + \text{جا س}} \equiv \text{ظا س}$.

٢٣ أثبت المتطابقة: $\text{جا س} - \text{جتا س} \equiv \frac{1 - 2\text{جا}^2 س}{\text{جا س} + \text{جتا س}}$

٢٤ أثبت المتطابقة: $\left(\frac{1}{\text{جتا س}} - \text{ظا س}\right)^2 \equiv \frac{1 - \text{جا س}}{1 + \text{جا س}}$

٢٥ بيّن أن $(1 + \text{جتا س})^2 + (1 - \text{جتا س})^2 + 2\text{جا}^2 س$ لها قيمة ثابتة لكل قيم س.

٢٦ أ اكتب العبارة $7\text{جا}^2 س + 4\text{جتا}^2 س$ في صورة $أ + ب\,\text{جا}^2 س$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب اذكر مدى الدالة د(س) = $7\text{جا}^2 س + 4\text{جتا}^2 س$، حيث $0 \leq س \leq 2\pi$.

٢٧ أ اكتب العبارة $4\text{جا هـ} - \text{جتا}^2 هـ$ في صورة $(\text{جا هـ} + أ)^2 + ب$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب اذكر القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لـ $4\text{جا هـ} - \text{جتا}^2 هـ$، حيث $0 \leq هـ \leq 2\pi$.

٢٨ إذا علمت أن $أ = \frac{1 - \text{جا هـ}}{2\text{جتا هـ}}$:

أ بيّن أن $\frac{1}{أ} = \frac{2(1 + \text{جا هـ})}{\text{جتا هـ}}$

ب أوجِد قيمتَي كل من جا هـ، جتا هـ بدلالة أ.

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	$٩\ جا^{٢}س - ٣$
٢	$٢\ جتا^{٢}س - ١$
٣	$٤ - جا^{٢}س$
٤	$٥\ جتا^{٢}س - ٢$
٥	أ ٣ ب ١ ج -٢ د $\frac{٣}{٢}$
٦	أ $٥ - \frac{٢}{جتا^{٢}س}$ ب $جتا^{٢}س$
٢٦	أ $٤ + ٣\ جا^{٢}س$ ب $٤ \geqslant د(س) \geqslant ٧$
٢٧	أ $(جا هـ + ٢)^{٢} - ٥$ ب القيمة الصغرى لعبارة $٤\ جا هـ - جتا^{٢}هـ$ هي $١ - ٥ = -٤$ القيمة العظمى لها هي $٤\ جا هـ - جتا^{٢}هـ$ هي $٩ - ٥ = ٤$
٢٨	ب $جا هـ = \frac{١ - ٤أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}}$، $جتا هـ = \frac{٤أ}{١ + ٤أ^{٢}}$

الدرس الثامن:المزيد من المعادلات المثلثية

١	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ في صورة ظا هـ = ك، حيث ك عدد ثابت. ب حلّ المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$
٢	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جتا هـ – ٢ جا هـ = ٤ جتا هـ في صورة ظا هـ = ك، حيث ك عدد ثابت. ب حلّ المعادلة جتا هـ – ٢ جا هـ = ٤ جتا هـ حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$
٣	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٣جا^٢ هـ + ٥جا هـ × جتا هـ = ٢جتا^٢ هـ في صورة ٣ ظا^٢ هـ + ٥ ظا هـ – ٢ = ٠ ب حلّ المعادلة ٣جا^٢ هـ + ٥جا × جتا هـ = ٢جتا^٢ هـ، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ١٨٠^\circ$
٤	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٢جا^٢ هـ + جا هـ × جتا هـ = جتا^٢ هـ في صورة ٢ظا^٢ هـ + ظا هـ – ١ = ٠ ب حلّ المعادلة ٢جا^٢ هـ + جا هـ × جتا هـ = جتا^٢ هـ، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ١٨٠^\circ$
٥	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٨جا^٢ هـ + ٢جتا^٢ هـ – جتا هـ = ٦ في صورة ٦جتا^٢ هـ + جتا هـ – ٢ = ٠ ب حل المعادلة ٨جا^٢ هـ + ٢جتا^٢ هـ – جتا هـ = ٦، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$
٦	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٣جتا^٢ هـ + ٥جا^٢ هـ +٣جا هـ = ٢ في صورة ٢جا^٢ هـ + ٣جا هـ + ١ = ٠ ب حل المعادلة ٣جتا^٢ هـ + ٥جا^٢ هـ +٣جا هـ = ٢، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$
٧	أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٤جا^٤ هـ + ١٤ = ١٩جتا^٢ هـ في صورة ٤س^٢ + ١٩س – ٥ = ٠، حيث س = جا^٢ هـ. ب حل المعادلة ٤جا^٤ هـ + ١٤ = ١٩جتا^٢ هـ، حيث ٠ $\leq$ هـ $\leq ٢\pi$

٨

أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ١٦ جتا^{٤}هـ + ١٦جا^{٢}هـ = ١٣ في صورة ١٦ س^{٢} - ١٦ س + ٣ = ٠ حيث س = جتا^{٢}هـ

ب حل المعادلة ١٦ جتا^{٤}هـ + ١٦جا^{٢}هـ = ١٣ ، حيث ٠ ≤ هـ ≤ π

٩

أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جا هـ × ظا هـ = ٣ في صورة جتا^{٢}هـ + ٣جتا هـ - ١ = ٠

ب حل المعادلة جا هـ × ظا هـ = ٣، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

١٠

أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٢جا هـ × ظا هـ = ٣ في صورة ٢جتا^{٢}هـ + ٣جتا هـ - ٢ = ٠

ب حل المعادلة ٢جا هـ × ظا هـ = ٣ ، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

١١

أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٥(٢جا هـ - جتا هـ) = ٤(جا هـ + ٢جتا هـ) في صورة ظا هـ = $\frac{١٣}{٦}$

ب حل المعادلة ٥(٢جا هـ - جتا هـ) = ٤(جا هـ + ٢جتا هـ)، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

١٢

أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جا هـ}}{١ + \text{جتا هـ}} + \frac{١ + \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{٢}{\text{جا هـ}}$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جا هـ}}{١ + \text{جتا هـ}} + \frac{١ + \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = ١ + ٣\,\text{جا هـ}$، حيث ٠ ≤ هـ ≤ ٢π

١٣

أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}(١ + \text{جا هـ})} \equiv \frac{١}{\text{جا هـ}} - ١$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}(١ + \text{جا هـ})} = ١$، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

١٤

أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}(١ - \text{جا هـ})} \equiv \frac{١}{\text{جا هـ}} + ١$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}(١ - \text{جا هـ})} = -١$ ، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$

١٥

أ برهن المتطابقة $\frac{١}{١ + \text{جا هـ}} + \frac{١}{١ - \text{جا هـ}} \equiv \frac{٢}{\text{جتا}^٢ \text{هـ}}$

ب حل المعادلة جتا هـ $\left(\frac{١}{١ + \text{جا هـ}} + \frac{١}{١ - \text{جا هـ}}\right) = ٥$، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$

١٦

أ برهن المتطابقة $\left(\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}}\right)^٢ \equiv \frac{١ + \text{جتا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}}$

ب حل المعادلة $\left(\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}}\right)^٢ = ٢$، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$

١٧

أ برهن المتطابقة $\left(\frac{١}{\text{جتا هـ}} - \text{ظا هـ}\right)^٢ \equiv \frac{١ - \text{جا هـ}}{١ + \text{جا هـ}}$

ب حل المعادلة $\left(\frac{١}{\text{جتا هـ}} - \text{ظا هـ}\right)^٢ = ٣$، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$

١٨

أ برهن المتطابقة جتا^٤ هـ $-$ جا^٤ هـ $\equiv ٢$جتا^٢ هـ $- ١$

ب حل المعادلة جتا^٤ هـ $-$ جا^٤ هـ $= \frac{١}{٢}$، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$

١٩

أ برهن المتطابقة جتا^٤ هـ $-$ جا^٤ هـ $\equiv ١ - ٢$جا^٢ هـ

ب حل المعادلة جتا^٤ هـ $-$ جا^٤ هـ $= -١$ ، حيث $٠^\circ \leq$ هـ $\leq ٣٦٠^\circ$

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	ب ٧٦,٠°، ٢٥٦,٠°
٢	ب ١٢٣,٧°، ٣٠٣,٧°
٣	ب ١٨,٤°، ١١٦,٦°
٤	ب ١٣٥°، ٢٦,٦°
٥	ب ٦٠°، ١٣١,٨°، ٢٢٨,٢°، ٣٠٠°
٦	ب ٢٧٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°
٧	ب $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi٥}{٦}$، $\frac{\pi٧}{٦}$، $\frac{\pi١١}{٦}$
٨	ب ٦٠°، ١٢٠°، ٣٠°، ١٥٠°
٩	ب ٧٢,٤°، ٢٨٧,٦°
١٠	ب ٦٠°، ٣٠٠°
١١	ب ٦٥,٢°، ٢٤٥,٢°
١٢	ب ٤١,٨١°، ١٣٨,١٩°، ٢٧٠°
١٣	ب ٣٠°، ١٥٠°
١٤	ب ٢١٠°، ٣٣٠°
١٥	ب ٦٦,٤°، ٢٩٣,٦°
١٦	ب ٧٠,٥°، ٢٨٩,٥°
١٧	ب ٢١٠°، ٣٣٠°
١٨	ب ٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°
١٩	ب ٩٠°، ٢٧٠°