تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العمانية

كراسة تدريبية في الوحدة الثالثة مقدمة في النهايات والاتصال

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2024-09-26 08:50:15

إعداد: سلطان محمد السيابي

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العلمي

اضغط هنا للحصول على جميع روابط "الصف الثاني عشر العلمي"

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العلمي والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول

1	دفتر الطالب
2	كراسة تدريبية في الوحدة الثانية حساب المثلثات مع الإجابات الجزء الثاني
3	كراسة تدريبية في الوحدة الثانية حساب المثلثات مع الإجابات الجزء الأول

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

كراسة تدريبية

المادة:الرياضيات المتقدمة

الوحدة:مقدمة في النهايات والاتصال

اعداد: أ.سلطان محمد السيابي

دعواتكم لي ولوالديَّ بدخول الجنة

الفهرس

الموضوع	الصفحة
٣-١أ نهاية الدالة كثيرة الحدود	٣ ـ ٨
٣-١ب نهاية الدالة النسبيّة	٩ ـ ١٧
٣-١ج نهاية الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة	١٨ ـ ٢٨
نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية (س $\to \pm\infty$)	٢٩ ـ ٣٤
خواص النهايات	٣٥ ـ ٤٣
الاتصال	٤٤ ـ ٥٦

الدرس الأول:نهاية الدالة عند نقطة

أ- نهاية الدالة كثيرة الحدود

١

استخدم رمز النهاية لتكتب كل عبارة من العبارات الآتية:

أ قيمة الدالة ع(س) تقترب من ٢ عندما تقترب قيمة س من ٦ من جهة اليسار.

ب قيمة الدالة ع(س) تقترب من ـ ١ عندما تقترب قيمة س من ٣ من جهة اليمين

ج عندما تتناقص قيمة س لتقترب من ٥، فإن قيمة هـ(س) تقترب من ١١

د عندما تتزايد قيمة س لتقترب من ٧، فإن قيمة هـ(س) تقترب من ـ ١٥

هـ تقترب ك(س) من الصفر عندما تقترب قيمة س من ـ١

و عندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار، ومن جهة اليمين، فإن قيم الدالة د (س) تقترب من ٧، وعليه تكون د (س) تقترب من ٧ عندما تقترب س من ٤

٢

عبّر لفظيًّا عن معنى كل نهاية من النهايتَين الآتيتَين:

أ $\lim_{س \to +٨} د(س) = ١٢$

ب $\lim_{س \to -٩} هـ(س) = ٥$

ج $\lim_{س \to -٣} هـ(س) = -٦$

د $\lim_{س \to ١} د(س) = ٣$

٣

انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة $\lim_{س \to ٣} د(س)$ للدالة د(س) = ٢س + ٥

من جهة اليمين	
س	د(س)
٣,١	
٣,٠١	
٣,٠٠١	
٣,٠٠٠١	

من جهة اليسار	
س	د(س)
٢,٩	
٢,٩٩	
٢,٩٩٩	
٢,٩٩٩٩	

٤ انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة نهـــــا ع (س) للدالة ع (س) = ١١ + ٦ س – س^{٢}
س ← ٥

من جهة اليمين	
س	د(س)
٥,١	
٥,٠١	
٥,٠٠١	
٥,٠٠٠١	

من جهة اليسار	
س	د(س)
٤,٩	
٤,٩٩	
٤,٩٩٩	
٤,٩٩٩٩	

٥ انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة نهـــــا د (س) للدالة د(س) = ٥ – ٢ س:
س ← ١

من جهة اليمين	
س	د(س)

من جهة اليسار	
س	د(س)

٦ انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة نهـــــا د (س) للدالة د(س) = س^{٣} – س^{٢} + ٣٦
س ← – ٢

من جهة اليمين	
س	د(س)

من جهة اليسار	
س	د(س)

٧	أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر $\lim_{س \to -١}$ م(س) حيث م(س) = ٦ − ٧س
٨	أنشئ جدول لتقدّر $\lim_{س \to -٦}$ ن(س) حيث ن(س) = ٢س − $\frac{س^{٢}}{٤}$
٩	أنشئ جدول لتقدّر $\lim_{س \to -٣+}$ هـ(س) حيث هـ(س) = ٥ س^{٢} + س − ١
١٠	أنشأ راشد جداول تبيّن أن $\lim_{س \to -١}$ ت(س) = $\lim_{س \to +١}$ ت(س) = $\frac{أ}{ب}$ للدالة ت (س) = $\frac{٧س^{٢}}{١٥}$ + $\frac{س}{١٢}$ حيث أ، ب عددان صحيحان. استخدم هذه المعلومات لتجد أصغر قيم ممكنة لـ أ، ب
١١	أنشأ محمد جداول تبيّن أن $\lim_{س \to -٣}$ ت(س) = $\lim_{س \to +٣}$ ت(س) = $\frac{أ}{ب}$ للدالة ت (س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٧ حيث أ، ب عددان صحيحان. استخدم هذه المعلومات لتجد أصغر قيم ممكنة لـ أ، ب

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	أ $\lim_{س \to -٦} ع(س) = ٢$ ب $\lim_{س \to +٣} ع(س) = -١$ ج $\lim_{س \to +٥} هـ(س) = ١١$ د $\lim_{س \to -٧} هـ(س) = -١٥$ هـ $\lim_{س \to -١} ك(س) = ٠$ و $\lim_{س \to -٤} د(س) = ٧$، $\lim_{س \to +٤} د(س) = ٧$ $\therefore \lim_{س \to ٤} د(س) = ٧$
٢	أ كلّما اقتربت س من ٨ من جهة اليمين، فإن قيمة د(س) تقترب من ١٢ ب كلّما اقتربت س من ٩ من جهة اليسار، فإن قيمة هـ(س) تقترب من ٥ ج كلّما اقتربت س من −٣ من جهة اليسار، فإن قيمة هـ(س) تقترب من −٦ د كلّما اقتربت س من ١ من فإن قيمة د(س) تقترب من ٣
٣	

من جهة اليمين	
س	د(س)
٣,١	١١,٢
٣,٠١	١١,٠٢
٣,٠٠١	١١,٠٠٢
٣,٠٠٠١	١١,٠٠٠٢

من جهة اليسار	
س	د(س)
٢,٩	١٠,٨
٢,٩٩	١٠,٩٨
٢,٩٩٩	١٠,٩٩٨
٢,٩٩٩٩	١٠,٩٩٩٨

٤

من جهة اليمين	
س	د(س)
٥,١	١٥,٥٩
٥,٠١	١٥,٩٥٩٩
٥,٠٠١	١٥,٩٩٥٩٩٩
٥,٠٠٠١	١٥,٩٩٩٥٩٩

من جهة اليسار	
س	د(س)
٤,٩	١٦,٣٩
٤,٩٩	١٦,٠٣٩٩
٤,٩٩٩	١٦,٠٠٣٩٩٩
٤,٩٩٩٩	١٦,٠٠٠٣٩

٥

من جهة اليمين	
س	د(س)
١,١	٢,٨
١,٠١	٢,٩٨
١,٠٠١	٢,٩٩٨
١,٠٠٠١	٢٩٩٩٨

من جهة اليسار	
س	د(س)
٠,٩	٣,٢
٠,٩٩	٣,٠٢
٠,٩٩٩	٣,٠٠٢
٠,٩٩٩٩	٣,٠٠٠٢

٦

من جهة اليمين	
س	د(س)
١,٩-	٢٥,٥٣١
١,٩٩-	٢٤,١٥٩٣
١,٩٩٩-	٢٤,٠١٥٩
١,٩٩٩٩-	٢٤,٠٠١٥٩

من جهة اليسار	
س	د(س)
٢,١-	٢٢,٣٢٩
٢,٠١-	٢٣,٨٣٩٣
٢,٠٠١-	٢٣,٩٨٣٩٩
٢,٠٠٠١-	٢٣,٩٩٨٣٩

٧

من جهة اليمين	
س	د(س)
٠,٩-	١٢,٣
٠,٩٩-	١٢,٩٣
٠,٩٩٩-	١٢,٩٩٣
٠,٩٩٩٩-	١٢,٩٩٩٣

من جهة اليسار	
س	د(س)
١,١-	١٣,٧
١,٠١-	١٣,٠٧
١,٠٠١-	١٣,٠٠٧
١,٠٠٠١-	١٣,٠٠٠٧

٨

من جهة اليسار	
س	د(س)
٥,٩	٣,٠٩٧٥
٥,٩٩	٣,٠٠٩٩
٥,٩٩٩	٣,٠٠٠٩٩
٥,٩٩٩٩	٣,٠٠٠٠٩٩

٩

من جهة اليمين	
س	د(س)
٢,٩-	٣٨,١٥
٢,٩٩-	٤٠,٧١٠٥
٢,٩٩٩-	٤٠,٩٧١
٢,٩٩٩٩-	٤٠,٩٩٧١

١٠ أ = ١١، ب = ٢٠

١١ أ = ٢٣، ب = ٢

ب- نهاية الدالة النسبية

١	إذا علمت أن د (س) = $\frac{٢س - ٤}{س - ٣}$ ، فأوجد معادلتي خطي التقارب الرأسي والأفقي
٢	إذا علمت أن د (س) = $\frac{٦ - س}{س - ٢}$ ، فأوجد معادلتي خطي التقارب الرأسي والأفقي
٣	إذا علمت أن د (س) = $\frac{١ - ٦س}{٢س - ١٠}$ ، فأوجد معادلتي خطي التقارب الرأسي والأفقي
٤	إذا علمت أن د (س) = $\frac{٣}{س + ٢}$ ، فأوجد معادلتي خطي التقارب الرأسي والأفقي
٥	إذا علمت أن د (س) = $\frac{٥}{س^{٢} - ٩}$ ، فأوجد معادلتي خطي التقارب الرأسي والأفقي
٦	إذا علمت أن د (س) = $\frac{س^{٢} - ٢}{س}$ ، فأوجد معادلتي خطي التقارب الرأسي والأفقي
٧	اكتب معادلة خط التقارب الرأسي لمنحنى الدالة ص = $\frac{٣}{س} + ١١$
٨	إذا علمت أن معادلة خط التقارب الرأسي للمنحنى د (س) = $\frac{٥}{م س + ١٢}$ هي س = ٣ أوجد قيمة م
٩	إذا علمت أن معادلة خط التقارب الرأسي للمنحنى د (س) = $\frac{٣}{م س - ٢٠}$ هي س = -٢ أوجد قيمة م
١٠	إذا علمت أن معادلة خط التقارب الرأسي للمنحنى د (س) = $\frac{ب س - ١}{ل س - ٨}$ هي س = ٢ ، المنحنى د(س) يمر بالنقطة (٣ ، ٥) أوجد قيمتي ب ، ل

١١	منحنى كل دالة من الدوال النسبية الآتية مستقيم يتضمن فجوة. إذا علمت أن د (س) = $\frac{٢س - ١٠}{س - ٥}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.
١٢	منحنى كل دالة من الدوال النسبية الآتية مستقيم يتضمن فجوة. إذا علمت أن د (س) = $\frac{\frac{س}{٢} - ٤}{س - ٨}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.
١٣	إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٨س + ٢س^{٢}}{٤ + س}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.
١٤	إذا علمت أن ك(س) = $\frac{س^{٢} + ٣س - ١٨}{س - ٣}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة ك(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.
١٥	إذا علمت أن ل(س) = $\frac{٦س^{٢} - ٢س - ٢٨}{س + ٢}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة ل(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.

١٦	منحنى كل دالة من الدوال النسبية الآتية مستقيم يتضمن فجوة. إذا علمت أن د (س) = $\frac{س - س^{٢}}{س - ١}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.
١٧	منحنى كل دالة من الدوال النسبية الآتية مستقيم يتضمن فجوة. إذا علمت أن د (س) = $\frac{١٨ - ٢ س^{٢}}{س + ٣}$، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.
١٨	إذا علمت أن منحنى الدالة د(س) = $\frac{س(س^{٢} + س - ٤٢)}{س^{٢} - ٦س}$ هو مستقيم يتضمن فجوتَين، فأوجد إحداثيات النقطتَين حيث توجد الفجوتان.
١٩	إذا علمت أن منحنى الدالة د(س) = $\frac{س(س^{٢} - س - ٦)}{س^{٢} + ٢س}$ هو مستقيم يتضمن فجوتَين، فأوجد إحداثيات النقطتَين حيث توجد الفجوتان.
٢٠	إذا علمت أن منحنى الدالة د(س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ هو مستقيم ميله ١، ومقطعه من المحور الصادي ٥، ويتضمن فجوة عند النقطة (أ، ب). فأوجد قيمتَي أ ، ب.
٢١	لتكن الدالة د(س) = $\frac{٢١ + ٤س - س^{٢}}{س + ٣}$: أ بيّن أن الدالة د(س) غير معرّفة عند س = − ٣، اشرح إجابتك. ب استخدم الجداول لإيجاد نهاية د(س) عندما تقترب س من − ٣ من جهة: ١) اليسار. ٢) اليمين. ج بيّن سبب وجود نهاية للدالة د(س) عند س = − ٣

٢٢

لتكن الدالة هـ(س) = $\frac{٧س - ٤س^{٣}}{س}$:

أنشأت خديجة الجدولَين الآتيَين لمعرفة نهاية الدالة هـ(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، ومن جهة اليسار:

من جهة اليمين	
س	هـ(س)
٠,٥	أ
٠,١	٦,٩٦
٠,٠١	٦,٩٩٩٦
٠,٠٠١	ب

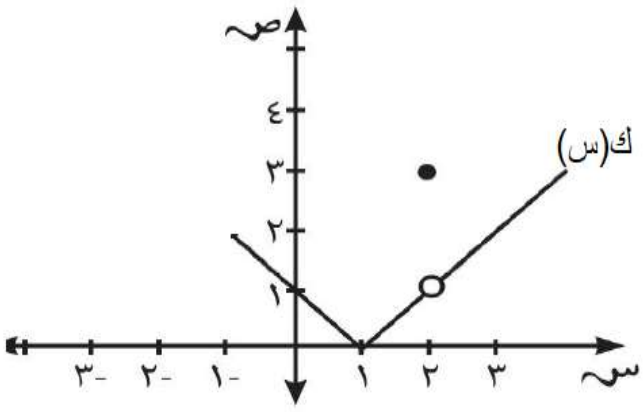
من جهة اليسار	
س	هـ(س)
-٠,٥	جـ
-٠,١	٦,٩٦
-٠,٠١	٦,٩٩٩٦
-٠,٠٠١	د

أ احسب قيم كل من أ، ب، جـ، د.

ب استخدم النتائج من الجدولَين لتقدّر قيمة نهـــــا هـ(س).
س ← ٠

٢٣

باستخدام التمثيل البياني المقابل:

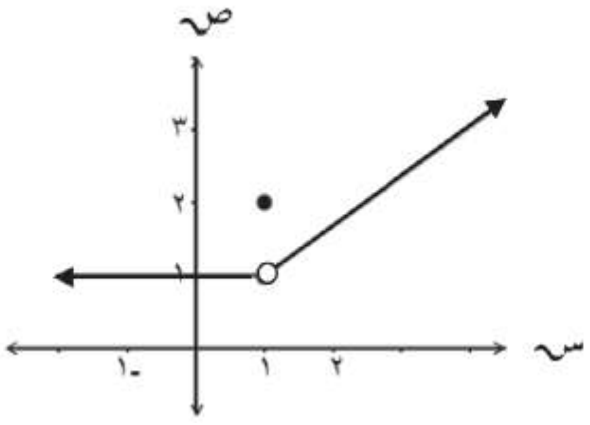


أ أوجد ك(٢).

ب قدّر قيمة نهـــــا ك(س).
س ← ٢

٢٤

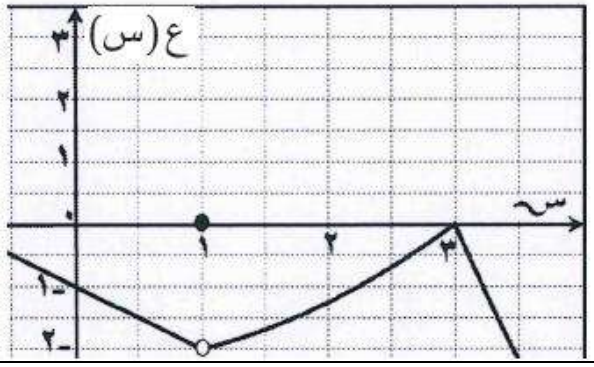
باستخدام التمثيل البياني المقابل:



أ أوجد ل(١)

ب قدّر قيمة نهـــــا ل(س)
س ← ١

٢٥

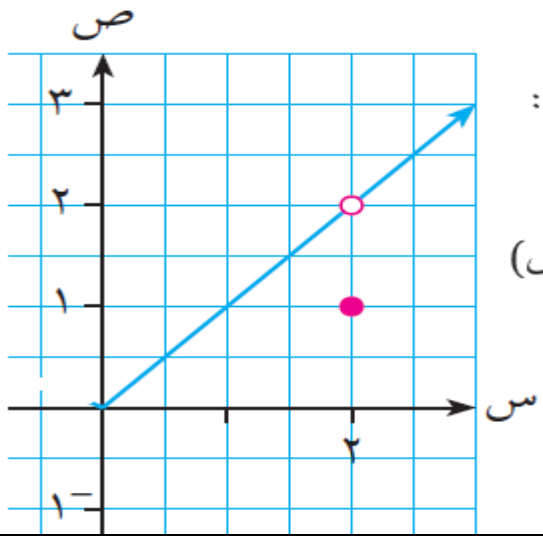


باستخدام التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد ع (١).

ب قدّر قيمة نهـــــا ع(س).
س ← ١

٢٦

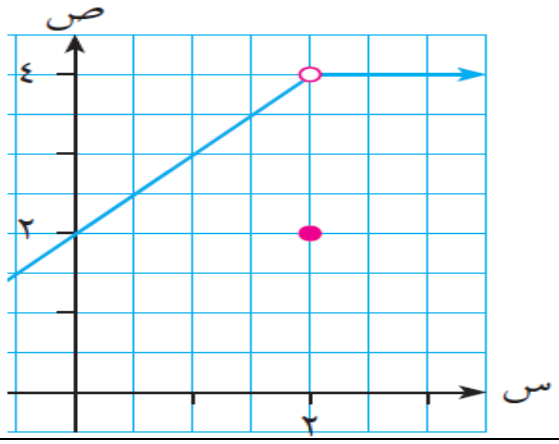


باستخدام التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد هـ (٢)

ب قدّر قيمة نهـــــا هـ (س)
س ← ٢

٢٧

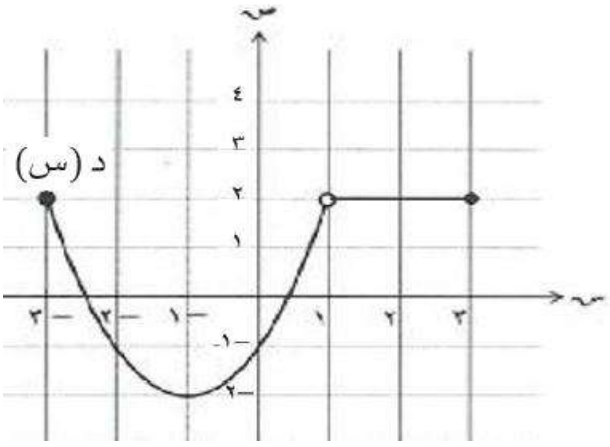


باستخدام التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد ع (٢).

ب قدّر قيمة نهـــــا ع (س).
س ← ٢

٢٨

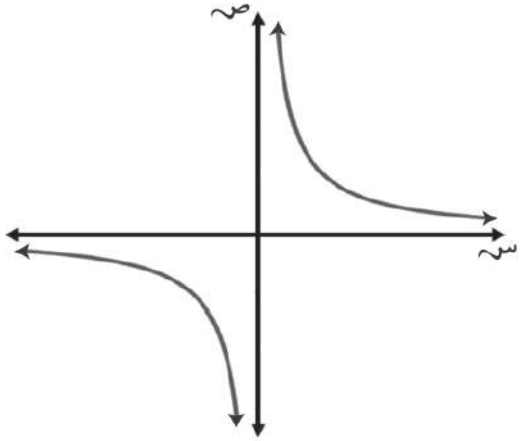


باستخدام التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد د (١)

ب قدّر قيمة نهـــــا د (س)
س ← ١

٢٩

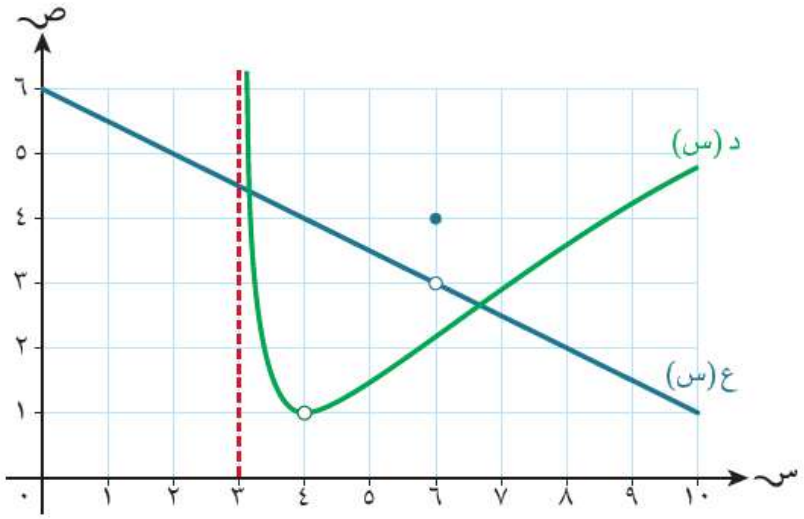


من الشكل المقابل $\lim_{س \to 0^+}$ د(س) تساوي:

- ☐ ∞
- ☐ صفر
- ☐ −∞
- ☐ غير موجودة.

٣٠

يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالتين د (س)، ع (س) على الفترة ٠ ≤ س ≤ ١٠:



أ استخدم التمثيلَين البيانيَين حيث أمكن لتقدّر قيمة:

١) ع (٦)

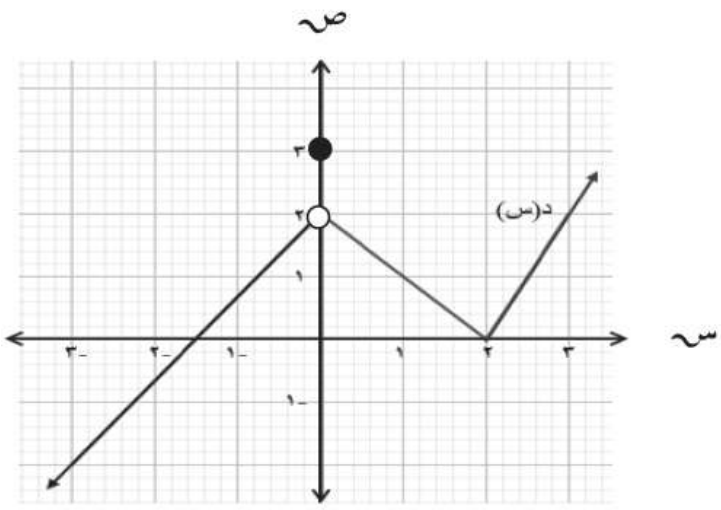
٢) $\lim_{س \to 6}$ ع (س)

٣) د (٤)

٤) $\lim_{س \to 4}$ د (س)

٣١

باستخدام التمثيل البياني المقابل:



أ أوجد د (٣).

ب قدّر قيمة $\lim_{س \to 3}$ د (س)

ج أوجد د (٢).

د قدّر قيمة $\lim_{س \to 2}$ د (س)

هـ أوجد د (٠).

و قدّر قيمة $\lim_{س \to 0}$ د (س)

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	معادلة خط التقارب الرأسي س = ٣ معادلة خط التقارب الأفقي ص = ٢
٢	معادلة خط التقارب الرأسي س = ٢ معادلة خط التقارب الأفقي ص = -١
٣	معادلة خط التقارب الرأسي س = ٥ معادلة خط التقارب الأفقي ص = ٣
٤	معادلة خط التقارب الرأسي س = -٢ معادلة خط التقارب الأفقي ص = ٠
٥	معادلة خط التقارب الرأسي س = -٣ ، س = ٣ معادلة خط التقارب الأفقي ص = ٠
٦	معادلة خط التقارب الرأسي س = ٠ معادلة خط التقارب الأفقي لا يوجد
٧	معادلة خط التقارب الرأسي س = ٠
٨	-٤
٩	-١٠
١٠	ل = ٤ ، ب = ٧
١١	١) س = ٥ ٢) (٥، ٢)
١٢	١) س = ٨ ٢) $(٨ ، \frac{١}{٢})$
١٣	١) س = -٤ ٢) (-٤، -٨)
١٤	١) س = ٣ ٢) (٣، ٩)
١٥	١) س = -٢ ٢) (-٢، -٢٦)
١٦	١) س = ١ ٢) (١ ، -١)

١٧	١) س = -٣ ٢) (-٣، ١٢)
١٨	(٠، ٧)، (٦، ١٣)
١٩	(٠، -٣)، (-٢، -٥)
٢٠	أ = ٥، ب = ١٠

٢١

أ لأن المقام يساوي صفرًا عند س = -٣، والقسمة على الصفر تجعل الدالة غير معرّفة.

ب ١)

من جهة اليسار	
س	د (س)
-٣,١	١٠,١
-٣,٠١	١٠,٠١
-٣,٠٠١	١٠,٠٠١
-٣,٠٠٠١	١٠,٠٠٠١

$$\text{نهـــــا}_{س \to -٣^-} \ هـ(س) = ١٠$$

٢)

من جهة اليمين	
س	د (س)
-٢,٩	٩,٩
-٢,٩٩	٩,٩٩
-٢,٩٩٩	٩,٩٩٩
-٢,٩٩٩٩	٩,٩٩٩٩

$$\text{نهـــــا}_{س \to -٣^+} \ هـ(س) = ١٠$$

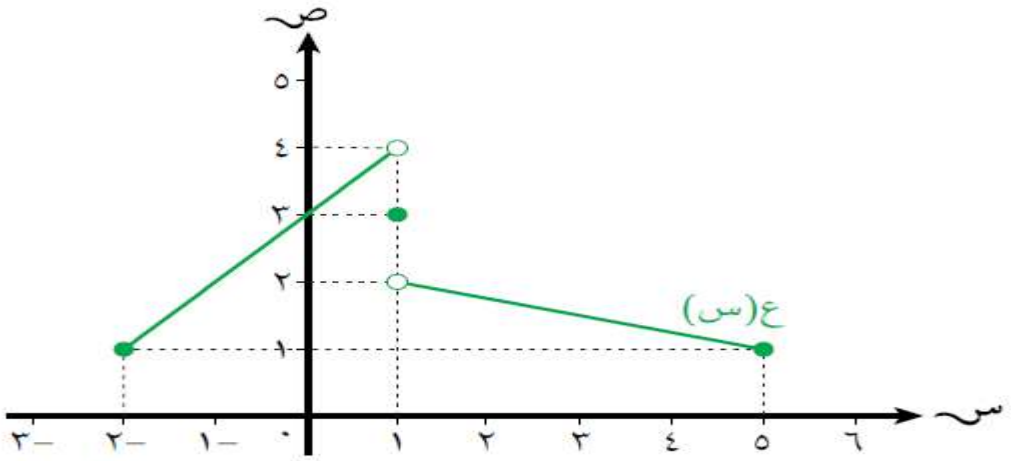
ج لأن $\text{نهـــــا}_{س \to -٣^-} \ هـ(س) = \text{نهـــــا}_{س \to -٣^+} \ هـ(س) = ١٠$

٢٢	أ أ = جـ = ٦، ب = د = ٦,٩٩٩٩٩٦ ب ٧
٢٣	أ ٣ ب ١
٢٤	أ ٢ ب ١
٢٥	أ ٠ ب -٢
٢٦	أ ١ ب ٢
٢٧	أ ٢ ب ٤
٢٨	أ غير معرفة ب ٢
٢٩	∞
٣٠	١) ع (٦) = ٤ ٢) $\lim_{س \to ٦^-}$ ع(س) = $\lim_{س \to ٦^+}$ ع(س) = ٣، فتكون $\lim_{س \to ٦}$ ع(س) = ٣ ٣) غير معرّفة ٤) $\lim_{س \to ٤^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٤^+}$ د (س) = ١، فتكون $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ١
٣١	أ ٢ ب ٢ ج ٠ د ٠ هـ ٣ و ٢

ج- نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

١

يبيّن الرسم أدناه منحنى الدالة ع(س) المعرّفة بأكثر من قاعدة:



أ استخدم المنحنى لتجد كلًّا ممّا يأتي:

١) ع(١)

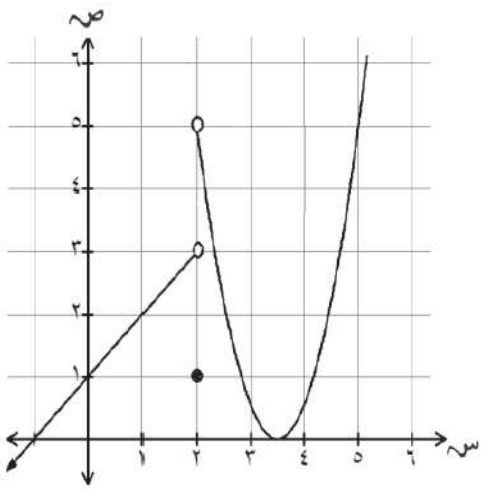
٢) $\lim_{س \to 1^-}$ ع(س)

٣) $\lim_{س \to 1^+}$ ع(س)

ب ما الخلاصة التي يمكن أن تستنتجها من الجزئية (أ) ذات صلة بـ $\lim_{س \to 1}$ ع(س) ؟

٢

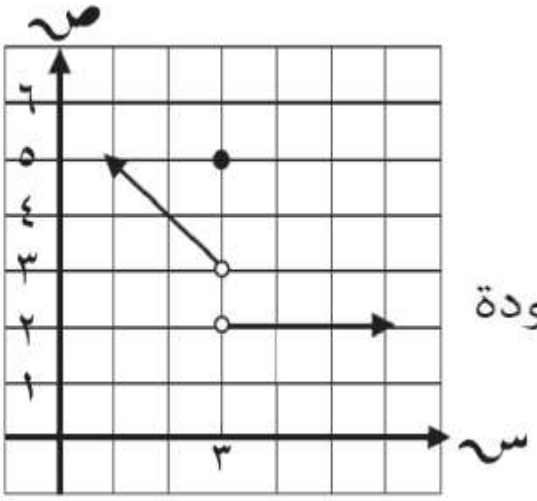
إذا كان الشكل المجاور يمثّل بيان الدالة د(س)، فإن



$\lim_{س \to 2^-}$ د(س) تساوي:

- ☐ ١
- ☐ ٣
- ☐ ٥
- ☐ غير موجودة

٣

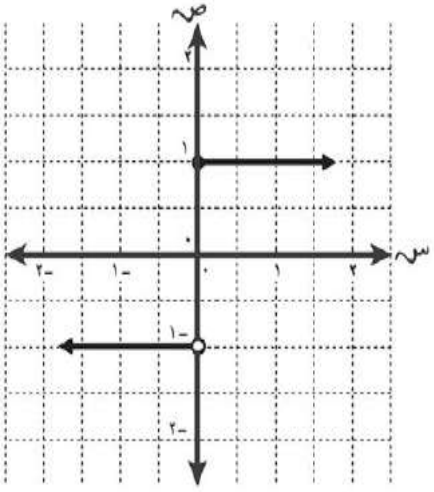


نهـــــا د (س) =
س ← ٣+

☐ ٥ ☐ ٢

☐ ٣ ☐ غير موجودة

٤



نهـــا د(س) من الشكل المجاور تساوي:
س ← ٠

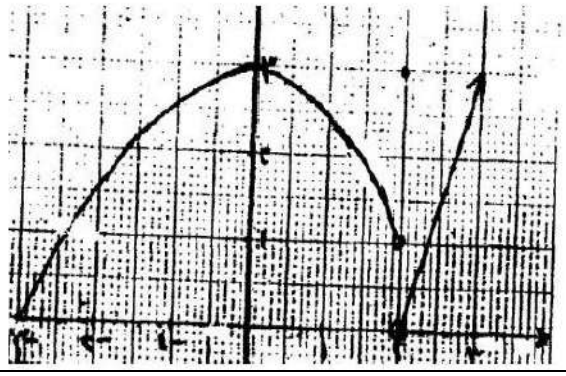
☐ ١

☐ صفر

☐ ١-

☐ غير موجودة

٥



إذا كان الشكل المجاور يمثل الدالة د المعرفة على] -∞ ، ∞[، فان

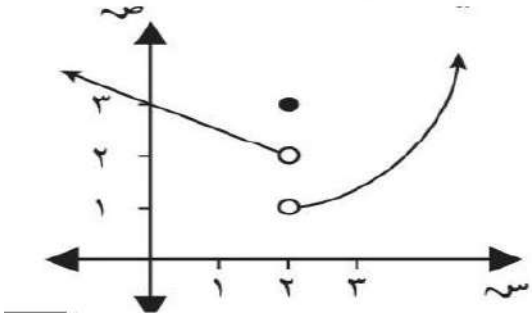
نهـــا د (س) تساوي
س ← ٢+

أ) صفر ب) ١

جـ) ٢ د) غير موجودة

٦

إذا كان الشكل المجاور يمثّل بيان الدالة د(س)، فإن نهـــا د(س) تساوي:
س ← ٢

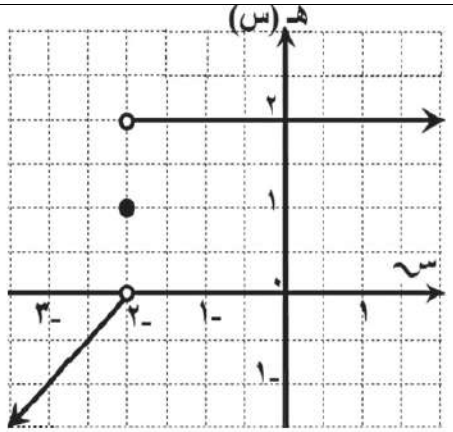


☐ ١ ☐ ٢

☐ ٣ ☐ غير موجودة

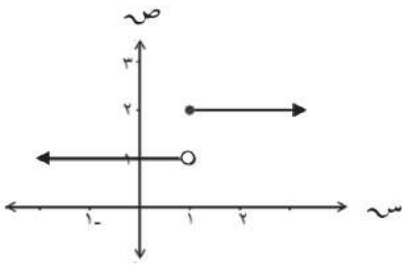
٧ في الشكل المقابل الذي يمثل بيان الدالة هـ(س)،

نهـــا هـ(س) تساوي:
س ← -٢

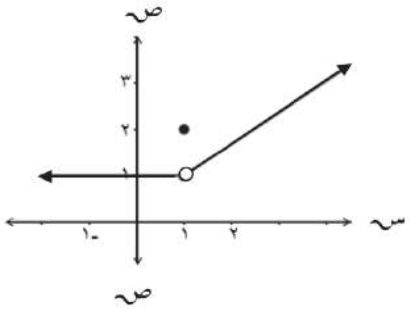


- ☐ صفر
- ☐ ١
- ☐ ٢
- ☐ غير موجودة

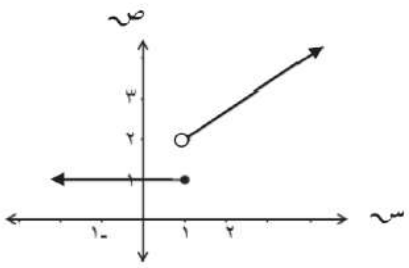
٨ إذا علمت أنّ نهـــا د(س) = ١ ، فإنّ الشكل الذي يمثل بيان الدالة د(س) هو:
س ← ١



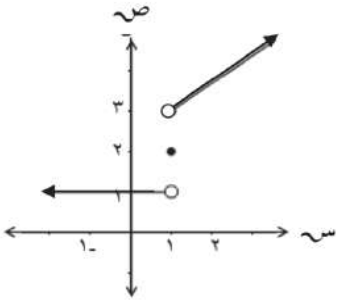
☐



☐



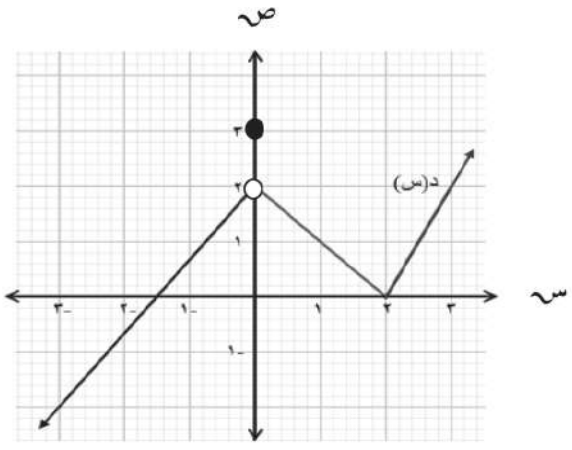
☐



☐

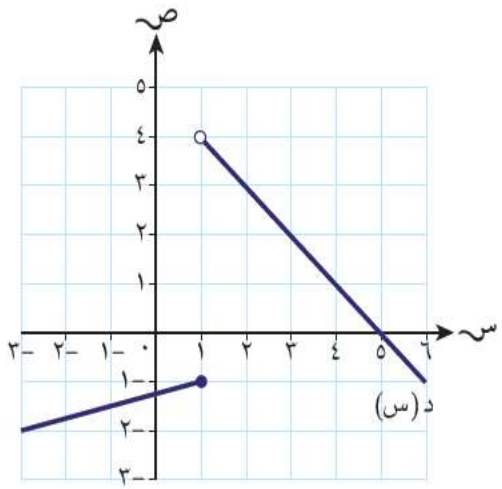
٩ إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س)

فإن نهـــا د(س) تساوي:
س ← ٠



- ☐ نهـــا د(س) — س ← ٣
- ☐ نهـــا د(س) — س ← ٢
- ☐ نهـــا د(س) — س ← -٣
- ☐ نهـــا د(س) — س ← -٢

١٠ يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة في المجال $-٣ \leqslant س \leqslant ٦$:



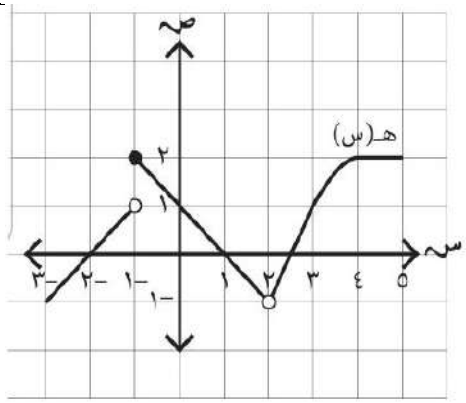
أ حدد مدى الدالة د (س) في المجال المعطى.

ب بيّن أن:

١) $\lim_{س \to ٥}$ د (س) موجودة.

٢) $\lim_{س \to ١}$ د (س) غير موجودة.

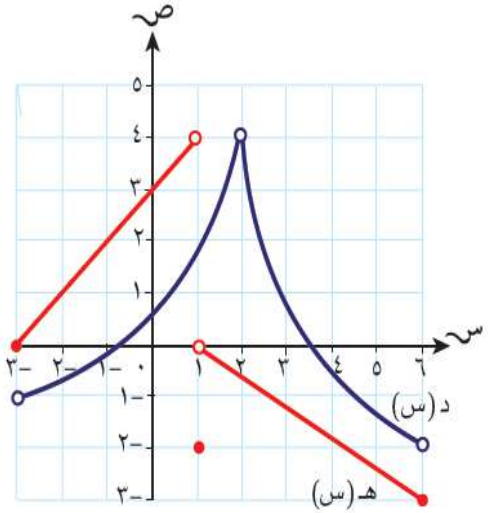
١١ **إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة هـ(س) المعرفة على الفترة [−٣، ٥]، فإن مجموعة قيم ل بحيث تكون** $\lim_{س \to ل}$ **هـ(س) = ١ تساوي :**



☐ {−١، ٠} ☐ {−١، ٣}

☐ {٠، ٣} ☐ {−١، ٠، ٣}

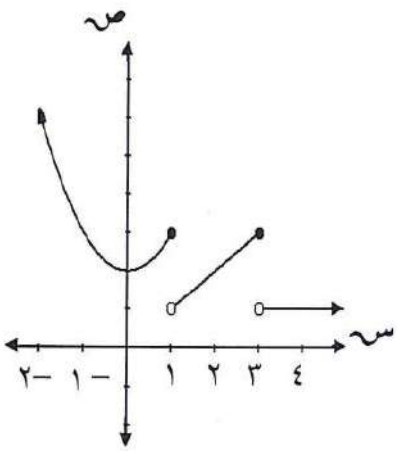
١٢ يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د (س)، هـ (س):
الدالة هـ(س) معرّفة في المجال $-٣ \leqslant س \leqslant ٦$



أ أوجِد مجال الدالة د (س).

ب هل $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) موجودة؟ وضح إجابتك.

١٣ **الشكل المجاور يمثل الدالة ص = د(س).**
إذا كان أ ∈ {١، ٢، ٣}، فإن $\lim_{س \to أ}$ **د(س) موجودة عندما أ تساوي:**

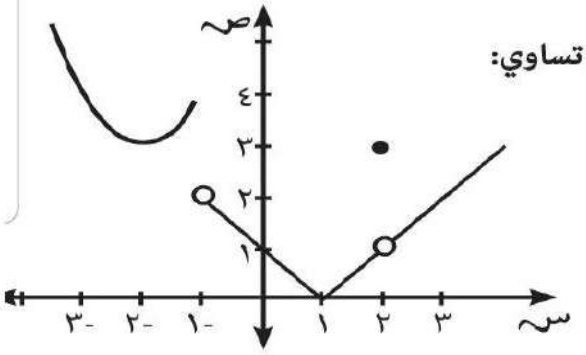


☐ ٢ ☐ ٣

☐ ١، ٢ ☐ ١، ٣

١٤ الشكل المجاور يمثل الدالة ص = د (س) ، إذا كان أ ∈ {-١، ١،٢}

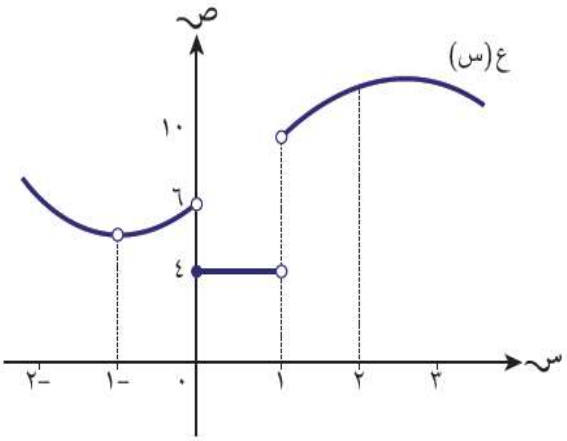
فإن $\lim_{س \to أ}$ د (س) غير موجودة عندما أ تساوي:



- ○ -١
- ○ ١ ، ٢
- ○ -١ ، ٢
- ○ ١

١٥ يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ع (س):

تمّ رسم مستقيمات رأسية لمنحنى الدالة من المحور السيني عند س = -١، س = ٠، س = ١، س = ٢

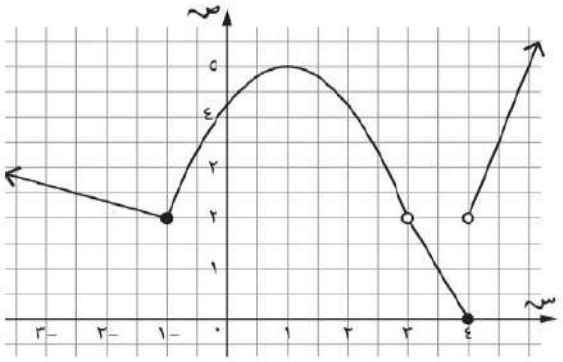


أ عند أي من القيم الأربع لـ س تكون نهاية الدالة ع(س) موجودة؟

ب لكل قيمة من قيم س غير الموجودة في إجابة الجزئية (أ)، أعطِ سبب عدم وجود نهاية الدالة ع(س) عندها.

١٦ إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان الدالة د(س)،

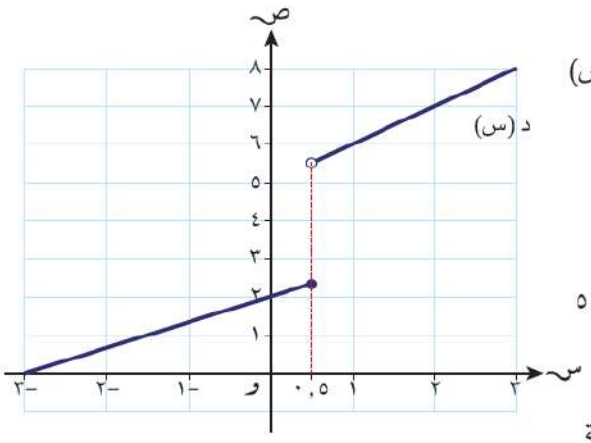
نهـــا د(س) = ٢ ، فإن قيم ب هي :
س→ب



- ○ {-١ ، ٣ ، ٤}
- ○ {٣ ، ٤}
- ○ {-١ ، ٤}
- ○ {-١ ، ٣}

١٧

يبيّن الشكل المقابل أجزاءً من منحنى الدالة د(س):



يمر الجزء الأول (العلوي) من بيان الدالة ص = د (س) بالنقطتَين (١، ٦)، (٣، ٨).

يمر الجزء الثاني (السفلي) من منحنى الدالة ص = د(س) بالنقطتَين (-٣، ٠)، (٠، ٢).

أ ١) بيّن أن معادلة الجزء الأول هي ص = س + ٥

٢) أوجِد $\lim_{س \to ٠,٥^+}$ د (س).

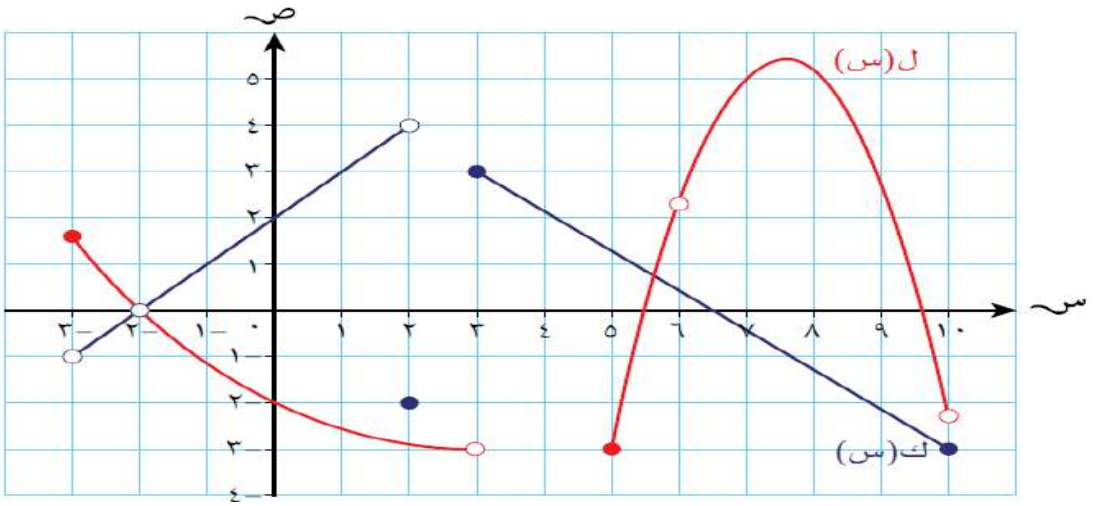
ب ١) أوجِد معادلة الجزء الثاني من منحنى الدالة في صورة ص = م س +جـ.

٢) أوجِد $\lim_{س \to ٠,٥^-}$ د (س).

ج ما دلالة إجابتَيك في الجزئيّتَين أ (٢)، ب (٢)؟

١٨

يبيّن الرسم أدناه منحنى كل من الدالتَين ل(س)، ك(س):



أ أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

١) ك(٢)

٢) $\lim_{س \to ٢^-}$ ك(س)

٣) $\lim_{س \to ٣^-}$ ل(س)

ب انسخ العبارات الآتية، واستخدم المتباينات لإكمال كلّ منها:

١) ل(س) غير معرّفة على الفترة ٣ ... س ... ٥

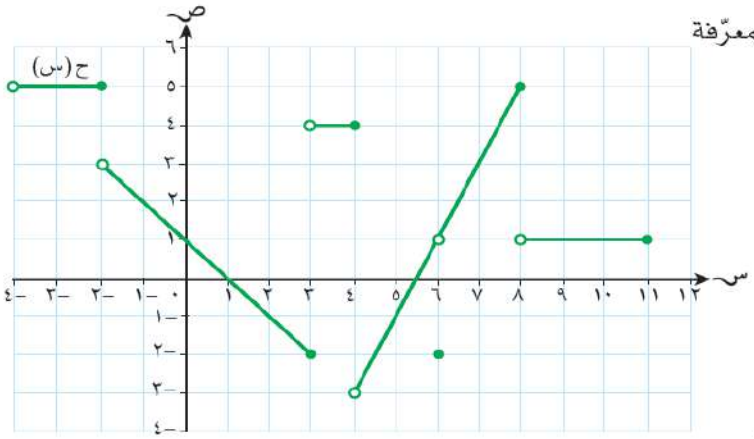
٢) ك(س) غير معرّفة على الفترة ٢ ... س ... ٣

ج أوجد كل قيم س الصحيحة في المجال -٢ < س < ١٠، حيث يكون كل مما يأتي غير موجود:

١) نهاية ل(س).

٢) نهاية ك(س).

١٩



يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ح(س) في المجال $-٤ < س \geq ١١$

أ أوجد مدى الدالة في المجال المعطى.

ب استخدم المنحنى لإيجاد قيمة ح(−٢)، ح(٣).

ج إذا كانت $-٤ < ك < ١١$،

نهـــــا ح(س) غير موجودة.
س ← ك

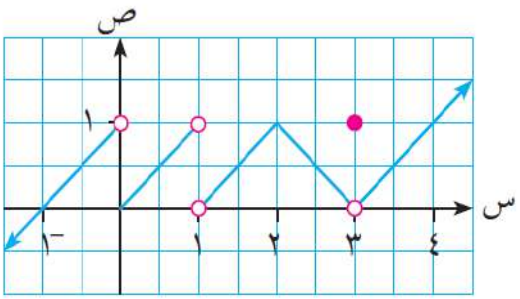
فأوجد قائمة بجميع قيم ك الممكنة.

د أوجد قيمة ل، حيث ح(ل)، نهـــــا ح(س)
س ← ل

كلاهما موجودتان، ولكن غير متساويتَين.

٢٠

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س).



اعتمد على الرسم في إيجاد كل من :

أ $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س)

ب $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س)

جـ $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

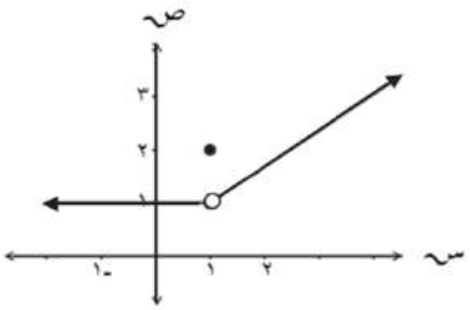
د $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

هـ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

و قيم أ التي تكون عندها $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة

ز قيم أ التي تكون عندها $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = ١

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	أ ١) ٣ ٢) ٤ ٣) ٢ ب نهـــــا ع(س) غير موجودة. س ← ١
٢	٣
٣	٢
٤	-١
٥	صفر
٦	غير موجودة
٧	غير موجودة
٨	
٩	نهـــا د(س) س ← ٣

١٠	أ $-٢ \geq$ د(س) < ٤ ب ١) د(س) معرّفة عند س = ٥ $\text{نهـــا}_{س \to ٥^+}$ د (س) = $\text{نهـــا}_{س \to ٥^-}$ د (س) = ٠ النهايتان من جهة اليمين، ومن جهة اليسار متساويتان. ∴ $\text{نهـــا}_{س \to ٥}$ د (س) موجودة. ٢) $\text{نهـــا}_{س \to ١^+}$ د (س) = ٤ $\text{نهـــا}_{س \to ١^-}$ د (س) = -١ النهايتان من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساويتَين. ∴ $\text{نهـــا}_{س \to ١}$ د (س) غير موجودة.
١١	{٠، ٣}
١٢	أ $-٣ < س < ٢$، $٢ < س < ٦$ أو $-٣ < س < ٦$، س $\neq ٢$ ب كلا؛ لأن: $\text{نهـــا}_{س \to ١^+}$ هـ(س) = ٠ $\text{نهـــا}_{س \to ١^-}$ هـ(س) = ٤ النهايتان من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساويتين. ∴ $\text{نهـــا}_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة.
١٣	٢
١٤	-١
١٥	أ س = -١، س = ٢ ب $\text{نهـــا}_{س \to ٠^+}$ ع(س) = ٤ $\text{نهـــا}_{س \to ٠^-}$ ع(س) = ٦ ∴ $\text{نهـــا}_{س \to ٠}$ ع(س) غير موجودة. $\text{نهـــا}_{س \to ١^+}$ ع(س) = ١٠ $\text{نهـــا}_{س \to ١^-}$ ع(س) = ٤ ∴ $\text{نهـــا}_{س \to ١}$ ع(س) غير موجودة

١٦	$\{-١ ، ٣\}$
١٧	أ ١) عبر ص − ٦ = ١(س − ١) ٢) أنشئ جدول قيم كالآتي (من جهة اليمين):

س	د (س) = س + ٥
٠,٥١	٥,٥١
٠,٥٠١	٥,٥٠١
٠,٥٠٠١	٥,٥٠٠١
٠,٥٠٠٠١	٥,٥٠٠٠١

$$\text{نهـــــا}_{\text{س} \to ٠,٥^{+}} \text{د(س)} = ٥,٥ = \frac{١١}{٢}$$

ب ١) ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٢

٢) أنشئ جدول قيم كالآتي (من جهة اليسار):

س	د (س) = $\frac{٢}{٣}$ س + ٢
٠,٤٨	٢,٣٢
٠,٤٩٨	٢,٣٣٢
٠,٤٩٩٨	٢,٣٣٣٢
٠,٤٩٩٩٨	٢,٣٣٣٣٢

$$\text{نهـــــا}_{\text{س} \to ٠,٥^{-}} \text{د(س)} = \frac{٧}{٣}$$

ج ∵ النهايتان من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساويتَين.

∴ $\text{نهـــــا}_{\text{س} \to ٠,٥}$ د(س) غير موجودة.

١٨	أ ١) -٢ ٢) ٤ ٣) -٣ ٤) -٣ ب ١) ل(س) غير معرّفة على الفترة ٣ ≤ س < ٥ ٢) ك(س) غير معرّفة على الفترة ٢ < س < ٣ ج ١) ٣، ٤، ٥ ٢) ٢، ٣
١٩	أ -٣ < ح(س) ≤ ٥ ب ح (-٢) = ٥ ، ح (٣) = -٢ ج ك ∋ (-٢، ٣، ٤، ٨) د ل = ٦
٢٠	أ صفر ب ١ ج غير موجودة د صفر هـ ١ و ٠ ، ١ ز ٠ ، ١ ، ٢ ، ٤

الدرس الثاني:نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية

١	أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٥} + ٣س + ١}{٢س^{٥} + ٩}$
٢	أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٣} + ١}{١ - ٢س^{٣}}$
٣	$\lim_{س \to -\infty} \frac{٥}{٦س + ٧} =$ أ) صفر ب) $\frac{٥}{٧}$ جـ) $\frac{٥}{٦}$ د) ٥
٤	أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٣}}{٢س^{٢} - ٥س}$
٥	أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$
٦	أوجد $\lim_{س \to -\infty} \frac{س + س^{٢}}{٢س + ٣}$
٧	أوجد $\lim_{س \to -\infty} \frac{٦ - س^{٢}}{٢س^{٢} + ٧}$
٨	أوجد $\lim_{س \to -\infty} \frac{٥س^{٢} + ١}{س^{٣} - ١}$
٩	أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س - ٣)(٤س^{٢} + ٥)}{٦س^{٣} - ١}$
١٠	$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س(٣س^{٢} + ٧)}{٢س^{٣} - ٥س} \right)^{٢} =$ ☐ ∞ ☐ $\frac{٩}{٤}$ ☐ $\frac{٣}{٢}$ ☐ صفر

١١ أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س + ١)^{٣}(٦ س^{٢} + ٥)}{٧ - ١٢ س^{٥}}$ =

أ) -١ ب) ٤

ج) -٤ د) ٠

١٢ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س - ١}{٢س - ١} \right)^{-٢}$ يساوي :

أ) -٤ ب) $\frac{-١}{٤}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) ٤

١٣ $\lim_{س \to \infty} (س + ١) \left(\frac{٥}{س} + \frac{٧}{س^{٢}} + \frac{٤}{س^{٣}} \right)$ =

١ ٤

٥ ٧

١٤ لتكن د(س) = $\frac{٥}{س - ١} - \frac{٣س}{س + ١}$:

أ اكتب العبارة $\frac{٥}{س - ١} - \frac{٣س}{س + ١}$ في صورة كسر.

ب أوجِد نهاية الدالة د(س) عندما (س ← -∞).

١٥ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٤}}{٣ - س^{٢}} - \frac{س^{٥}}{١ - س^{٣}} \right)$

١٦ إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{١٠٠ س^{٢} - ٧س}{٥ + (أس - ٣)^{٢}}$ = ٢٥، فأوجِد قيم أ.

١٧ إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{ت س^{٥} - ٧س^{٣}}{\frac{س^{٥}}{٣} - ١٣}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، فأوجِد قيمة ت

١٨ إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٥} - ٧س^{٣}}{\frac{ك س^{٥}}{٣} - ١٣}$ = ٦، فأوجِد قيمة ك

١٩ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{م\ س^{٢}(س+١)^{٤}}{(٣-٢س^{٣})^{٢}} = \frac{٣}{٢}$ ، فإن قيمة م تساوي:

○ ٦ ○ ٣

○ −٣ ○ −٦

٢٠ إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{٦ + ٢س - (ب\ س - ٣)^{٢}}{٩ - ٢س^{٢}} = ١٨$، فأوجد القيم الممكنة لـ ب.

٢١ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢\ م\ س^{٢} - ٣)^{٢}}{(٤\ س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{١}{٤}$ ، فما قيمة م ؟

○ ٤ ○ ٣

○ ٢ ○ ١

٢٢ إذا كانت $\lim_{س \to -\infty} \frac{(٢س^{٢} + ٧)(س^{ن} + ٥)}{٣س^{٦} + ٨} = \frac{٢}{٣}$ ، فإن قيمة ن تساوي :

○ ٦ ○ ٤

○ ٣ ○ ٢

٢٣ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{(س^{٢} + ١)(س^{ن} - ١)}{(س^{٥} + ٢)} =$ صفر فإن قيمة ن من الممكن أن تساوي :

أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٣ د) ٢

٢٤ إذا كانت $\lim_{س \to -\infty} \frac{١ - س^{٣}}{س^{م+٢}(٣ + (ن+١)س^{٥})^{٢}} = \frac{-١}{٤}$ فإن م + ن =

○ $\frac{١}{٢}$ ○ ١

○ $\frac{٥}{٢}$ ○ ٣

٢٥ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{(١ + ٢ك)^{٢}}{ك^{٣}(ك+١)^{ن}} = -٢$ ، فإن قيمة (م، ن) هي :

أ) (٤، ٢) ب) (−٤، ٢) جـ) (−٢، ٢) د) (٢، ٢)

٢٦ إذا كان $\lim_{س \to \infty} \frac{(٣ + ٤س^{٢})^{٥}}{م س(٧ + س^{٢})^{ن}} = -٤$ ، حيث ن ∈ ص$^{+}$ ، م ∈ ح فأوجد قيمة كلاً من م، ن .

٢٧ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٤}(٢س + ١)^{٥}}{ب(٤ - ٢س^{ن})^{٣}} = ١$ ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ب ∈ ح ، فأوجد قيمة كلاً من : ن ، ب.

٢٨ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{(أ + ٤)س - (أ + ٢)س^{٣}}{(أ - ٢)س + ٥} = ب$ ، حيث أ، ب $\in$ ح ، فإن قيمة ب تساوي:

- ☐ $\frac{٣}{٢}$
- ☐ $\frac{١}{٢}$
- ☐ $-\frac{١}{٢}$
- ☐ $-\frac{٣}{٢}$

٢٩ اذا كان $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢} + ٥س}{ح + ٤} + أس + ب \right) =$ صفر

اوجد أ ، ب .

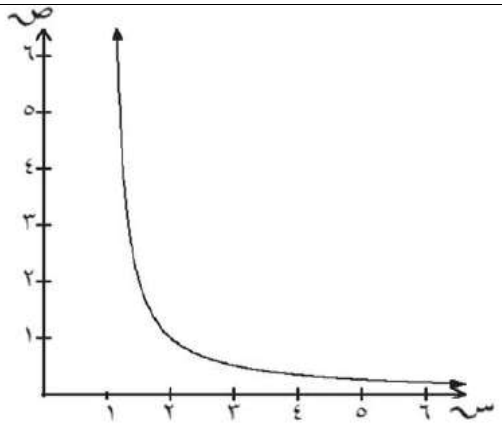
٣٠ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \left(٢أس - ب + \frac{٤س^{٢} + ٢}{س - ١} \right) = ٣$ ، فأوجد قيمة كلًا من أ، ب

٣١ إذا كان $ق(س) = \frac{أس}{ب س + ١}$

وكانت $\lim_{س \to \infty} ق(س) = \frac{٢}{٣}$ ، $\lim_{س \to ١} ق(س) = \frac{٤}{٧}$

أوجد الثابتين أ ، ب .

٣٢ الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س)، فإن $\lim_{س \to \infty}$ د(س) تساوي:



- ☐ صفر
- ☐ ١
- ☐ ٦
- ☐ ∞

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	٢
٢	٢-
٣	٠
٤	غير موجودة
٥	٠
٦	غير موجودة
٧	$\frac{-١}{٢}$
٨	٠
٩	$\frac{٤}{٣}$
١٠	$\frac{٩}{٤}$
١١	٤-
١٢	٤
١٣	٥
١٤	أ $\frac{٥ + ٨س - ٣س^{٢}}{س^{٢} - ١}$ ب -٣
١٥	٣-
١٦	أ = ٢ أو أ = -٢
١٧	ت = $-\frac{١}{٤}$
١٨	ك = $-\frac{٣}{٢}$
١٩	٦
٢٠	ب = ٦ أو ب = -٦
٢١	١

٢٢	٤
٢٣	٢
٢٤	$\frac{١}{٢}$
٢٥	(-٢، ٢)
٢٦	أ= -٢٥٦ ، ن =٣
٢٧	ن= ٣ ، ب = -٨
٢٨	$-\frac{١}{٢}$
٢٩	أ= -١ ، ب = -١
٣٠	أ= -٢ ، ب = ١
٣١	أ = ٤ ، ب = ٦
٣٢	صفر

الدرس الثالث:خواص النهايات

١

إذا علمت أن $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ١٠$، $\lim_{س \to ٠} ك(س) = ٨$، فاستخدم خواص النهايات لتجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) + ك(س))$

ب $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) \times ك(س))$

ج $\lim_{س \to ٠} (هـ(س))^{٣}$

د $\lim_{س \to ٠} \sqrt[٣]{\frac{١}{٤} ك(س) \times هـ(س)}$

٢

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ٢ د(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٨$ ، فإن $\lim_{س \to ٣} \sqrt{\frac{(د(س))^{٤}}{ق(س)}}$ تساوي:

أ) ١ ب) $٤\sqrt{٢}$ ج) ٢ د) $\sqrt{٢}$

٣

استخدم خواص النهايات لتقدّر كلًّا ممّا يأتي علمًا بأن $\lim_{س \to -١} د(س) = -٢$، $\lim_{س \to -١} هـ(س) = ٦$:

أ $\lim_{س \to -١} \frac{هـ(س)}{د(س)}$

ب $\lim_{س \to -١} (هـ(س) - د(س))$

ج $\lim_{س \to -١} (٢٤ هـ(س))^{\frac{١}{٢}}$

د $\lim_{س \to -١} \left(\frac{١}{٢} هـ(س) \times د(س)\right)^{٣}$

٤

إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٩$ ، فاستخدم خواص النهايات لتجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\lim_{س \to ١} (د(س) + ق(س))$

ب $\lim_{س \to ١} (د(س) - ق(س))$

ج $\lim_{س \to ١} (د(س) \times ق(س))$

د $\lim_{س \to ١} (د(س))^{٢}$

هـ $\lim_{س \to ١} \sqrt[٣]{٥ \frac{١}{٢} د(س) \times ق(س)}$

٥

أ) إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٣٦$، $\lim_{س \to ١} \frac{د(س)}{ك(س)} = -٤$، فأوجِد $\lim_{س \to ١} ك(س)$.

ب) إذا علمت أن $\lim_{س \to -١} م(س) = -٢$، $\lim_{س \to -١} (ن(س))^{٣} = -٨$، فأوجِد

$$\lim_{س \to -١} (٣م(س) - ٥ن(س))$$

٦

إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٧,٢$، $\lim_{س \to ١} \frac{٣ د(س)}{٥ ع(س)} = ١,٠٨$، $\lim_{س \to ١} ع(س)$ موجودة،

فأوجِد $\lim_{س \to ١} \frac{ع(س)}{د(س)}$.

٧

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$ ، فإن $\lim_{س \to ٣} (٤هـ(س) + ١)$ تساوي :

- ○ ٥
- ○ ٧
- ○ ٩
- ○ ١٣

٨

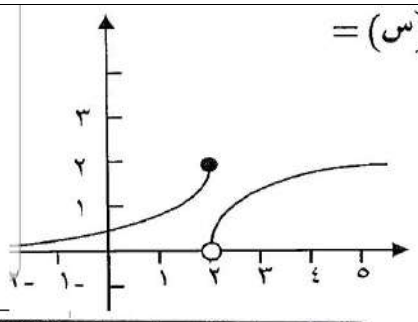
إذا كانت د(س) كثيرة حدود ، د(س) ≥ ٠ ، وكانت $\lim_{س \to ٠} (د(س) - ٥) = ١١$ ، فإن

$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{٢} \sqrt{د(س)}$ تساوي:

- ○ ١٦
- ○ ٨
- ○ ٤
- ○ ٢

٩

) اذا كان الشكل المجاور يمثل الدالة هـ (س) ، فان $\lim_{س \to -٢^{-}} ٣هـ(س) =$

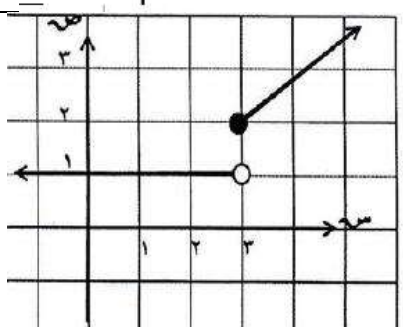


- ○ ٦
- ○ ٢
- ○ صفر
- ○ غير موجودة

١٠

الشكل المجاور يُمثّل بيان الدالة د(س)

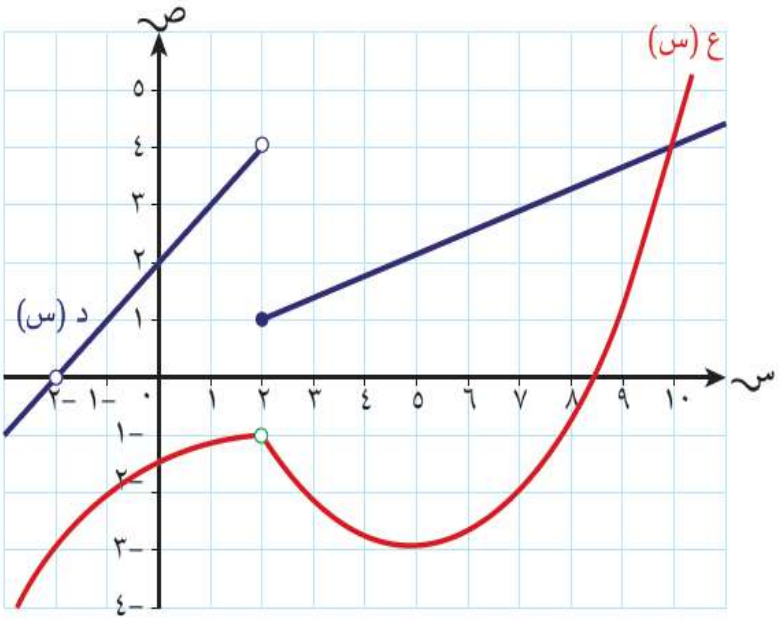
المعرّفة على ح ، فإن $\lim_{س \to -٣^{+}} ٤ د(س)$ تساوي:



- ○ ١
- ○ ٢
- ○ ٣
- ○ ٤

١١

يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالتَين د (س)، ع (س):



أ استخدم الشكل لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي:

١) $\lim_{س \to ١٠} (٢د(س) - ٣ع(س))$

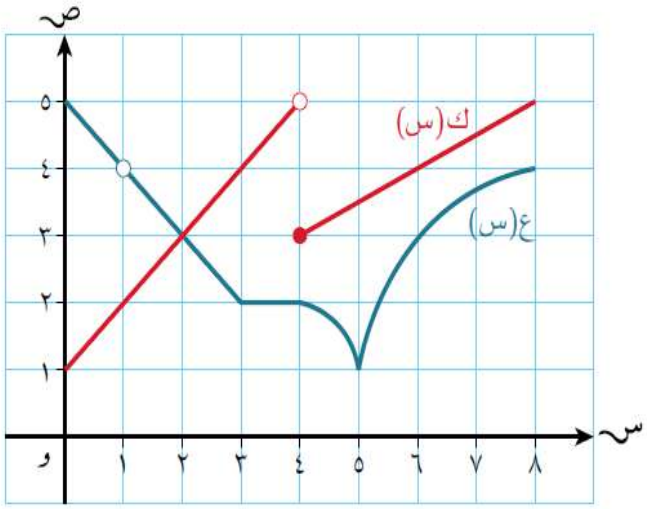
٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{(ع(س))^{٢}}{د(س)}$

٣) $\lim_{س \to -٢} (د(س) + ع(س))^{٣}$

ب أوجِد قيمتَي أ الممكنة إذا علمت أن $\lim_{س \to أ} (د(س) - ع(س)) = ٣$

ج أعطِ سببًا يوضح أن $\lim_{س \to ٢} \sqrt{د(س)}$ غير موجودة.

١٢ يبيّن الرسم البياني الآتي جزءًا من منحنى الدالتَين ع(س)، ك(س):



استخدم الرسم أعلاه لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي إن أمكن:

أ $\lim_{س \to ٦} (ع(س) - ك(س))$

ب $\lim_{س \to ٥} (ع(س) + ك(س))$

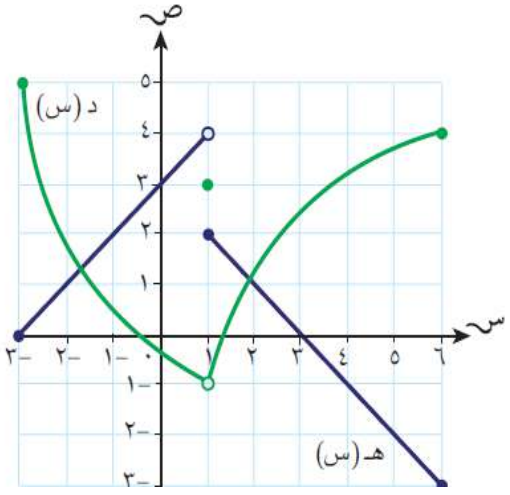
ج $\lim_{س \to ٤} (ع(س) \times ك(س))$

د $\lim_{س \to ١} \frac{ع(س)}{ك(س)}$

هـ $\lim_{س \to ٢} \left((ع(س))^{٢} \times (ك(س))^{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$

١٣ يبيّن الشكل أدناه منحنى الدالتَين المعرّفتين بأكثر من قاعدة د(س)، هـ(س) في المجال $-٣ \leqslant س \leqslant ٦$

فاستخدم خواص النهايات لتجد كلًا ممّا يأتي:



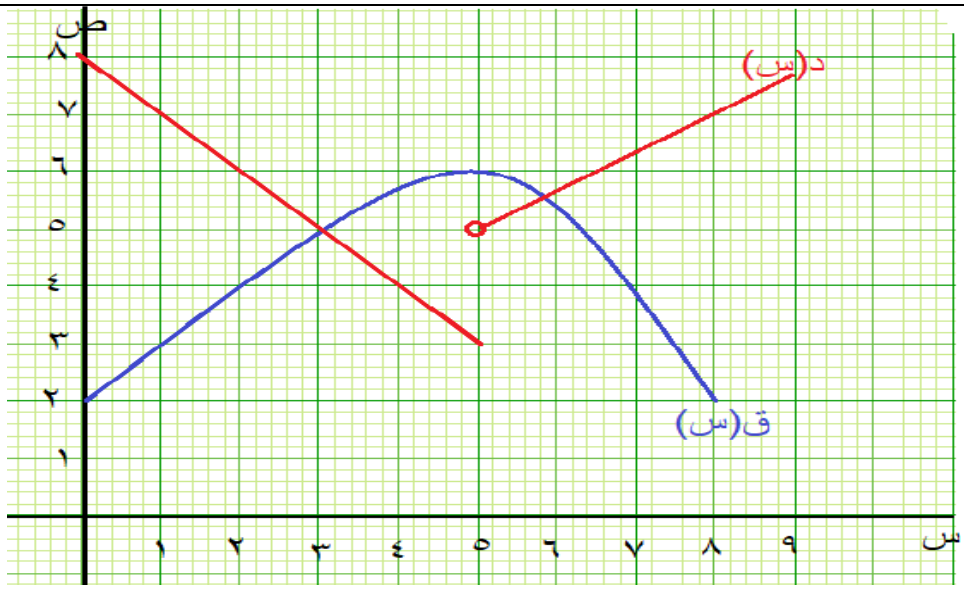
أ $\lim_{س \to ٢} (د(س) + هـ(س))$

ب $\lim_{س \to -٦} (٣د(س) - ٢هـ(س))$

ج $\lim_{س \to ٠} (هـ(س))^{٣}$

د $\lim_{س \to -١} \frac{هـ(س)}{د(س)}$

١٤



يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالتَين د (س)، ع (س):

أ $\lim_{س \to ٢} \left(٣ د (س) + ٥ ق (س) \right)$

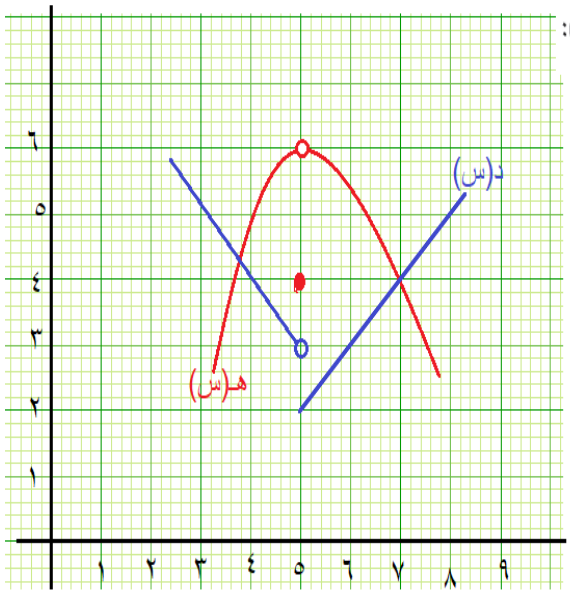
ب $\lim_{س \to -٥} \left(٢ د (س) - ٣ ق (س) \right)$

ج $\lim_{س \to ١} ٢ \sqrt{٦ ق (س) + د (س)}$

د $\lim_{س \to ٠^+} \frac{(د (س))^٢}{٤ ق (س)}$

١٥

يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالتَين د (س)،هـ(س):



أ $\lim_{س \to ٤} \left(٢ د (س) + هـ(س) \right)$

ب $\lim_{س \to ٧} \left(هـ(س) \times د (س) \right)$

ج $\lim_{س \to -٥} \frac{٥ هـ(س)}{٢ د (س)}$

١٦

إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٧,٢$، $\lim_{س \to ١} \frac{٣ د(س)}{٥ ع(س)} = ١,٠٨$، $\lim_{س \to ١} ع(س)$ موجودة،

فأوجِد $\lim_{س \to ١} \frac{ع(س)}{د(س)}$.

١٧

لتكن د (س) دالة تربيعية حيث $\lim_{س \to ٣} د(س) = ٧$، $\lim_{س \to ٦} د(س) = ١٢$، ع (س) دالة خطيّة:

أ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} (د(س) \times ع(س)) = ٣٥$ ، $\lim_{س \to ٦} \frac{ع(س)}{د(س)} = ٠,٥$،

فأوجِد العبارة الجبرية للدالة ع (س)، وأوجِد قيمة $\lim_{س \to ١٥} ع(س)$.

ب ما الفرضيات التي يجب أن تقدمها لتجيب عن الجزئية (أ)؟

١٨

إذا كانت $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٨$، $\lim_{س \to ٢} \frac{٢هـ(س)}{٣د(س)} = ١٠$، وكانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ موجودة،

فقدّر قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{١٠د(س)}{هـ(س)}$.

١٩

إذا علمت أن د(س)، هـ(س) دالتان خطيتان حيث $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٤$، $\lim_{س \to ٨} د(س) = ٢٢$،

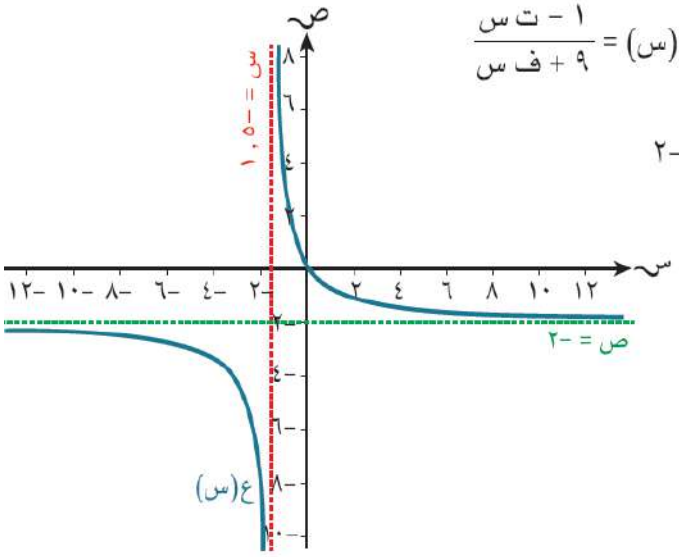
$\lim_{س \to ١} هـ(س) = ١$، $\lim_{س \to ٨} \frac{د(س)}{هـ(س)} = -\frac{١١}{١٧}$، فأوجِد قيمة $\lim_{س \to -٣} (د(س) \times هـ(س))$.

٢٠

يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالة $ع(س) = \frac{١ - ت س}{٩ + ف س}$

يوجد للمنحنى خط تقارب رأسي عند

س = −١,٥، وخط تقارب أفقي عند ص = −٢

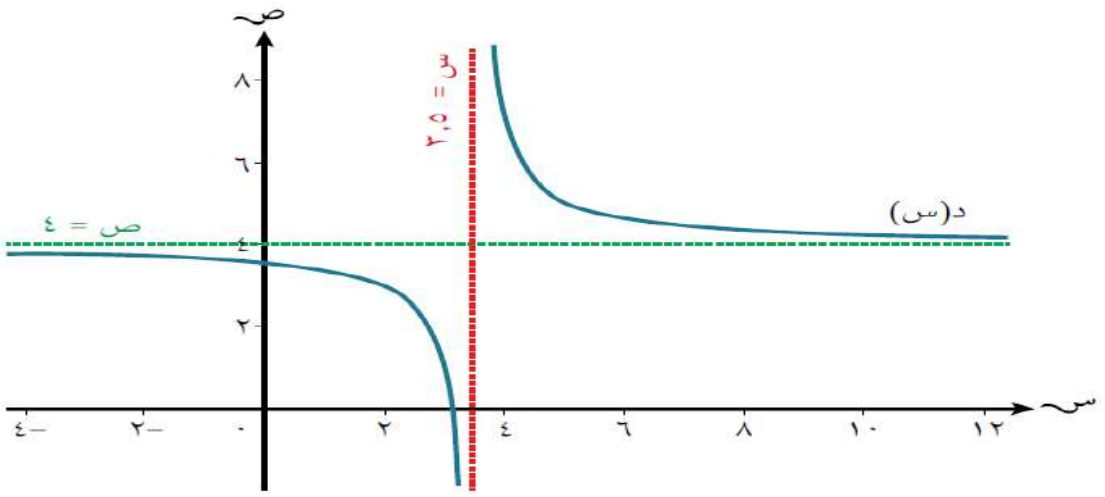


أ أوجِد قيمتَي ت، ف.

ب احسب $\lim_{س \to ٥} (ع(س))^{٢}$ مقرّبة

إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٢١ يبيّن الرسم الآتي جزأين من منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢٥ - أ\ س}{٧ - ب\ س}$ ، أوجد :



أ قيمتَي أ ، ب.

ب قيمة نهـــا$_{س \leftarrow -١}$ $\left(\frac{٣}{٢}\text{د}(س)\right)^{٢}$.

٢٢ إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\left(\frac{\text{ق}(س)}{٣} + ٢س\right) = ٥$ ، فأوجد نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س).

٢٣ إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ٥}$ ق(س) = ٦ ، فأوجد نهـــا$_{س \leftarrow ٥}$ $\frac{س \times \text{ق}(س)}{١ - \text{ق}(س)}$

٢٤ اذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق (س) = ٣ ، نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ هـ (س) = ٤

فإن نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\left((\text{ق}(س))^{٢} + س \times \text{هـ}(س)\right)$ =

أ) ٧ ب) ١٠ جـ) ١٣ د) ١٧

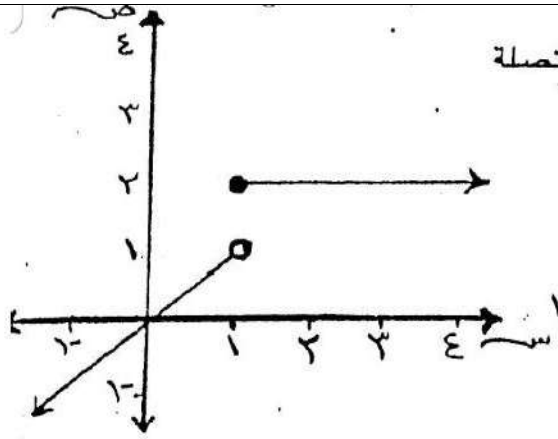
الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	أ ١٨ ب ٨٠ ج ١٠٠٠ د ٥
٢	$\sqrt{٢٧}$
٣	أ -٣ ب ٨ ج ١٢ د -٢١٦
٤	أ ١٥ ب -٣ ج ٥٤ د ٣٦ هـ ١٥
٥	أ -٩ ب ٤
٦	$\lim_{س \to ١} ع(س) = ٤$، $\lim_{س \to ١} \frac{ع(س)}{د(س)} = \frac{٥}{٩}$
٧	٩
٨	٢
٩	٦
١٠	٤
١١	أ ١) -٤ ٢) $\frac{٩}{٢}$ ٣) -٢٧ ب أ = -٢، أو أ = -١ لأن $\lim_{س \to ٢}$ د(س) غير موجودة.

١٢	أ -١ ب $٤,٥$ ج النهاية غير موجودة. د غير موجودة. هـ ٢٧
١٣	أ ٢ ب ١٨ ج ٢٧ د -٤
١٤	أ ٣٨ ب -١٢ ج ١٠ د ٨
١٥	أ ١٣ ب ١٦ ج ٥
١٦	$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} ع(س) = ٤$، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{ع(س)}{د(س)} = \frac{٥}{٩}$
١٧	أ $ع(س) = \frac{١}{٣} س + ٤$، ٩ ب يجب أن نفترض أن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١٥} ع(س)$ موجودة.
١٨	$\frac{٢}{٣}$
١٩	-٢٣١
٢٠	أ ت = ١٢، ف = ٦ ب $-٣,٤٦$
٢١	أ أ = ٨، ب = ٢ ب $\left(\frac{٢}{٣} ٣ \times \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{١٢١}{٤}$
٢٢	٣
٢٣	٦-
٢٤	١٧

الدرس الرابع:الاتصال

١



في الشكل المجاور : الدالة د (س) غير متصلة عند س = ١ لأن :

أ) نهـــا د (س) غير موجودة
س ← ١ +

ب) نهـــا د (س) غير موجودة
س ← ١ -

جـ) الدالة د (س) غير معرفة عند س = ١

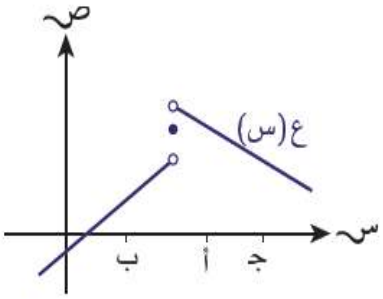
د) نهـــا د (س) غير موجودة
س ← ١

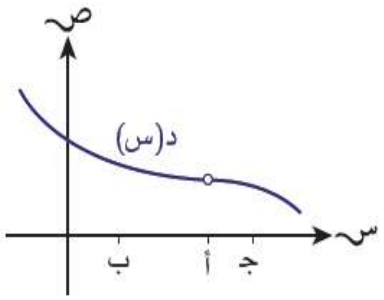
٢

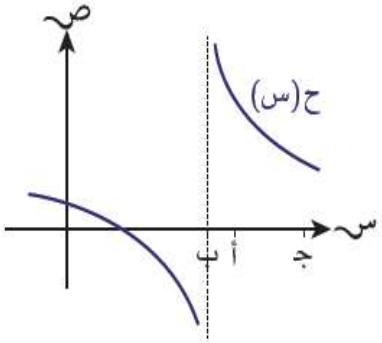
في كل دالة مما يأتي، حدّد فيما إذا كانت الدالة متصلة أو غير متصلة مع ذكر السبب:

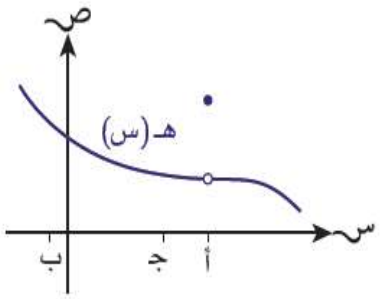
أ عند س = أ .

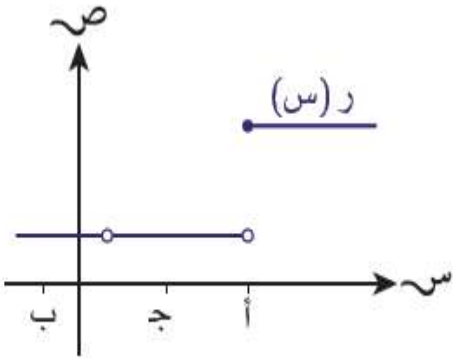
ب على الفترة ب ≤ س ≤ جـ.

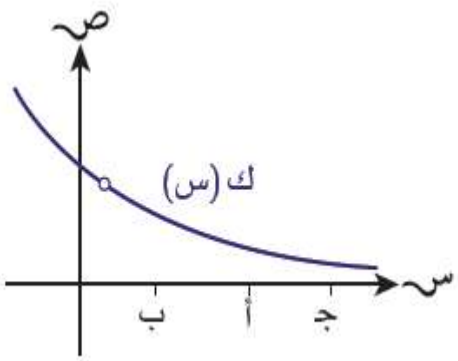






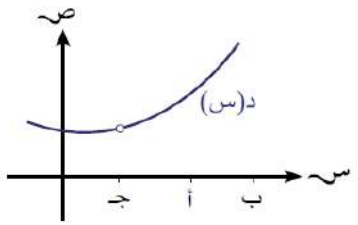






٣ اذكر ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة أو غير متصلة، مع ذكر السبب:

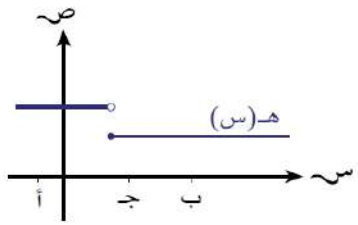
أ



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ≤ س ≤ ب:

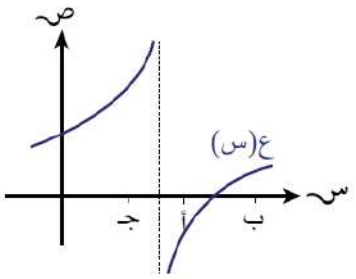
ب



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ≤ س ≤ ب:

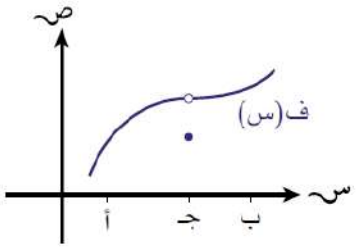
ج



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ≤ س ≤ ب:

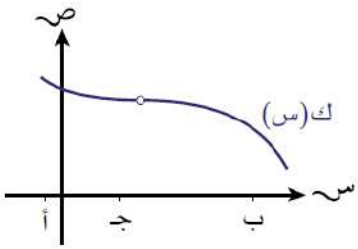
د



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ≤ س ≤ ب:

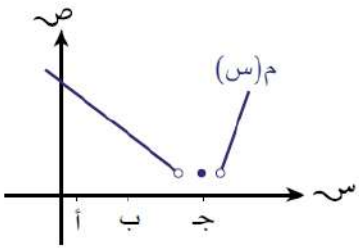
هـ



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ≤ س ≤ ب:

و



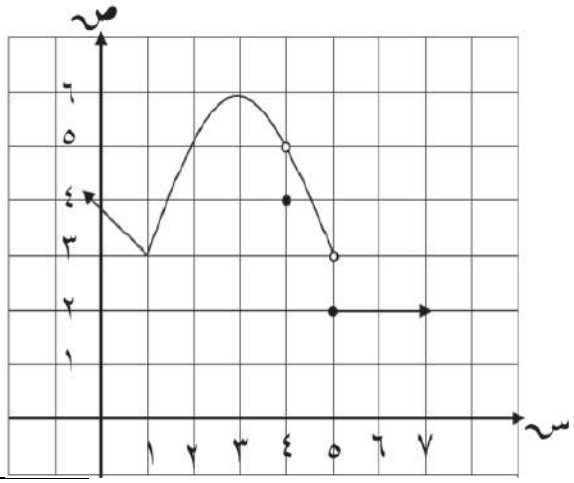
١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ≤ س ≤ ب:

٤

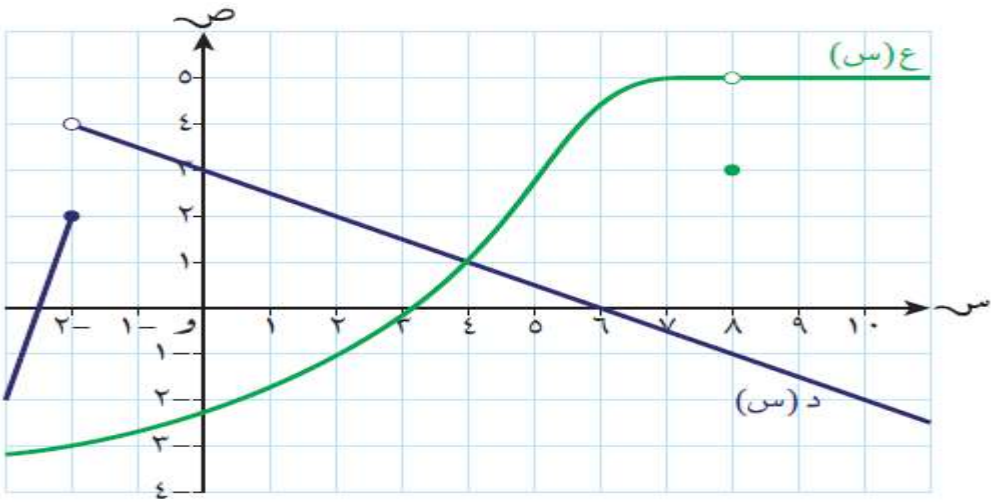
الشكل المجاور يُمثل بيان الدالة د(س).

اكتب قيم س التي تكون عندها الدالة د(س) غير متصلة موضحًا السبب.



٥

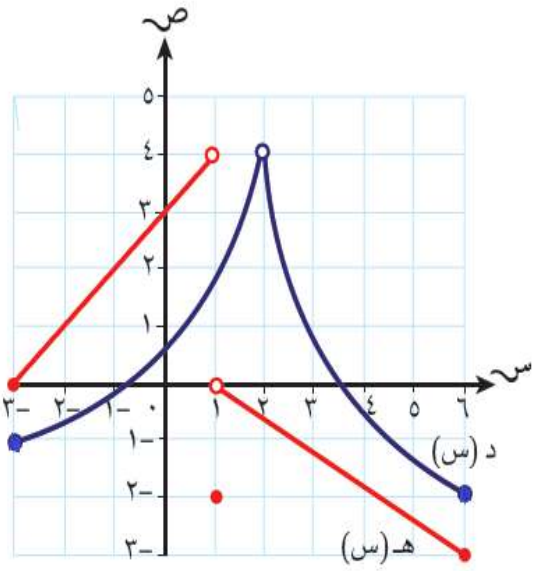
يبيّن الشكل الآتي جزءًا من منحنى الدالتين د (س)، ع (س):



اكتب قيم س التي تكون عندها الدالتين د(س) ، ع(س) غير متصلتين موضحا السبب

٦

يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، هـ(س) على الفترة $-٣ \leqslant س \leqslant ٦$



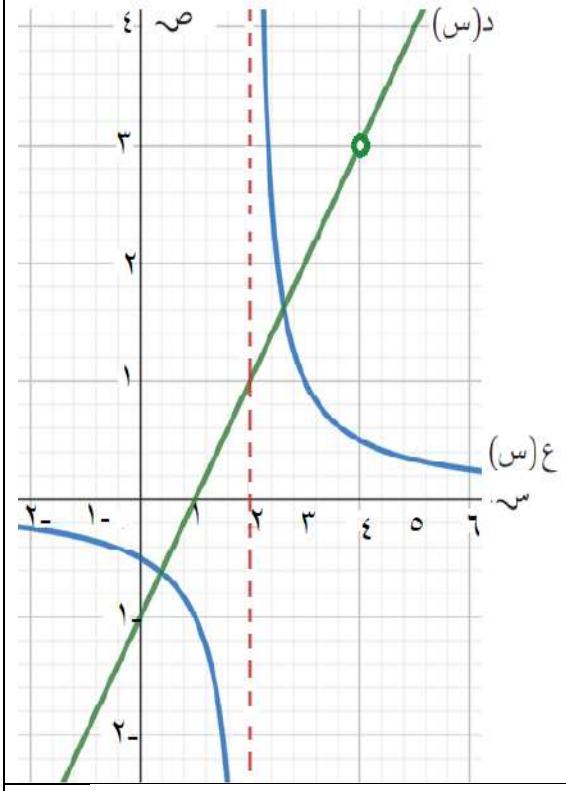
أ حدّد أيًا من الدالتَين متصلة عند النقطة:

١) س = ١ ٢) س = ٢

ب حدّد أيًا من الدالتَين متصلة (إن وجدت) على الفترة:

١) $-٢ \leqslant س \leqslant ١,٥$ ٢) $٣ \leqslant س \leqslant ٥$

٧ يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، ع(س) على الفترة $-٢ \leqslant$ س $\leqslant ٦$



أ حدّد أيًا من الدالتَين متصلة عند النقطة:

١) س = ٠ ٢) س = ٤

ب حدّد أيًا من الدالتَين متصلة (إن وجدت) على الفترة:

١) $١ \leqslant$ س $\leqslant ٥$ ٢) $٣ \leqslant$ س $\leqslant ٥$

ج ١) إذا علمت أن د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤}{\text{س} - \text{أ}}$، فأوجِد قيمة أ التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

٢) إذا علمت أن ع(س) = $\frac{}{٢\text{س} + \text{ب}}$، فأوجِد قيمة ب التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

٨ لتكن هـ(س) = $\frac{٦}{\text{س} - ٢}$:

أ اشرح السبب في أن الدالة هـ(س) غير متصلة على الفترة $٠ \leqslant$ س $\leqslant ٨$

ب اكتب أي فترة مغلقة تكون الدالة هـ(س) متصلة عندها

٩ بيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{١٠}{١ - \text{س}}$ متصلة عند س = -١

١٠ بيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{١٢}{٤ - ٣\text{س}}$ متصلة عند س = ٠

١١ بيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{٨}{\text{س}^{٢} + ٤}$ متصلة عند س = -٢

١٢ بيّن أن الدالة د(س) = $\frac{٤}{٢ - \text{س}}$ متصلة عند س = ١

١٣ لتكن الدالة د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$:

أ بيّن أن الدالة د(س) متصلة على الفترة $١ \leqslant$ س $\leqslant ١٠$

ب اكتب أي فترة مغلقة بحيث تكون الدالة د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ غير متصلة عندها.

١٤	لتكن الدالة د(س) = (س - ٢)$^{-١}$ أ بيّن أن الدالة د(س) متصلة على الفترة ٣ ≤ س ≤ ٨ ب اكتب أي فترة مغلقة بحيث تكون الدالة د(س) = (س - ٢)$^{-١}$ غير متصلة عندها.
١٥	الدالة د (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ متصلة على الفترة: أ) -٣ ≤ س ≤ ٠ ب) ١ ≤ س ≤ ٣ ج) -٢ ≤ س ≤ ٢ د) -٤ ≤ س ≤ ١
١٦	الدالة د (س) = $\frac{٤}{\text{س}^{٢} - ٩}$ متصلة على الفترة: أ) ٠ ≤ س ≤ ٥ ب) -١ ≤ س ≤ ٤ ج) -٤ ≤ س ≤ ١ د) -١ ≤ س ≤ ٢
١٧	الدالة د (س) = $\frac{٣}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$ متصلة على الفترة: أ) ٣ ≤ س ≤ ٦ ب) ١ ≤ س ≤ ٤ ج) -٢ ≤ س ≤ ٣ د) -١ ≤ س ≤ ١
١٨	الدالة د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}$ غير متصلة على الفترة : أ) ٠ ≤ س ≤ ٤ ب) -٧ ≤ س ≤ -٣ ج) -٣ ≤ س ≤ ٠ د) ١ ≤ س ≤ ٤
١٩	بيّن أن الدالة د(س) = $\frac{\text{س} + ٥}{\text{س} - ٨}$ متصلة على الفترة ٠ ≤ س ≤ ٥، وغير متصلة على الفترة ٥ ≤ س ≤ ١٠
٢٠	لتكن الدالة د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} - ٢٠}$ أ بيّن أن الدالة د (س) غير متصلة على الفترة ٩ ≤ س ≤ ١١ ب أوجِد قيمة س السالبة بحيث تكون د (س) غير متصلة.

٢١ إذا كانت هـ(س) = $\frac{٢س}{(س + ٥)(س - ٨)}$ ، فأوجد :

أ قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير متصلة في كل فترة من الفترتَين:

١) ١ ≤ س ≤ ١٠

٢) -١٠ ≤ س ≤ -١

ب نهاية الدالة عند (س ← ±∞).

٢٢ الدالة هـ(س) = $\frac{س - ٦}{٥س + ١١}$ متصلة على الفترتَين -∞ < س ≤ أ، ب ≤ س < ∞:

أ اكتب:

١) أكبر قيمة ممكنة للعدد الصحيح أ.

_____

_____

٢) أصغر قيمة ممكنة للعدد الصحيح ب.

ب أوجِد قيمة جـ إذا علمت أن د(س) = $\frac{١}{هـ(س)}$ غير متصلة عند س = جـ.

٢٣ أ أكمل الجدولَين الآتيَين اللذَين يبيّنان قيم الدالة هـ(س) = ٤ - $\frac{٢}{٣ - س}$ عندما تقترب س من ٣:

س	هـ(س)
٣,١	٢٤
٣,٠١	٢٠٤
٣,٠٠١	
٣,٠٠٠١	

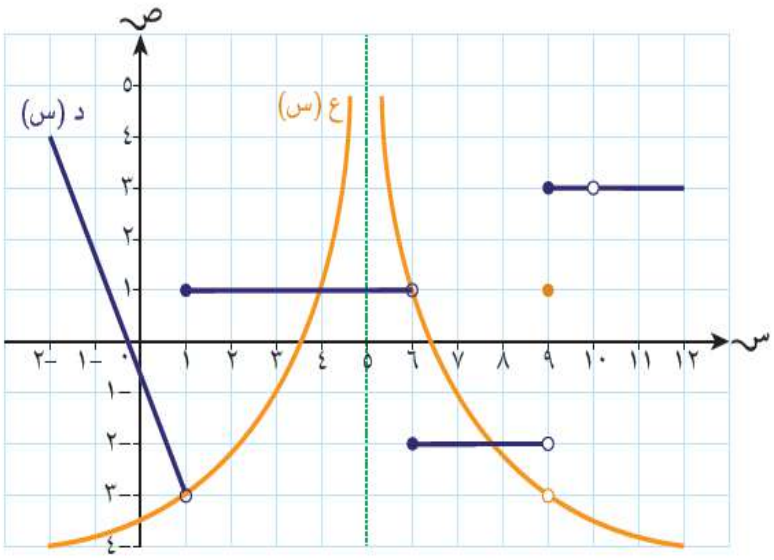
س	هـ(س)
٢,٩	-١٦
٢,٩٩	-١٩٦
٢,٩٩٩	
٢,٩٩٩٩	

ب علامَ تدل القيم الموجودة في الجدول حول اتصال الدالة؟

ج إذا علمت أن $\lim_{س \to ∞}$ هـ(س) = ف، فأوجد $\lim_{س \to ف}$ هـ(س).

٢٤ استخدم جداول القيم لتبيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{٨}{٢ - ٣س}$ متصلة عند س = −١

٢٥ يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د (س)، ع(س) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢:

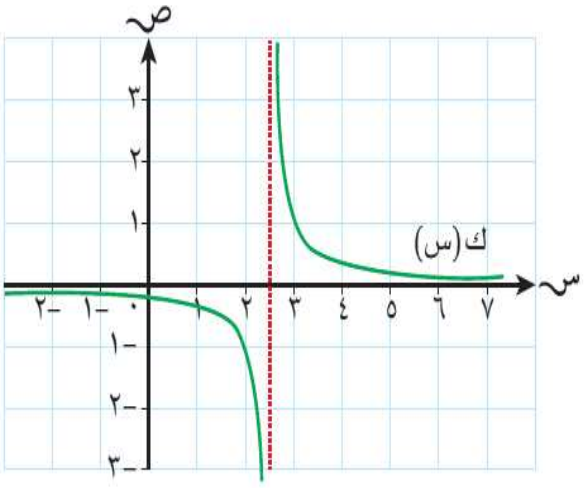


أ عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ تكون الدالة ع(س) غير متصلة؟ أعطِ سببًا لكل منها.

ب عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ تكون الدالة د(س) غير متصلة؟ أعطِ سببًا لكل منها.

ج أي الدالتَين د (س)، ع(س) متصلة على الفترة −٢ ≤ س ≤ ١؟ برّر إجابتك.

٢٦ يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة ك(س).



أ اكتب معادلة خط التقارب الرأسي.

ب إذا علمت أن ك(س) = $\frac{١}{ت س + ف}$ وتمر بالنقطة (٢، −١)، فأوجِد قيمة كل من ت، ف التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

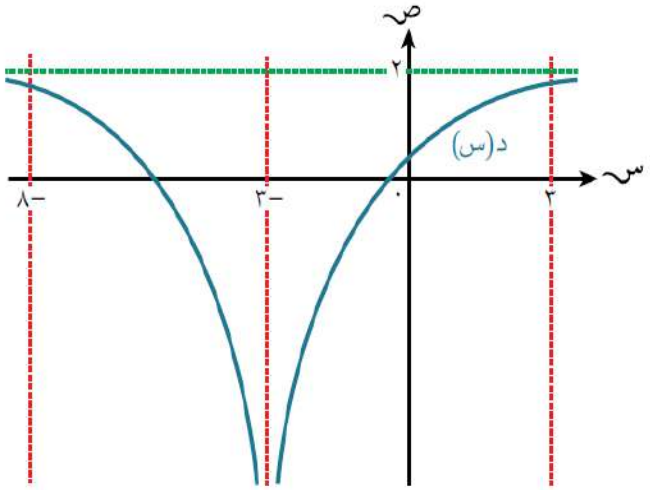
ج استخدم المنحنى لتوضح أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة ٣ ≤ س ≤ ٧

د بيّن أن الدالة ك(س) غير متصلة على الفترة ١ ≤ س ≤ ٤

هـ إذا علمت أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة −٢ ≤ س ≤ أ، فأوجد قيمة أكبر عدد صحيح ممكن لـ أ.

٢٧

حصل أحمد على التمثيل البياني للدالة د(س)، ورسم عليه أربعة مستقيمات اعتبرها خطوط تقارب كما يبيّن الرسم أدناه:



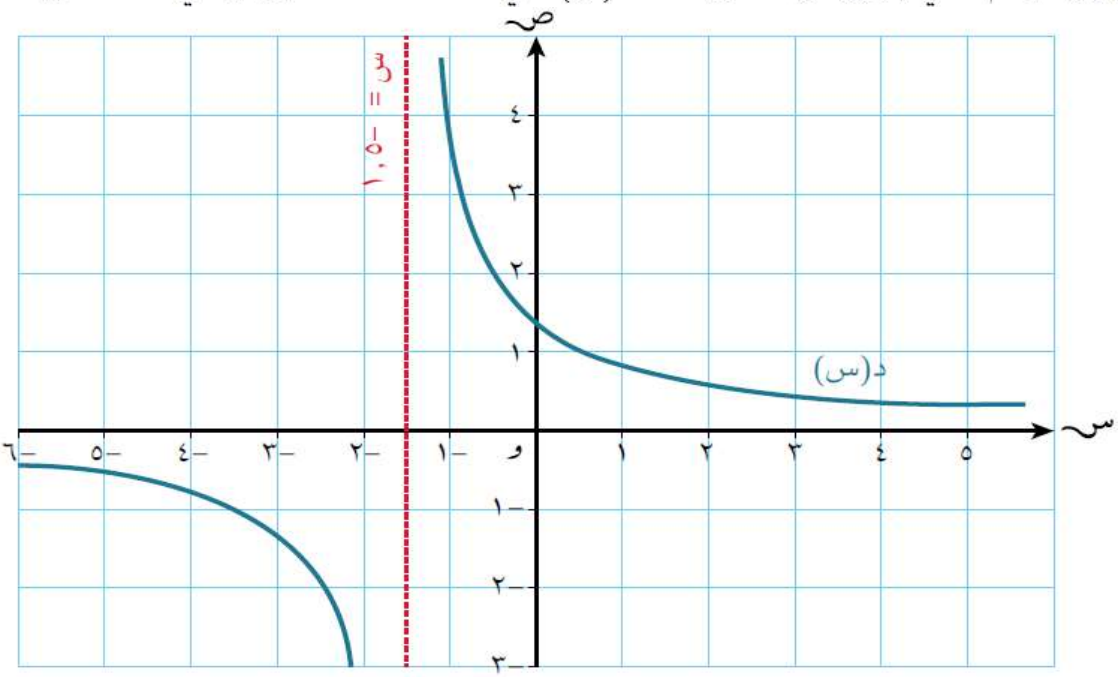
إذا افترضنا أن التمثيل البياني للدالة د(س) صحيح، فاكتب معادلة:

أ الخطوط المستقيمة التي رسمها أحمد، مفترضًا بشكل خاطئ أنها خطوط تقارب.

ب اكتب معادلتَي خطَّي التقارب اللذَين رسمهما أحمد بشكل صحيح، واشرح بإيجاز المعلومات التي يعطيها كل منهما عن قيم الدالة واتصالها.

٢٨

يبيّن الرسم الآتي جزأَين من منحنى الدالة د(س) التي لمنحناها خط تقارب رأسي معادلته س = −٥ , ١:



أ علامَ يدل خط التقارب الرأسي س = −٥ , ١؟

ب إذا علمت أن د(س) = $\frac{٤}{أ + ب\ س}$، وتمر بالنقطة (−١، ٤)، فأوجِد قيمة كل من أ، ب.

ج استخدم جداول القيم لتبيّن أن الدالة د(س) متصلة عند س = ١

الإجابات:

السؤال	الإجابة
١	$\lim_{س \to ١}$ د (س) غير موجودة
٢	
٣	
٤	عند س = ٤ ، لأن $\lim_{س \to ٤}$ د(س) ≠ د(٤). عند س = ٥ ، لأن النهاية غير موجودة.
٥	عند س = ٨ ع(٨) = ٣ $\lim_{س \to ٨}$ ع(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٨}$ ع(س) ≠ ع(٨) عند س = -٢، لأن النهاية غير موجودة. $\lim_{س \to -٢^-}$ د (س) = ٢ ، $\lim_{س \to -٢^+}$ د (س) = ٤

الدالة	عند س = أ	على الفترة ب ⩾ س ⩾ جـ
د (س)	لا	لا
ع (س)	نعم	لا
هـ (س)	لا	نعم
ح (س)	نعم	لا
ك (س)	نعم	نعم
ر (س)	لا	لا

الدالة	عند س = ج	في الفترة جـ ⩾ س ⩾ ب
د (س)	لا	نعم
ع (س)	نعم	لا
هـ (س)	نعم	نعم
ف (س)	لا	لا
ك (س)	نعم	لا
م (س)	لا	نعم

٦	أ ١) عند س = ١ الدالة د(س) متصلة ٢) عند س = ٢ الدالة هـ(س) متصلة ب ١) الدالة د(س) متصلة على الفترة ـ٢ ≤ س ≤ ١,٥ ٢) الدالتين د(س) ، هـ(س) متصلتين على الفترة ٢ ≤ س ≤ ٥
٧	أ ١) الدالتين د(س) ، ع(س) متصلتين عند س = ٠ ٢) الدالة ع(س) متصلة عند س = ٤ ب ١) الدالتين د(س)، ع(س) غير متصلتين على الفترة ١ ≤ س ≤ ٥ ٢) الدالة ع(س) متصلة على الفترة ٣ ≤ س ≤ ٥
٨	أ ع(٢) غير معرّفة و٠ ≤ ٢ ≤ ٨ ب أي فترة أ ≤ س ≤ ب لا تتضمّن س = ٢
٩	١) هـ(ـ١) = ٥ ٢) نهـــــا هـ (س) = نهـــــا هـ(س) = ٥، س ← ـ١⁻ س ← ـ١⁺ فيكون نهـــــا هـ(س) = ٥ س ← ٠ ٣) هـ(ـ١) = نهـــــا هـ(س) س ← ـ١
١٠	١) هـ(٠) = ٣ ٢) نهـــــا هـ (س) = نهـــــا هـ(س) = ٣، س ← ٠⁻ س ← ٠⁺ فيكون نهـــــا هـ(س) = ٣ س ← ٠ ٣) هـ(٠) = نهـــــا هـ(س) س ← ٠

١١	١) هـ(-٢) = ١ ٢) $\lim_{س \to -٢^-}$ هـ (س) = $\lim_{س \to -٢^+}$ هـ(س) = ١ ، فيكون $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = ١ ٣) هـ(-٢) = $\lim_{س \to -٢}$ هـ(س)
١٢	أ د (١) = ٤ ب $\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ١^+}$ د (س) = ٤ ج $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)
١٣	أ ارسم التمثيل البياني للدالة ص = $\frac{١}{س}$ من النقطة (١، ١) إلى (١٠، ٠,١). ب الدالة معرَّفة عند كل قيم الفترة ١ ≤ س ≤ ١٠، وقيمة النهاية عند كل نقطة تساوي قيمة الدالة عند تلك النقطة. ج أي فترة أ ≤ س ≤ ب تتضمّن س = ٠
١٤	أ الدالة معرَّفة عند كل قيم الفترة ٣ ≤ س ≤ ٨ ، وقيمة النهاية عند كل نقطة تساوي قيمة الدالة عند تلك النقطة. ب أي فترة أ ≤ س ≤ ب تتضمّن س = ٢
١٥	١ ≤ س ≤ ٣
١٦	-١ ≤ س ≤ ٢
١٧	٣ ≤ س ≤ ٦
١٨	-٣ ≤ س ≤ ٠

١٩ الدالة د(س) غير متصلة عند س = ٨ لأن القسمة على ٠ غير معرّفة.

الفترة ٠ ≤ س ≤ ٥ لا تتضمن س = ٨، لكن الفترة ٥ ≤ س ≤ ١٠ تتضمن س = ٨

٢٠ أ بإثبات أن نهـــــا د (س) غير موجودة، أو أن س ← ١٠

د(١٠) غير معرّفة.

ب س = −٢

٢١ أ ١) س = ٨

٢) س = −٥

ب نهـا هـ(س) = ٠

٢٢ أ ١) أ = −٣

٢) ب = −٢

ب جـ = ٦

٢٣ أ

من جهة اليمين	
س	هـ(س)
٣,١	٢٤
٣,٠١	٢٠٤
٣,٠٠١	٢٠٠٤
٣,٠٠٠١	٢٠٠٠٤

من جهة اليسار	
س	هـ(س)
٢,٩	−١٦
٢,٩٩	−١٩٦
٢,٩٩٩	−١٩٩٦
٢,٩٩٩٩	−١٩٩٩٦

ب الدالة غير متصلة عند س = ٣

ج ف = ٤، نهـــــا هـ(س) = ٦ س ← ٤

٢٤ بإثبات أن:

١) هـ(−١) معرّفة و هـ(−١) = ١,٦

٢) نهـــــا هـ(س) = نهـــــا هـ(س) = ١,٦ س ← −١⁻ س ← −١⁺

٣) نهـــــا هـ(س) = هـ(−١) س ← −١

٢٥	أ س = ٥، س = ٩؛ لأن ع(٥) غير معرّفة، ع(٩) لا تساوي نهـــــا ع(س). س ← ٩ ب س = ١، س = ٦، س = ٩، س = ١٠؛ لأن نهـــــا د (س)، نهـــــا د (س)، نهـــــا د (س) س ← ١ س ← ٦ س ← ٩ جميعها غير موجودة، كما أن د(١٠) غير معرّفة. ج ع(س)، لأنها متصلة عند جميع نقاط الفترة. د ٣
٢٦	أ س = $\frac{٥}{٢}$ ب ت = ٢، ف = −٥ ج ك(س) معرفة عند جميع قيم هذه الفترة والنهاية عند كل نقطة موجودة؛ لا توجد فجوات أو قفزات أو خطوط تقاربية في هذه الفترة. د لأن ك(س) غير معرّفة عند س = $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥ التي تقع في الفترة المغلقة بين ١ و ٤ هـ أ = ٢
٢٧	أ س = −٨، س = ٣ ب ص = ٢ ؛ الدالة لا تحقق قيمًا أكبر من أو يساوي ٢ س = −٣ ؛ الدالة ليست متصلة عند س = −٣
٢٨	أ الدالة د (س) غير معرّفة عند س = −١,٥، نهـــــا د (س) غير موجودة؛ لأن النهايتين س ← −١,٥ من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساويتين، د (س) ليست متصلة عند س = −١,٥ ب أ = ٣، ب = ٢ ج بإثبات أن: ١) د (١) معرّفة و (د (١) = ٠,٨) ٢) نهـــــا د (س) = نهـــــا د (س) = ٠,٨ س ← ١− س ← ١+ ٣) د (١) = نهـــــا د (س) س ← ١