مساحة المثلث " صيغة هيرون "

تستخدم صيغة هيرون لحساب مساحة سطح المثلث بدلالة أطـــوال أضلاعه

بفـــرض المثلـــث أ ب جـ الـــذى أطـــوال أضـــلاعـــه : $\acute{\text{أ}}$ ، $\acute{\text{ب}}$ ، $\acute{\text{جـ}}$

$$\text{مساحة المثلث} = \sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \acute{\text{أ}})\,(\text{ع} - \acute{\text{ب}})\,(\text{ع} - \acute{\text{جـ}})}$$

حيـــث ع نصـــف محيـــط المثلـــث ، $\text{ع} = \frac{1}{2}(\acute{\text{أ}} + \acute{\text{ب}} + \acute{\text{جـ}})$

With my best wishes .... Nagah Etman

مساحة المثلث المتساوى الأضلاع

بفرض أن طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع ل فإن :

مساحة المثلث = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^٢^

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,ل^{2}$$

With my best wishes .... Nagah Etman

قاعدة رياضية في مساحة المثلث

إذا كان لدينا مثلثاً محيطه م ومساحته س فإذا ضُربت أطوال أضلاعه في عدد ن فإن :

محيط المثلث الجديد = م ن

مساحة المثلث الجديد = س $ن^{٢}$

With my best wishes .... Nagah Etman

متطابقات الدالة العكسية

❶ $جتا^{-1} س + جتا^{-1} ص = جا^{-1} \left(س \sqrt{1 - ص^2} + ص \sqrt{1 - س^2} \right)$

❷ $جا^{-1} س - جتا^{-1} ص = جتا^{-1} \left(س \sqrt{1 - ص^2} + ص \sqrt{1 - س^2} \right)$

With my best wishes .... Nagah Etman

مساحة المثلث "صيغة جيوشاو"

تستخدم صيغة جيوشاو لحساب مساحة سطح المثلث بدلالة أضلاعه وذلك وفقاً للقانون :

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\sqrt{\text{أ}^{\text{٢}}\,\text{ب}^{\text{٢}} - \left(\frac{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}} - \text{جـ}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}}$$

With my best wishes .... Nagah Etman

مساحة المثلث بدلالة متوسطاته

مساحة المثلث = $\frac{٤}{٣}$ × مساحة المثلث الذى أطوال أضلاعه هى أطوال المتوسطات

بفرض أن أطوال أضلاع متوسطـــات المثلث هى : ل، م ، ن

∴ مساحة المثلث = $\frac{٤}{٣} \times \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{ل})(\text{ع} - \text{م})(\text{ع} - \text{ن})}$

With my best wishes .... Nagah Etman

مساحة المثلث بدلالة ارتفاعاته

بفرض أن المثلث أ ب جـ ارتفاعاتـــه هى : $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{ع}_{٣}$ فـــإن :

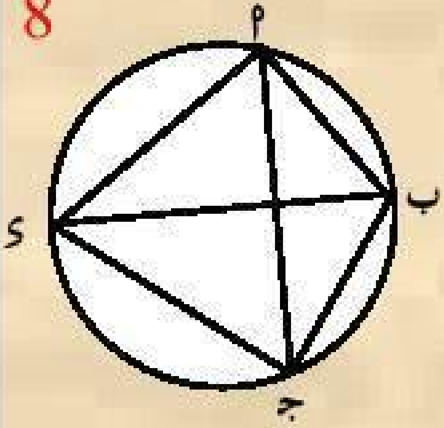
$$\Delta^{-١} = ٤ \sqrt{\text{ع} \left(\text{ع} - \text{ع}_{١}^{-١}\right) \left(\text{ع} - \text{ع}_{٢}^{-١}\right) \left(\text{ع} - \text{ع}_{٣}^{-١}\right)}$$

حيـــث : Δ مساحة المثلث ، $\text{ع} = \dfrac{\text{ع}_{١}^{-١} + \text{ع}_{٢}^{-١} + \text{ع}_{٣}^{-١}}{٢}$

With my best wishes .... Nagah Etman

8

نظرية بطليموس



حاصل ضرب طولى القطرين =

مجموع حاصل ضرب طولى كل ضلعين متقابلين

أ جـ × ب د = أ ب × جـ د + أ د × ب جـ

With my best wishes .... Nagah Etman

البعد بين نقطتين The distance between two points

إذا كانت النقطة أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ فإن :

$$أ ب = \sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات}}$$

$$= \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

وإذا كانت النقطتين فى المستوى الفراغي حيث : أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$

$$أ ب = \sqrt{\text{مربع فرق السينات} + \text{مربع فرق الصادات} + \text{مربع فرق العينات}}$$

$$= \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$$

With my best wishes .... Nagah Etman

مجموع جيوب سلسلة زوايا ذات توال عددى

بفرض أن الزوايا المعلومة هى:

$$\text{أ} \;،\; \text{أ} + \text{د} \;،\; \text{أ} + ٢\text{د} \;،\; \text{أ} + ٣\text{د} \;،\; \ldots\ldots\ldots\ldots \;،\; \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}$$

وبفرض أن مجموع جيوب هذه الزوايا م أى أن :

$$\text{م} = \text{جا}\,\text{أ} + \text{جا}\,(\text{أ} + \text{د}) + \text{جا}\,(\text{أ} + ٢\text{د}) + \ldots\ldots + \text{جا}\,[\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}]$$

$$\text{م} = \frac{\text{جا}\left(\text{أ} + \frac{\text{ه} - ١}{٢}\,\text{د}\right)\,\text{جا}\,\frac{\text{ه}\,\text{د}}{٢}}{\text{جا}\,\frac{\text{د}}{٢}}$$

With my best wishes .... Nagah Etman

مجموع جيوب تمام سلسلة زوايا ذات توال عددى

بفرض أن الزوايا المعلومة هى :

أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، .... ، أ + (ن - ١) د

وبفرض أن مجموع جيوب هذه الزوايا ك أى أن :

ك = جتا أ + جتا (أ + د) + جتا (أ + ٢د) + ... + جتا [أ + (ن - ١) د]

$$\text{ك} = \frac{\text{جتا}\left(\text{أ} + \frac{\text{ن} - ١}{٢}\,\text{د}\right)\ \text{جا}\ \frac{\text{ن}\,\text{د}}{٢}}{\text{جا}\ \frac{\text{د}}{٢}}$$

With my best wishes .... Nagah Etman

مساحة المضلع المنتظم

بفرض أن طول ضلعه ل ، وعدد أضلاعه ن

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{\text{ن}}{\text{٤}}\,\text{ل}^{\text{٢}}\,\text{ظتا}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$

With my best wishes .... Nagah Etman

مساحة المضلع المنتظم

بفرض أن عدد أضلاعه $ن$ ، وتمسه من الداخل دائرة نصف قطرها $نق$

مساحة المضلع المنتظم $= ن \, نق^{2} \, ظا \frac{ط}{ن}$ ، ($ط = ١٨٠^\circ$)

With my best wishes .... Nagah Etman

القاعدة الفيثاغورثية

تمكننا القاعدة الفيثاغورثية من إيجاد ثلاثيات فيثاغورثية أو ثلاثة أضلاع تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية ، وليس من الضرورى أن أية ثلاثة أضلاع تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم تنطبق عليها هذه القاعدة .

الثلاثيات هى :

$$ن \text{ ، } \frac{ن^{٢} - ١}{٢} \text{ ، } \frac{ن^{٢} + ١}{٢} \quad \text{حيث } ن \in]١ \text{ ، } \infty[$$

With my best wishes .... Nagah Etman

طول القوس Arc length

بفرض أن لـــدينا المنحنى ص = د (س) ونـــريـــد إيجـــاد طـــول القوس $\overparen{\text{ا ب}}$

حيث : ا $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

$$\text{طـــول القوس ا ب} = \int_{\text{ص}_1}^{\text{ص}_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2} \, . \, \text{ءس}$$

With my best wishes .... Nagah Etman

16

علاقة جذور المعادلة التربيعية بمعاملاتها Vieta's formulas

بفرض أن جذرى المعادلة :

$$أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠ \quad ، \quad أ \neq ٠$$

هما : ل ، م فإن :

① $ل + م = \frac{-ب}{أ}$

② $ل\,م = \frac{جـ}{أ}$

مع تحياتي نجاح رجب

طريقة فونتانا

تستخدم طريقة فونتانا لحل المعادلة : $\text{س}^{٣} + \text{جـ س} = \text{ى}$

$$\text{س} = \sqrt[٣]{\frac{\text{ى}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ى}^{٢}}{٤} + \frac{\text{جـ}^{٣}}{٢٧}}} + \sqrt[٣]{\frac{\text{ى}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ى}^{٢}}{٤} + \frac{\text{جـ}^{٣}}{٢٧}}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

معادلة الدرجة الثالثة

فى أى معادلة من الدرجة الثالثة على الصورة :

$\text{أ س}^{٣} + \text{ب س}^{٢} + \text{جـ س} + \text{د} = ٠$ إذا كان : أ د = ب جـ فإن :

جذور هذه المعادلة هى : $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ ، $\sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}}\ \text{ت}$ ، $-\sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}}\ \text{ت}$

مع تحياتى نجاح رجب

الوسـط التـوافقى Harmonic Mean

بفــرض الأعداد : س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، .... ، س$_ن$ التى عددها ن

$$\text{الوسـط التوافقــى} = \frac{ن}{\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \frac{١}{س_٣} + \cdots\cdots + \frac{١}{س_ن}}$$

فالوسـط التوافقى هو مقلوب الوسـط الحسابى لمقلوبات هــذه القيم

مع تحياتى نجاح رجب

قانون أبى كامل المصرى

$$\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س} + \text{ص} + ٢\sqrt{\text{س ص}}}$$

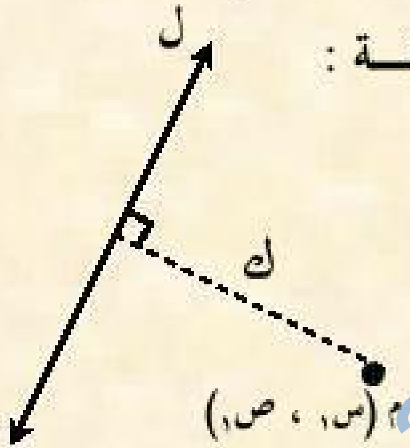
مع تحياتى نجاح رجب

Point - Line Distance بُعد نقطة عن خط مستقيم

إذا كان المستقيم ل معادلته الإحداثية : ٢ س + ب ص + جـ = ٠ ،

النقطة م (س ١ ، ص ١) فإن : طول القطعة المستقيمة العمودية

المرسومة من نقطة م على المستقيم ل تتعين من العلاقة :

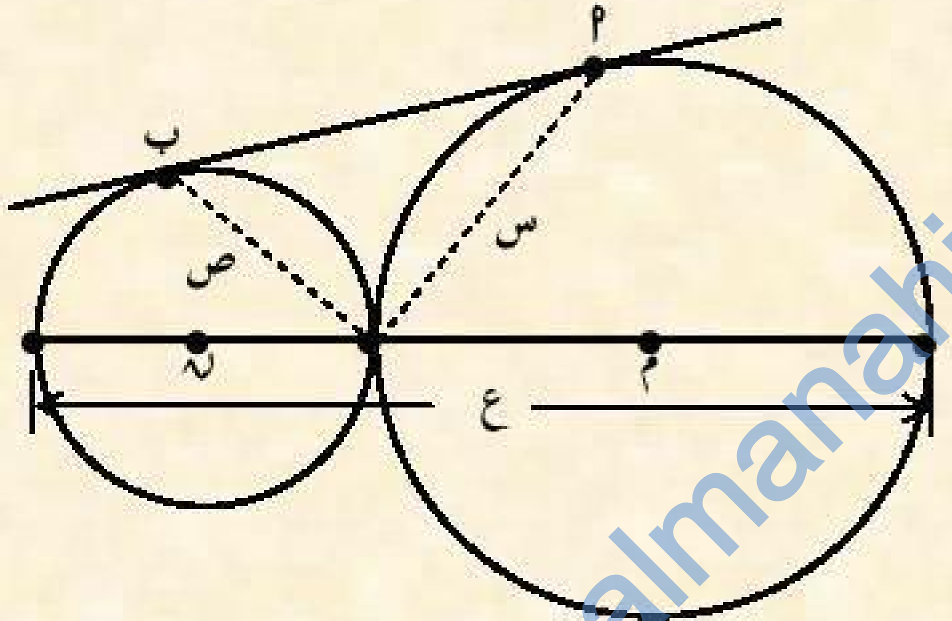


$$\text{ك} = \frac{|\,\text{٢}\,\text{س}_١ + \text{ب}\,\text{ص}_١ + \text{جـ}\,|}{\sqrt{\text{٢}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

المماس المشترك لدائرتين متماستين من الخارج

Tangent Circles, the Cube of the Common external tangent



م ، ن دائرتـــان متمـــاستين مـــن الخـــارج حيـــث :

ع مجموع قطرى الدائرتين ، $\overline{\text{ا ب}}$ مماس مشترك للدائرتين

، س المسافة بين نقطـــة التماس ا ونقطة تمـــاس الدائرتين

، ص المسافة بين نقطـــة التماس ب ونقطة تمـــاس الدائرتين

نستنتج أن : $(\text{ا ب})^3 = \text{س} \times \text{ص} \times \text{ع}$

مع تحياتي نجاح رجب

حســـاب مســاحــة مثلث المــواقــع

مساحة مثلث المواقع = $\frac{1}{2}$ نق^{2} جـــا ٢أ جـــا ٢ب جـــا ٢ج

حيـــث : نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب ج

مع تحياتي نجاح رجب

24

حساب مساحة المثلث بدلالة ارتفاعي ضلعين والزاوية المحصورة بين هذين الضلعين

مساحة المثلث = $\dfrac{\text{ع ب ع جـ}}{\text{٢ جا أ}} = \dfrac{\text{ع أ ع جـ}}{\text{٢ جا ب}} = \dfrac{\text{ع أ ع ب}}{\text{٢ جا جـ}}$

مع تحياتي نجاح رجب

حساب مساحة / طريقة المحددات

Triangle Area By Determinants

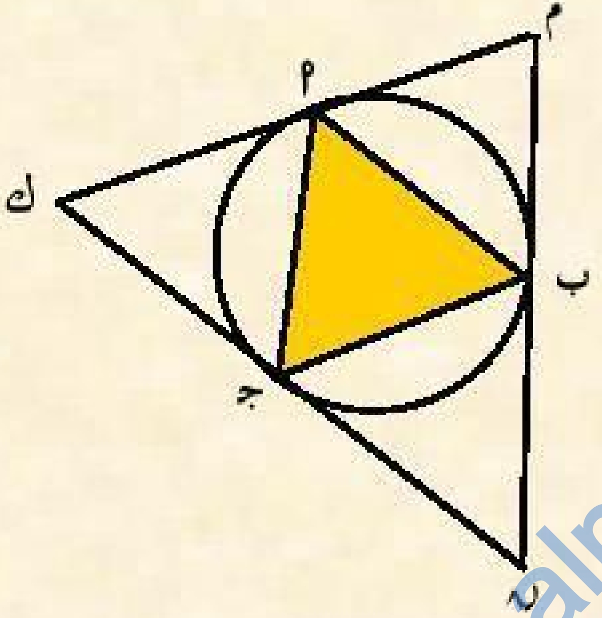
بفرض أن المثلث أ ب جـ احداثيات رءوسه هى :

(س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) ، (س$_3$ ، ص$_3$)

$$\text{مساحة المثلث} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س_1 & س_2 & س_3 \\ ص_1 & ص_2 & ص_3 \end{vmatrix}$$

مع تحياتى نجاح رجب

مساحة ومحيط المثلث التماسى



المثلث م ن ك هو مثلث تماسى للمثلث أ ب جـ

، وبفرض أن مساحة المثلث أ ب جـ هي Δ

مساحة المثلث م ن ك = $\frac{1}{2}$ Δ قا أ قا ب قا جـ

محيط المثلث م ن ك = أَ قا أ + بَ قا ب + جـَ قا جـ

مع تحياتي نجاح رجب

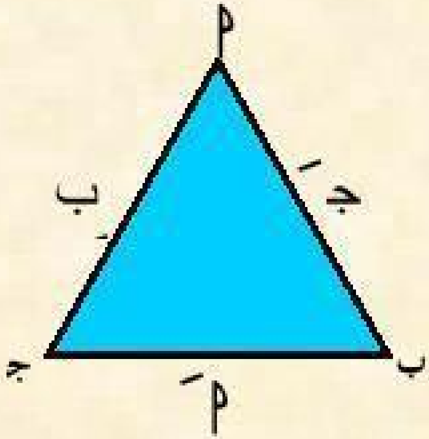
النسب المثلثية للزاوية $\frac{\text{ه}}{2}$

$$\text{جا}\,\frac{\text{ه}}{2} = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1 + \text{جاه}} \pm \sqrt{1 - \text{جاه}}\right]$$

$$\text{جتا}\,\frac{\text{ه}}{2} = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1 + \text{جاه}} \mp \sqrt{1 - \text{جاه}}\right]$$

مع تحياتي نجاح رجب

قانون الجيب وجيب التمام والظل



بفرض المثلث أ ب ج أطوال أضلاعه أَ ، بَ ، جَ

، نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب ج

قانون الجيب

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}} = \text{٢ نق}$$

قانون جيب التمام

$$\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{جَ}^{٢} - \text{٢ بَ جَ جتا أ} \quad ، \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢ بَ جَ}}$$

قانون الظل

$$\frac{\text{أَ} - \text{بَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}} = \frac{\text{ظا}\ \frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}}{\text{ظا}\ \frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

قاعدة ديكارت للاشارات

تستخدم هذه القاعدة المهمة جداً فى تعيين عدد الجذور الموجبة والسالبة المتوقعة فى أى معادلة حيث تنص هذه القاعدة على أن :

" عدد الجذور الموجبة يساوى عدد التغيرات فى إشارة معاملات المعادلة (أو أقل من ذلك بأى عدد زوجى) . كما أن عدد الجذور السالبة يساوى عدد الإشارات المتكررة توالياً فى المعاملات (أو أقل من ذلك بأى عدد زوجى) . وهنا يجب أن يدخل فى هذا الحساب جميع المعاملات ذات القيم الصفرية على أنها ذات إشارة موجبة . "

مع تحياتى نجاح رجب

قاعدة نيوتن

بفرض المعادلة :

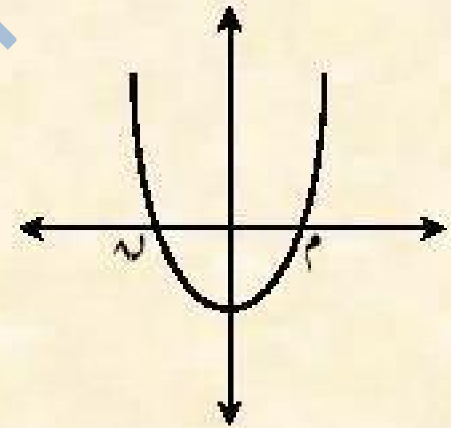
$$أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-1} س^{ن-1} + أ_{ن-2} س^{ن-2} + \ldots\ldots\ldots + أ_{0} = 0$$

$جـ_{1}$: مجموع الجذور ، $جـ_{2}$: مجموع مربعات الجذور

$جـ_{3}$: مجموع مكعبات الجذور ، $جـ_{ن}$: مجموع القوى النونية للجذور

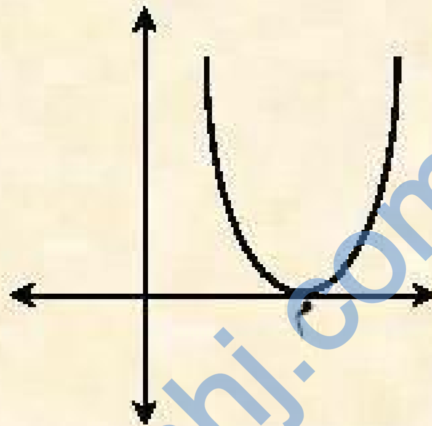
1. $أ_{ن} جـ_{1} + أ_{ن-1} = 0$
2. $أ_{ن} جـ_{2} + أ_{ن-1} جـ_{1} + 2 أ_{ن-2} = 0$
3. $أ_{ن} جـ_{3} + أ_{ن-1} جـ_{2} + أ_{ن-2} جـ_{1} + 3 أ_{ن-3} = 0$
4. $أ_{ن} جـ_{ن} + أ_{ن-1} جـ_{ن-1} + أ_{ن-2} جـ_{ن-2} + \ldots\ldots + ن أ_{0} = 0$

حـل المعـادلـة من الـدرجـة الثانيـه بيانيـًا



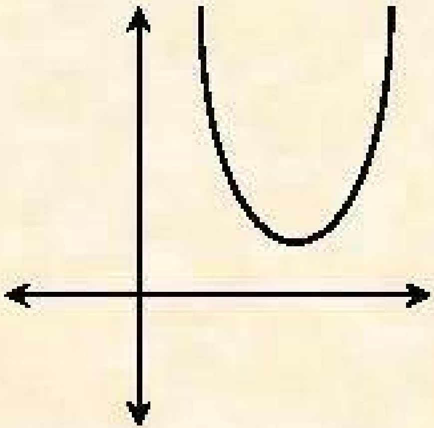
المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين

م . ح = { م ، ن }



المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة

م . ح = { م }



المنحنى لا يقطع محور السينات

م . ح = $\varnothing$

مع تمنياتى نجاح رجب

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

لإيجاد جذور المعادلة : $أ س^{٢} + ب س + ج = ٠$ ، $أ \neq ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$

المميز $\Delta = ب^{٢} - ٤ أ ج >$ صفر ⇐ يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

المميز $\Delta = ب^{٢} - ٤ أ ج <$ صفر ⇐ يوجد للمعادلة جذران تخيليان مترافقان

المميز $\Delta = ب^{٢} - ٤ أ ج =$ صفر ⇐ يوجد للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

مع تحياتي نجاح رجب

الصيغة البديلة للقانون العام

Alternative quadratic formula

لإيجاد جذور المعادلة : $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$ ، $\text{أ} \neq ٠$

$$\text{س} = \frac{٢\,\text{جـ}}{\left(-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}\right)}$$

مع تحياتي نجاح رجب

حل المعادلات من الدرجة الرابعة بطريقة براون

Brown's Method For Quadratic Equations

من خلال طريقة براون يمكن تحليل معادلة الدرجة الرابعة إلى معاملين من الدرجة الثانيه مباشرة بطريقة براون . وبفرض أن معادلة الدرجة الرابعة هى :

$س^4 + أ_3 س^3 + أ_2 س^2 + أ_1 س + أ_0 = 0$ نقوم بتعين المعاملات الآتية :

$ك = أ_3 أ_1 - 4 أ_0$ ، $م = أ_0 (4 أ_2 - أ_3^2) - أ_1^2$

نحسب جبرياً أكبر جذر حقيقى ص للمعادلة التكعيبية التالية :

$ص^3 - أ_2 ص^2 + ك ص + م = 0$ وليكن $ص_3$

بعد ذلك نقوم بحساب المعاملات الآتية :

$$ل_{1،2} = \frac{أ_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{أ_3}{2}\right)^2 - أ_2 + ص_3}$$

$$ه_{1،2} = \frac{ص_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ص_3}{2}\right)^2 - أ_0}$$

ثم تحقق لمعرفة الفرق بين : $ه_1$ ، $ه_2$ بواسطة العلاقة : $ل_1 ه_2 + ل_2 ه_1 = أ_1$

الآن يصبح لدينا معادلتين من الدرجة الثانيه هما عاملى معادلة الدرجة الرابعة وهما :

$س^2 + ل_1 س + ه_1 = 0$ ، $س^2 + ل_2 س + ه_2 = 0$

وبحلهما بواسطة القانون العام لحل المعادلة التربيعية نحصل على الأربعة جذور

مع تحياتي نجاح رجب

حل المعادلات الخطية بإستخدام المحددات

Cramer's Rule of Linear Equation

إذا كان لدينا المعادلات الثلاث :

$$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = ك_١$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = ك_٢$$

$$أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = ك_٣$$

فإن : $س = \frac{\Delta_١}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_٢}{\Delta}$ ، $ع = \frac{\Delta_٣}{\Delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} جـ_١ & ب_١ & أ_١ \\ جـ_٢ & ب_٢ & أ_٢ \\ جـ_٣ & ب_٣ & أ_٣ \end{vmatrix} \neq ٠$$

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} جـ_١ & ب_١ & ك_١ \\ جـ_٢ & ب_٢ & ك_٢ \\ جـ_٣ & ب_٣ & ك_٣ \end{vmatrix}$$

$$\Delta_٢ = \begin{vmatrix} جـ_١ & ك_١ & أ_١ \\ جـ_٢ & ك_٢ & أ_٢ \\ جـ_٣ & ك_٣ & أ_٣ \end{vmatrix}$$

$$\Delta_٣ = \begin{vmatrix} ك_١ & ب_١ & أ_١ \\ ك_٢ & ب_٢ & أ_٢ \\ ك_٣ & ب_٣ & أ_٣ \end{vmatrix}$$

مع تحياتي نجاح رجب

قـاعـدة المجـمـوع والـفـرق

أولاً قاعدة المجمـــوع

تهدف هذه القاعدة إلى التعبير عن أى كسر حقيقى بسطه الواحد الصحيح كمجموع كسرين حقيقيين بسط كل منهما الواحد الصحيح

$\frac{١}{ن} = \frac{١}{ن + ١} + \frac{١}{ن(ن + ١)}$	$\frac{ك}{ن} = \frac{١}{\frac{ن + ١}{ك}} + \frac{١}{\frac{ن(ن + ١)}{ك}}$
$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٣} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٦}$

ثانياً قاعدة الفرق

تهدف هذه القاعدة إلى التعبير عن أى كسر حقيقى بسطه الواحد الصحيح كالفـــرق بين كسرين حقيقيين بسط كل منهما الواحد الصحيح

$\frac{١}{ن} = \frac{١}{ن - ١} - \frac{١}{ن(ن - ١)}$	$\frac{ك}{ن} = \frac{١}{\frac{ن - ١}{ك}} - \frac{١}{\frac{ن(ن - ١)}{ك}}$
$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{٧} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{١٤}$

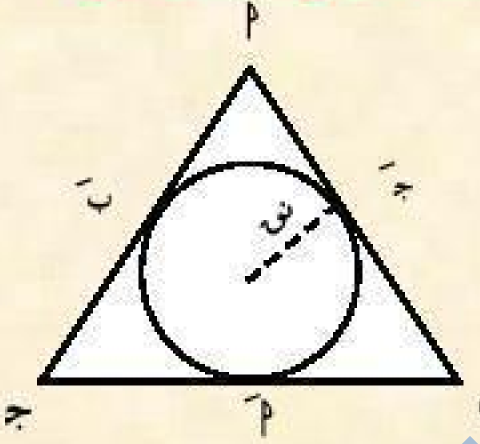
مع تحياتى نجاح رجب

نظرية ذات الحدين لأى عدد طبيعى ن

$$(س + ص)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} ق_{ر}^{ن}\, س^{ن-ر}\, ص^{ر} \quad ، \quad ق_{ر}^{ن} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$$

مع تمنياتى نجاح رجب

38 نصف قطر الدائرة التى تمس المثلث من الداخل



$$\text{نق} = \frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{نصف محيط المثلث}} \quad \therefore \text{نق} = \frac{\Delta}{\text{ع}}$$

$$\therefore \Delta = \text{نق} \cdot \text{ع}$$

مع تحياتى نجاح رجب

العلاقة بين نصفى قطرى الدائرتين الداخلة والخارجة للمضلع المنتظم

بفرض أن :

ل : طول ضلع المضلع المنتظم

نق : طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمضلع المنتظم

نو : طول نصف قطر الدائرة الداخلة للمضلع المنتظم

$$ل = ٢ \sqrt{نق^{٢} - نو^{٢}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

مجمـوع الأعـداد الطبيعيـة

$$\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{ك} = \frac{١}{٢}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ١)$$

مع تحياتي نجاح رجب

41

مجموع مربعات الأعداد الطبيعية

$$\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{ك}^{٢} = \frac{١}{٦}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ١)\,(٢\text{ن} + ١)$$

مع تحياتي نجاح رجب

42 مجمـوع مكعبات الأعـداد الطبيعيـة

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٣} = \frac{١}{٤} ن^{٢} (ن + ١)^{٢}$$

مع تحياتي نجاح رجب

مجمـوع القوى الرابعة الأعـداد الطبيعيـة

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٤} = \frac{١}{٣٠} ن \left(ن + ١\right)\left(٢ن + ١\right)\left(٣ن^{٢} + ٣ن - ١\right)$$

مع تمنياتي بالنجاح

مجموع القوى الخامسة الأعداد الطبيعية

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ك}^{5} = \frac{1}{12}\,\text{ن}^{2}\,(\text{ن}+1)^{2}\,(2\text{ن}^{2} + 2\text{ن} - 1)$$

مع تحياتي نجاح رجب

45

مجمـوع القوى السادسة الأعـداد الطبيعيـة

$$\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{ك}^{٦} = \frac{١}{٤٢}\,\text{ن}\,(\text{ن}+١)\,(٢\text{ن}+١)\,(٣\text{ن}^{٤}+٦\text{ن}^{٣}-٣\text{ن}+١)$$

مع تحياتي نجاح رجب

46

مجموع القوى السابعة الأعداد الطبيعية

$$\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} \text{ك}^{٧} = \frac{١}{٢٤}\,\text{ن}^{٢}\,(\text{ن}+١)^{٢}\,(٣\text{ن}^{٤}+٦\text{ن}^{٣}-\text{ن}^{٢}-٤\text{ن}+٢)$$

مع تحياتي نجاح رجب

مجمـوع القوى الثامنة الأعـداد الطبيعيـة

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٨} = \frac{١}{٩٠} ن\,(ن + ١)\,(٢ن + ١)\,(٥ن^{٦} + ١٥ن^{٥} - ن^{٢} + ٥ن^{٤} - ١٥ن^{٣} - ن^{٢} + ٩ن - ٣)$$

مع تحياتي نجاح رجب

مجموع القوى التاسعة الأعداد الطبيعية

$$\sum_{ك=١}^{ن} ك^{٩} = \frac{١}{٢٠} ن^{٢} (ن + ١)^{٢} (ن^{٢} + ن - ١)(٢ن^{٤} + ٤ن^{٣} - ن^{٢} - ٣ن + ٣)$$

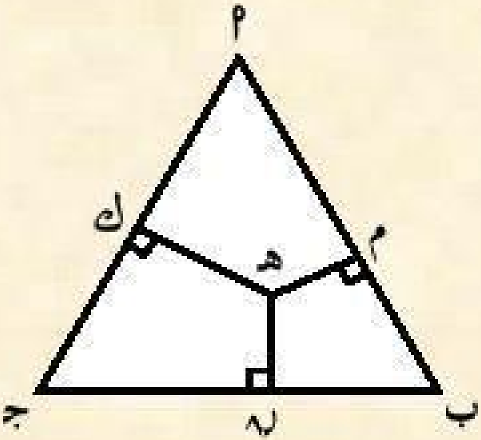
مع تحياتي نجاح رجب

مجموع القوى العاشرة الأعداد الطبيعية

$$\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{ك}^{\text{١٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٦٦}} \left(\text{٦ن}^{\text{١١}} + \text{٣٣ن}^{\text{١٠}} + \text{٥٥ن}^{\text{٩}} - \text{٦٦ن}^{\text{٧}} + \text{٦٦ن}^{\text{٥}} - \text{٣٣ن}^{\text{٣}} + \text{٥ن} \right)$$

مع تحياتي نجاح رجب

50 Viviani's theorem نظرية فيفيانى



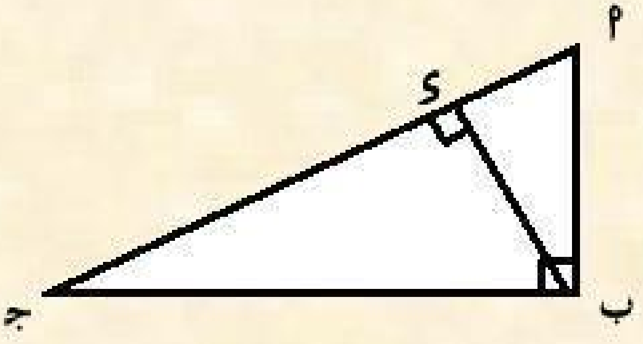
بفرض أن المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ل ، ارتفاعه ع وباختيار نقطة هـ داخل المثلث فإن :

$$\text{هـ م} + \text{هـ ن} + \text{هـ ك} = \text{ع} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ل}$$

مع تحياتى نجاح رجب

نظرية إقليدس Euclid's theorem

" فى المثلث القائم الزاوية مساحة المربع المنشأ على أحد ضلعى القائمة تساوى مساحة المستطيل الذى بُعداه طول مسقط هذا الضلع على الوتر ، وطول الوتر"



❶ $(\text{أ ب})^2 = \text{أ د} \times \text{أ ج}$

❷ $(\text{ب ج})^2 = \text{ج د} \times \text{ج أ}$

❸ $\text{ب د} = \dfrac{\text{أ ب} \times \text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

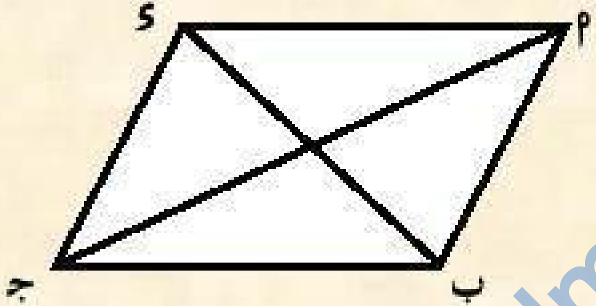
❹ $(\text{ب د})^2 = \text{د أ} \times \text{د ج}$

$$\boxed{\frac{1}{(\text{أ ب})^2} + \frac{1}{(\text{ب ج})^2} = \frac{1}{(\text{ب د})^2}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

قانون متوازى الأضلاع Parallelogram law

" فى متوازى الأضلاع مجموع مربعى طولى القطرين يساوى ضعف مجموع مربعى طولى ضلعين متجاورين "



$$(\text{أ جـ})^2 + (\text{ب ء})^2 = 2\left[(\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2\right]$$

مع تحياتى نجاح رجب

صيغة براهما غوبتا Brahmagupta's formula

تمكننا صيغة بريتشنايدر من حساب مساحة الشكل الرباعى الدائرى أياً كان ، وبفرض أن :

أطوال أضلاع الشكل الرباعى الدائرى هى : س ، ص ، ع ، ل

مساحة الشكل الرباعى الدائرى هى : $\square$

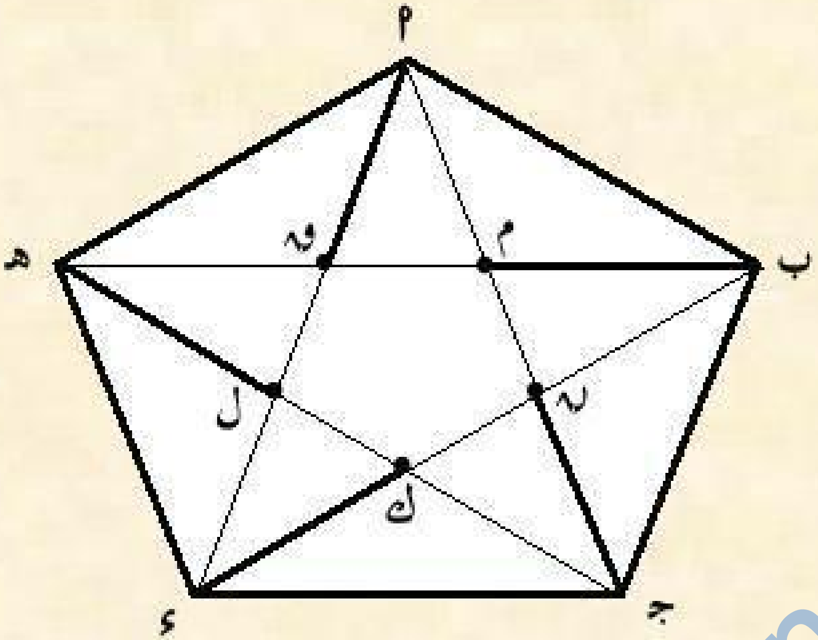
نصف مجموع أطوال أضلاعه أى أن : ح

$$\square = \sqrt{(ح - س)(ح - ص)(ح - ع)(ح - ل)}$$

حيث : $ح = \frac{1}{2}(س + ص + ع + ل)$

مع تحياتى نجاح رجب

نظـريـة حديثـة / نظرية هيـــون Hoehns' theorem



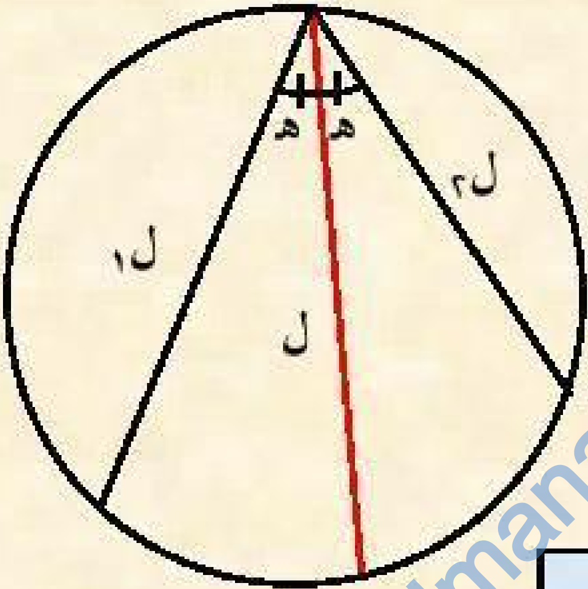
في عــام ١٩٩٥م أوجــد الرياضي **Hoehn** نظرية تشابــه نظــرية مينيلــوس ولكن علــى المضلــع الخماسي . ارسم خماسي وارسم أوتاره جميعهـا ثم استبعدمنها تلك القطـع المكـونـة للخماسي الداخلي ، سيبقى هناك ١٠ قطع نجــد أن حاصــل ضرب الخمس الغير متجاورة يســـاوي حاصــل ضــرب الخمس الأخــرى .

بمعنى آخر وبالاستعانة بالشكل المقابل فإن :

ب م × جـ ن × ء ك × هـ ل × أ و = و هـ × م أ × ن ب × ك جـ × ل ء

مع تحياتي نجاح رجب

55 Three - Chord Lemma أوتـــار ليما الثلاثـــة



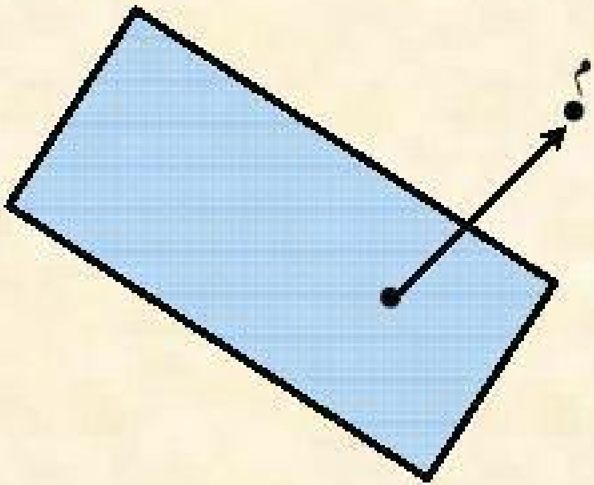
إذا رسمـــنا ثـلاثـــة أوتـــار مــن نقطـــة علـى الـدائـــرة بحيـــث أن الـزاويـــة بين كـــل وتـريـن متتــاليــين متســاوية فى القيـاس

فـــإن :

ل١ + ل٢ = ٢ ل جتـــا هـ

مع تحياتي نجاح رجب

Point-Plane Distance البعد بين نقطـة ومسـتوى



إذا كان المستوى معادلتـه الإحداثية هـي :

$$\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص} + \text{جـ}\,\text{ع} + \text{د} = 0$$

، والنقطـة م $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ فـإن :

طول القطعـة المستقيمة العمودية المرسومة

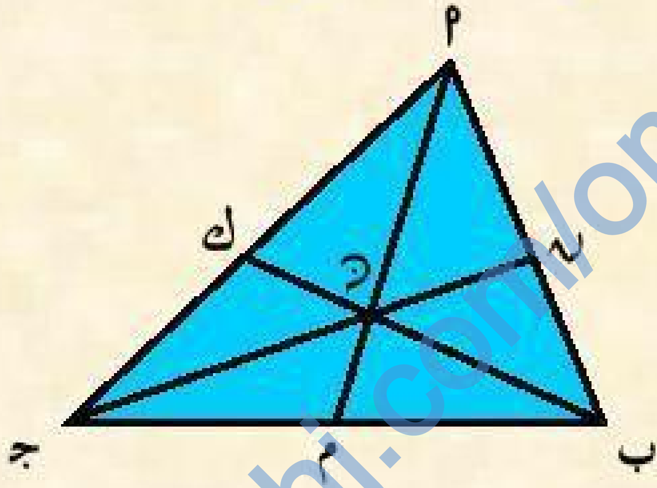
من نقطة م على المستقيم ل تتعين من العلاقة :

$$\frac{\left|\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{جـ}\,\text{ع}_1 + \text{د}\right|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$

مع تمنياتي نجاح رجب

إيجـــاد أطـــوال متـــوسطـــات أى مثلـــث

بفــرض أن أ ب جـ مثلــث متــوسطـــاتــه هى : أ م ، ب ك ، جـ ن متقاطعــة فى د



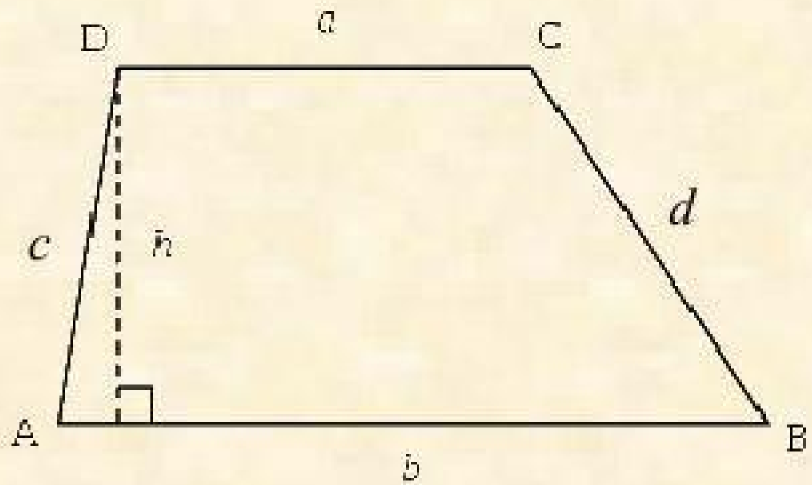
❶ $\text{أ م} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\text{بَ}^2 + 2\,\text{جَ}^2 - \text{أَ}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 + 2\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جتا أ}}$

❷ $\text{ب ك} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\text{جَ}^2 + 2\,\text{أَ}^2 - \text{بَ}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{جَ}^2 + \text{أَ}^2 + 2\,\text{جَ}\,\text{أَ}\,\text{جتا ب}}$

❸ $\text{جـ ن} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\text{أَ}^2 + 2\,\text{بَ}^2 - \text{جَ}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 + 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\,\text{جتا جـ}}$

مع تحياتى نجاح رجب

شبـه المنحـرف Trapezoid



هو شكل رباعى فيـه ضلعان فقط متـوازيان بفرض أن طولا قاعدتيه المتوازيتين a ، b وأن ارتفاعه h وطولا ساقيه c ، d وقاعدته المتوسطـة m ومساحتـه K وأن p ، q أقطـاره *Diagonals*

$$h = \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)}}{2|b-a|}$$

$$K = \frac{a+b}{4|b-a|}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)}.$$

$$K = \frac{a+b}{|b-a|}\sqrt{(s-b)(s-a)(s-b-c)(s-b-d)},$$

$$q = \sqrt{\frac{ab^2 - a^2b - ad^2 + bc^2}{b-a}} \qquad p = \sqrt{\frac{ab^2 - a^2b - ac^2 + bd^2}{b-a}},$$

Where $K = mh \qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c+d) \qquad m = \frac{a+b}{2}.$

مع تحياتى نجاح رجب

متطابقة براهماغوبتا *Brahmagupta*

$$(\text{أ}^2 + \text{ب}^2)(\text{ج}^2 + \text{د}^2) = (\text{أج} - \text{ب د})^2 + (\text{أ د} + \text{ب ج})^2$$

مع تحياتي نجاح رجب

حالة خاصة من معادلة الدرجة الرابعة

فى أى معادلة من الدرجة الرابعة على الصورة :

$\text{أ}\,\text{س}^4 + \text{ب}\,\text{س}^3 + \text{جـ}\,\text{س}^2 + \text{ء}\,\text{س} + \text{هـ} = 0$ ، إذا كان : $\boxed{\text{ب}\,\text{جـ}\,\text{ء} = \text{أ}\,\text{ء}^2 + \text{هـ}\,\text{ب}^2}$

فإن جذور هذه المعادلة هى :

$$\pm\sqrt{\frac{\text{ء}}{\text{ب}}}\ \text{ت} \quad ، \quad \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\dfrac{\text{ب}\left(\text{ء}\,\text{ب} - 4\,\text{أ}\,\text{هـ}\right)}{\text{ء}}}}{2\,\text{أ}}$$

من

إستنتاجاتى

مع تحياتى نجاح رجب

تحويل تسكرينهاوس Tschirnhaus

من خلال تحويل تسكرينهاوس يمكن إزالة الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ن}-1}$

ففي المعادلة :

$$\text{أ}_0\,\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_1\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{أ}_2\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \text{أ}_3\,\text{س}^{\text{ن}-3} + \ldots\ldots\ldots + \text{أ}_{\text{ن}} = 0$$

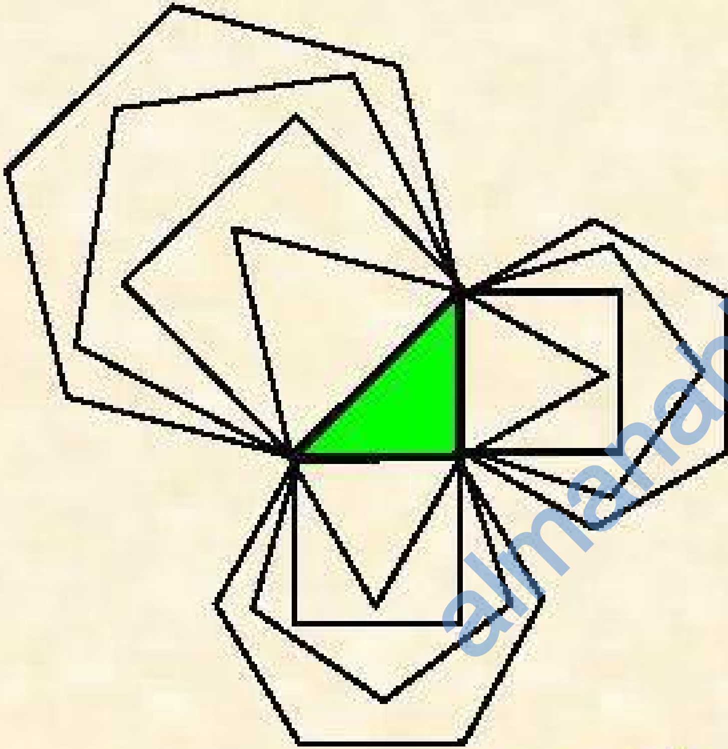
نستخدم التعويض :

$$\boxed{\text{س} = \text{ص} - \frac{\text{أ}_1}{\text{ن}\,\text{أ}_0}}$$

هذه الصيغة تسمى تحويل تسكرينهاوس Tschirnhaus

مع تحياتي نجاح رجب

تعميم نظرية فيثاغورث على الأشكال المنتظمة



" مساحة المضلع المنتظم المرسوم على وتـر المثلـث القائـم يساوى مجمـــوع مســـاحتى المضلعيـن المنتظميـن المـرسـوميـن على الضلعيـن الآخـــرين "

مع تحياتي نجاح رجب

قـــانون هـــام

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

مع تحياتى نجاح رجب

مجموع مقلوبات جذور كثيرة الحدود

يمكن الحصول على مقلوبات كثيرة الحدود على النحو التالى :

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{أ}_{\text{ن}-2}\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{أ}_{0} = 0$

كثيرة حدود من الدرجة ن حيث $\text{أ}_{\text{ن}} \neq 0$ ، جذورها : س_1 ، س_2 ، .... ، $\text{س}_{\text{ن}}$

فإن مجموع مقلوبات جذورها يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{\frac{1}{\text{س}_1} + \frac{1}{\text{س}_2} + \frac{1}{\text{س}_3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\text{س}_{\text{ن}}} = \frac{-\text{أ}_1}{\text{أ}_0}}$$

مع تحياتى نجاح رجب

إيجاد حلول معادلة الدرجة الثالثة بمعلومية أحد الحلول

إذا كانت : م ، ك ، ل هي حلول المعادلة : $\text{س}^{٣} + \text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{ج} = ٠$

وبفرض أن أحد الحلول معلوم وهو م ، ونريد معرفة الحلين الآخرين ك ، ل

$$\text{ك ، ل} = \frac{-(\text{م} + \text{أ}) \pm \sqrt{(\text{م} + \text{أ})^{٢} - ٤\left[\text{م}(\text{م} + \text{أ}) + \text{ب}\right]}}{٢}$$

يمكن استنتاج هذا القانون باستخدام القسمة المطولة

مع تحياتي نجاح رجب

تكوين معادلة الدرجة الثانية

يُمكن تكوين أى معادلة من الدرجة الثانية عن طريق الجذور معرفة جذورها

خلاصة القول

معادلة الدرجة الثانيه التى جذراها ك ، م تكون :

(س − ك) (س − م) = ٠

أو س^2 − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

مع تحياتى نجاح رجب

تكوين معادلة الدرجة الثالثة

يُمكن تكوين أى معادلة من الدرجة الثالثة عن طريق معرفة جذورها :

خلاصة القول

معادلة الدرجة الثالثة التى جذورها ل ، م ، ن تكون :

$$(س - ل)(س - م)(س - ن) = ٠$$

$س^٣$ − (مجموع الجذور) $س^٢$ + (حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى) س − حاصل ضرب الجذور = ٠

تكوين معادلة الدرجة الرابعة

يُمكن تكوين أى معادلة من الدرجة الرابعة عن طريق معرفة جذورها :

خلاصة القول

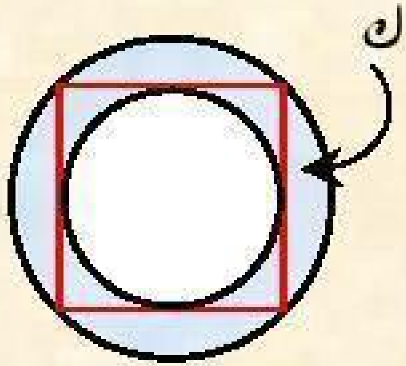
معادلة الدرجة الرابعة التى جذورها ل ، م ، ن ، هـ تكون :

(س − ل) (س − م) (س − ن) (س − هـ) = ٠ .

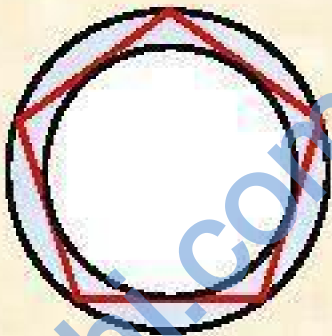
مع تحياتى نجاح رجب

مساحة المنطقة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز

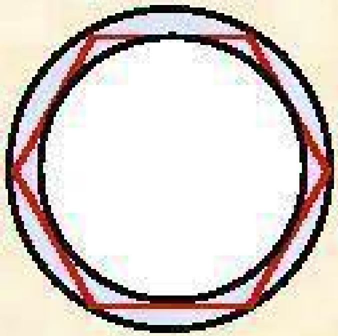
مساحة المنطقة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز الكبرى تمر برءوس مضلع منتظم طول ضلعه ل والصغرى تمسه من الداخل تساوى $\frac{1}{4}$ ط ل٢



مربع
فى شكل (١)



خماسى منتظم
فى شكل (٢)



سداسى منتظم
فى شكل (٣)

شكل (١): إذا كان طول ضلع المربع ٧ سم ⇐ ك = $\frac{1}{4}$ ط ل٢ = ٣٨,٥ سم٢

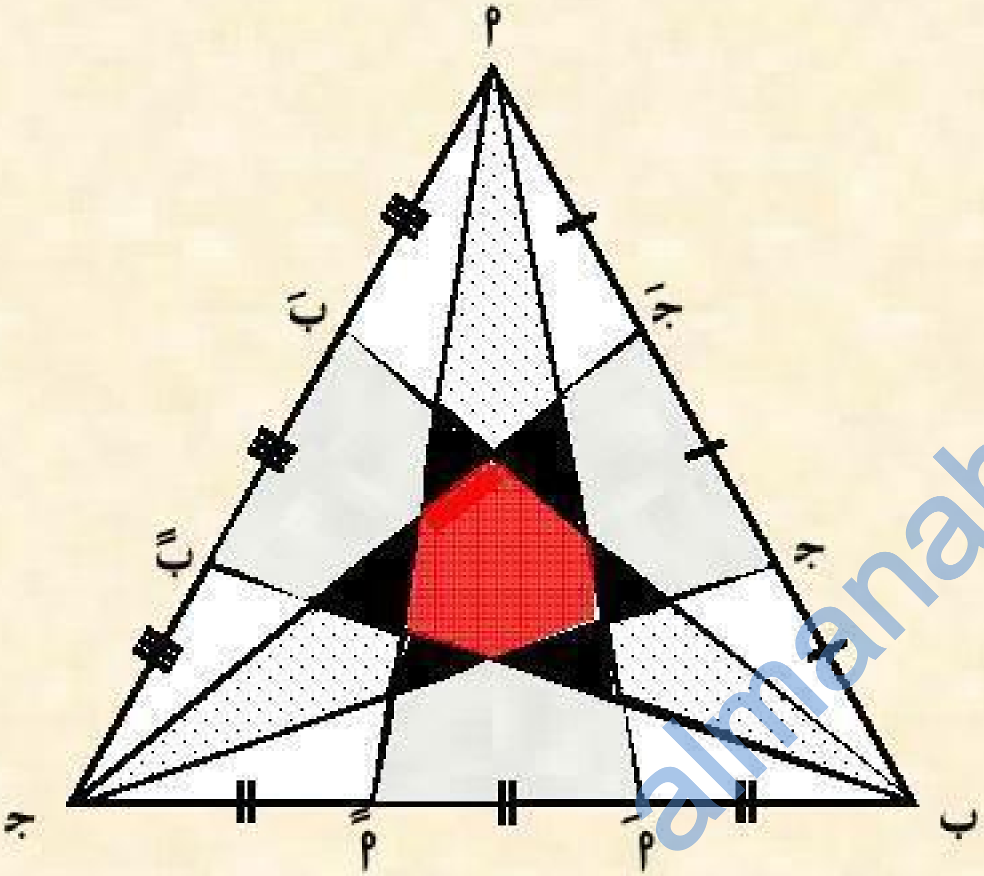
شكل (٢): إذا كان طول ضلع الخماسى المنتظم ٧ سم ⇐ ك = $\frac{1}{4}$ ط ل٢ = ٣٨,٥ سم٢

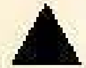
شكل (٣): إذا كان طول ضلع السداسى المنتظم ٧ سم ⇐ ك = $\frac{1}{4}$ ط ل٢ = ٣٨,٥ سم٢

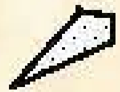
من إستنتاجاتى

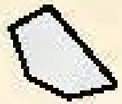
مع تحياتى نجاح رجب

نظريـــة ماريـــون Marion's Theorem

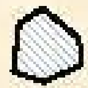


مساحة  = $\frac{١}{٧٠}$ مساحة المثلث أ ب ج

مساحة  = $\frac{١}{١٤}$ مساحة المثلث أ ب ج

مساحة  = $\frac{١١}{١٠٥}$ مساحة المثلث أ ب ج

مساحة  = $\frac{١}{٢١}$ مساحة المثلث أ ب ج

∴ مساحة  = $\frac{١}{١٠}$ مساحة المثلث أ ب ج

مع تحياتي نجاح رجب

نظريــة بتــولمى

إذا كان : أ + ب + جـ + ء = ط "حيث ط قياس نصف دائرة" فــإن :

جــا (أ + ب) جــا (ب + جـ) = جــا (ب + جـ) جــا (جـ + ء)

= جــا (جـ + ء) جــا (ء + أ)

= جــا (ء + أ) جــا (أ + ب)

= جــا أ جــا جـ + جــا ب جــا ء

مع تحياتي نجاح رجب

صيغة فارمشفارا Parameshvara's formula

هذه الصيغة تمكننا من إيجاد نصف قطر الدائرة **R** المارة برءوس الشكل الرباعى الدائرى الذى أطوال أضلاعه **a** ، **b** ، **c** ، **d** ونصف محيطه **s** ومساحته **K** .

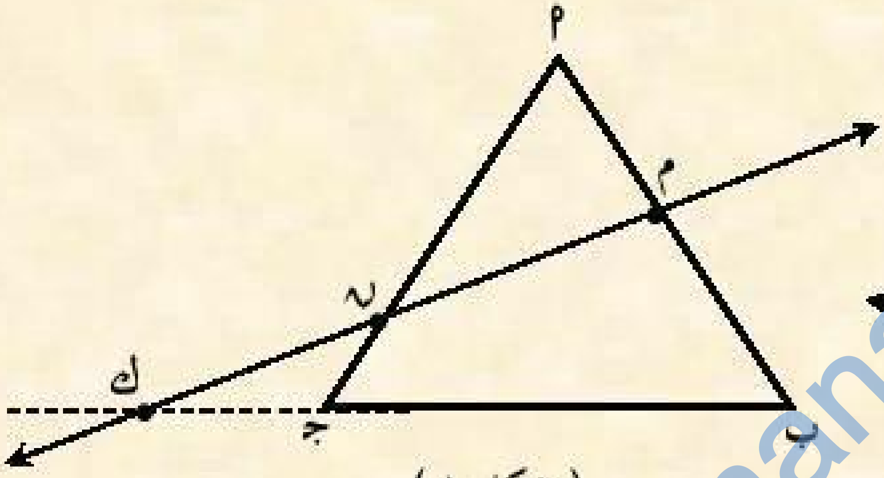
$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}=\frac{1}{4K}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)},$$

$$R=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}}.$$

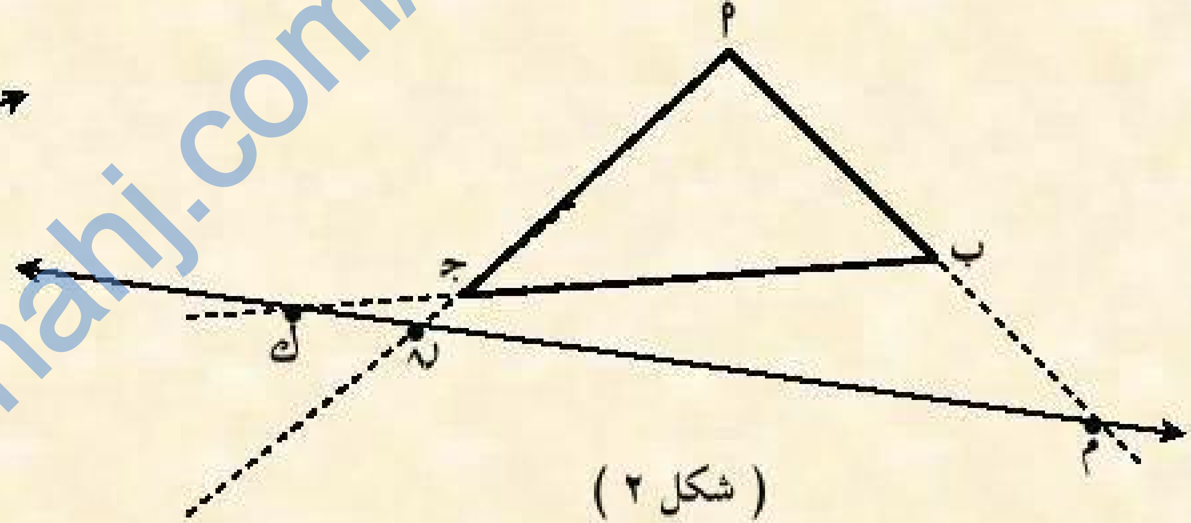
مع تحياتي نجاح رجب

نظـرية منيلــوس Menelaus' theorem

" إذا قطـع مستقيم المستقيمات الثلاثـة الحاملـة لأضلاع مثلث فإنه يقســم كـل ضلع من أضلاع المثلث من الداخـل أو من الخــارج إلى جزءين ، ويكون حاصل ضرب ثلاثة أجزاء منها غير متتالية ومأخـوذة فى ترتيـب دورى واحد يســاوى حاصـل ضــرب أطـوال الأجـزاء الثلاثـة الأخـرى . "



(شكل ١)



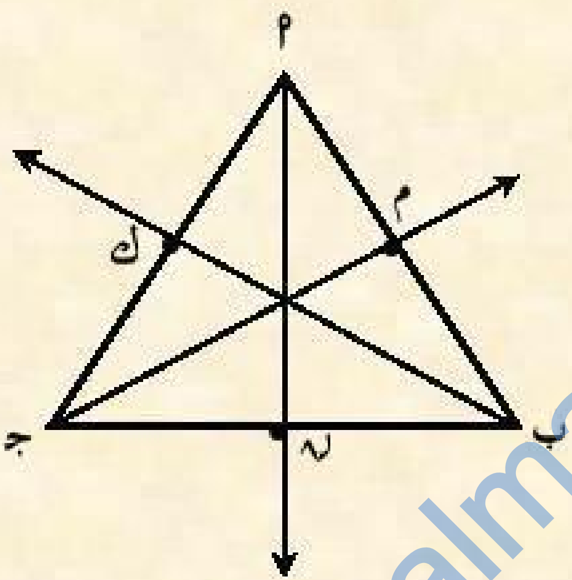
(شكل ٢)

أم × بك × جن = مب × كجـ × نأ ⇐ (أم / مب) × (بك / كجـ) × (جن / نأ) = ١

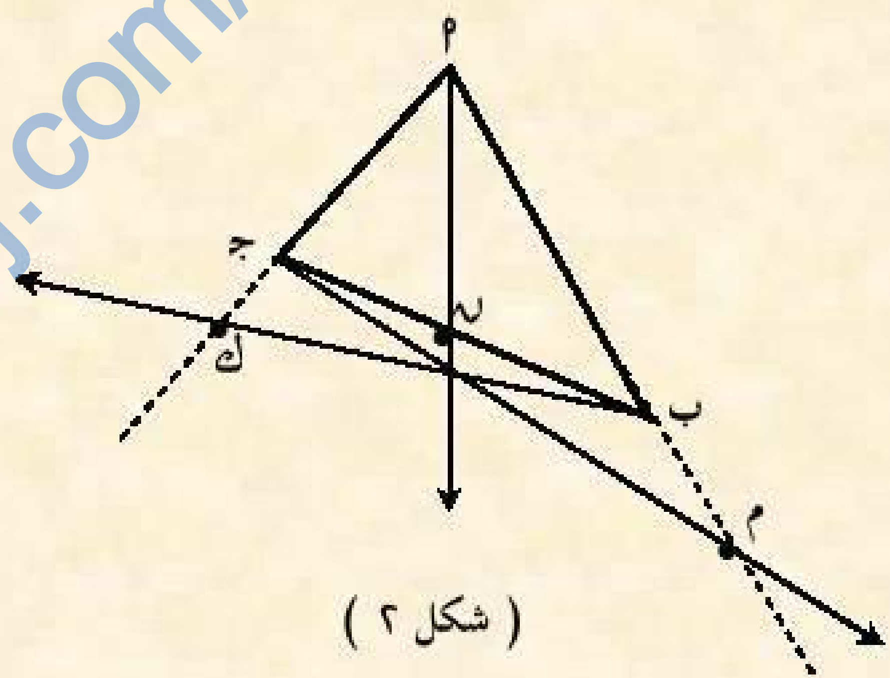
مع تحياتي نجاح رجب

Ceva's theorem نظرية سيفـا

" إذا رسمـت من رءوس أى مثلـث إلى أضلاعـه المقابلـة ثلاثـة أشعة متقاطعـة فـى نقطـة واحـدة فإنهـا تقسـم كـل ضلـع من أضلاع المثلـث مـن الـداخـل أو مـن الخـارج إلـى جزءيـن كـان حاصـل ضـرب أطـوال ثلاثـة أجـزاء منهـا غيـر متتاليـة ومـأخـوذة فـى ترتيـب دورى واحـد يسـاوى حاصـل ضـرب أطـوال الأجـزاء الثـلاثـة الأخـرى "



(شكل ١)



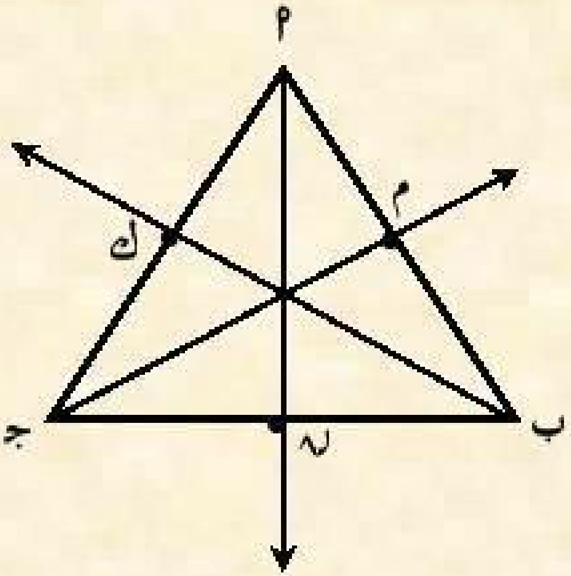
(شكل ٢)

ب ن × جـ ل × أ م = ن جـ × ل أ × م ب ⇐

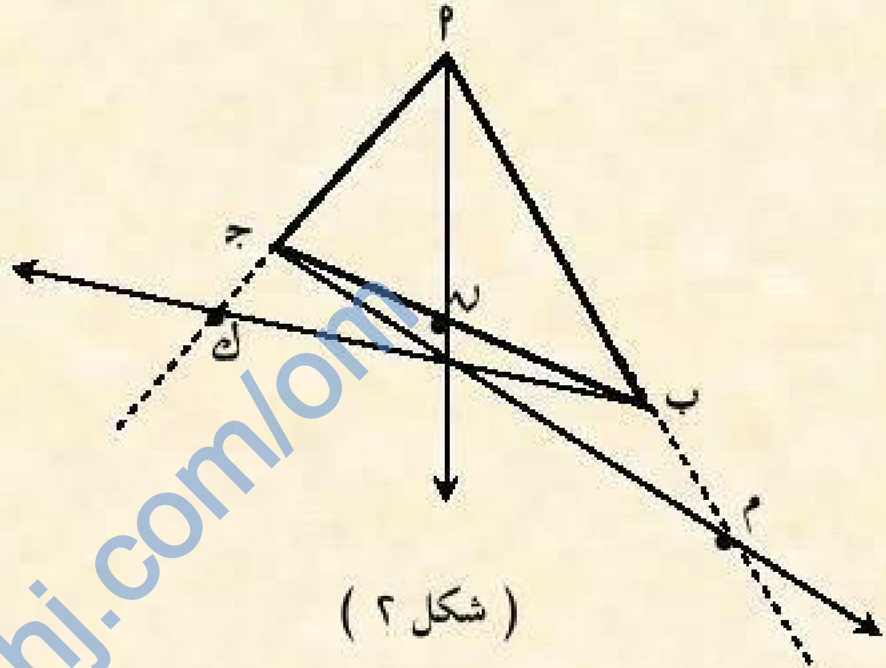
$$\frac{\text{ب ن}}{\text{ن جـ}} \times \frac{\text{جـ ل}}{\text{ل أ}} \times \frac{\text{أ م}}{\text{م ب}} = ١$$

مع تحياتي نجاح رجب

نظرية سيفا المثلثية



(شكل ١)



(شكل ٢)

جـا ب جـ م × جـا جـ أ ن × جـا أ ب ك = جـا أ جـ م × جـا ب أ ن × جـا جـ ب ك

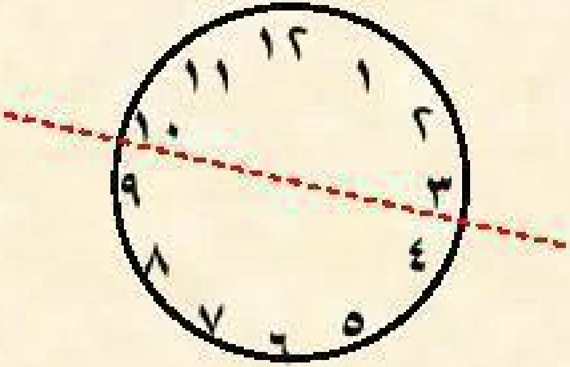
أو بطريقة أخرى

$$\frac{\text{جا ب جـ م}}{\text{جا أ جـ م}} \times \frac{\text{جا جـ أ ن}}{\text{جا ب أ ن}} \times \frac{\text{جا أ ب ك}}{\text{جا جـ ب ك}} = ١$$

مع تحياتي نجاح رجب

مسألة تقسيم أعداد الساعة إلى جزأين متساويين

من المعروف أن أعداد الساعة تبدأ من ١ وتنتهى بـ ١٢
وعند تقسيم هذه الأعداد بحيث يكون مجموع الجزأين متساويين
يكون :



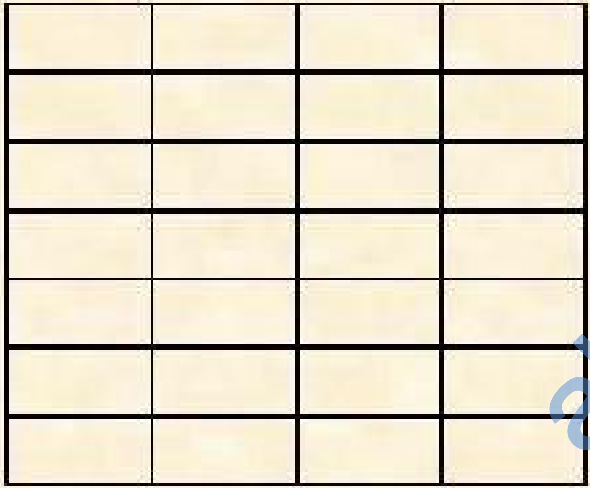
مجموع الجزأ الأول = ٣ + ٢ + ١ + ١٢ + ١١ + ١٠ = ٣٩
مجموع الجزأ الثانى = ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ = ٣٩

مع تحياتى نجاح رجب

طريقة حساب عدد المستطيلات عند تقسيم مستطيل

بفرض أن عدد الصفوف هو م ، عدد الأعمدة هو ن ، فيكون :

$$\text{عدد المستطيلات الناتجة من التقسيم} = \frac{\text{م}(\text{م} + ١) \times \text{ن}(\text{ن} + ١)}{٤}$$



ففى الشكل المقابل نجد أن : م = ٧ ، ن = ٤

$$\text{عدد المستطيلات فى الشكل} = \frac{٧ \times ٨ \times ٤ \times ٥}{٤}$$

= ٢٨٠ مستطيل

مع تحياتي نجاح رجب

الدوال المثلثية لثلاثة أمثال قياس الزاوية

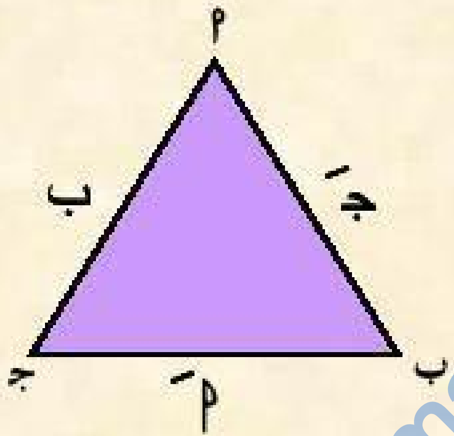
جا ٣س = ٣ جا س − ٤ جا^{٤} س ، جتا ٣س = ٤ جتا^{٤} س − ٣ جتا س

$$\text{ظا ٣س} = \frac{\text{٣ظا س} - \text{ظا}^{٣}\text{س}}{١ - \text{٣ظا}^{٢}\text{س}} \quad ، \quad \text{ظتا ٣س} = \frac{\text{٣ظتا س} - \text{ظتا}^{٣}\text{س}}{١ - \text{٣ظتا}^{٢}\text{س}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

Newton's Formulas صيغ نيوتـــن

بفرض أن أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ هى أ َ ، ب َ ، جـ َ فـإن :



❶ $$\frac{\text{جـ}' + \text{ب}'}{\text{أ}'} = \frac{\text{جتا}\ \frac{1}{2}\,(\text{ب} - \text{جـ})}{\text{جا}\ \frac{1}{2}\,(\text{أ})}$$

❷ $$\frac{\text{جـ}' + \text{أ}'}{\text{ب}'} = \frac{\text{جتا}\ \frac{1}{2}\,(\text{جـ} - \text{أ})}{\text{جا}\ \frac{1}{2}\,(\text{ب})}$$

❸ $$\frac{\text{أ}' + \text{ب}'}{\text{جـ}'} = \frac{\text{جتا}\ \frac{1}{2}\,(\text{أ} - \text{ب})}{\text{جا}\ \frac{1}{2}\,(\text{جـ})}$$

مع تحياتى نجاح رجب

الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي ك

إذا أردنا معرفة الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي ك فإننا سنحاول حل المعادلة : $\text{س}^{٣} = \text{ك}$ ، فيكون أول حل مباشر $\sqrt[٣]{\text{ك}}$ ويمكن استنتاج الجذرين الآخرين على النحو التالي :

لمعرفة الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي ك :

$$\sqrt[٣]{\text{ك}} \quad ، \quad \sqrt[٣]{\text{ك}}\,\omega \quad ، \quad \sqrt[٣]{\text{ك}}\,\omega^{٢}$$

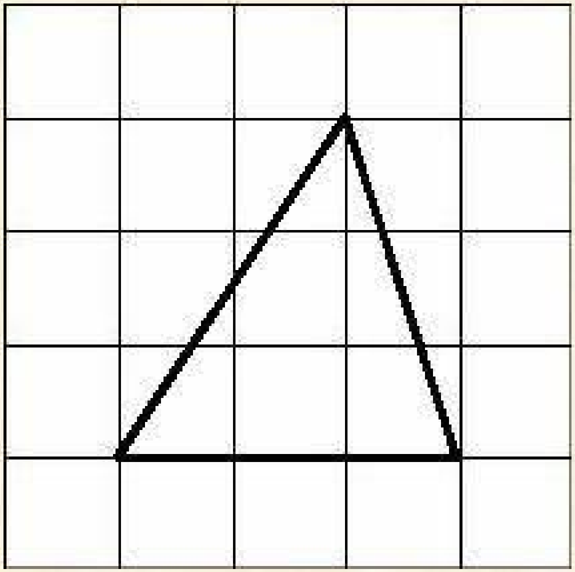
حيث :

$$\omega = \frac{١}{٢}\left(-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}\right) \quad ، \quad \omega^{٢} = \frac{١}{٢}\left(-١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}\right)$$

مع تحياتي نجاح رجب

قاعدة بيك لحساب مساحة أى منطقة مضلعة

Pick's theorem



$$\Delta = ن + \frac{ك}{٢} - ١$$

حيث Δ : مساحة المضلع

، ن : عدد النقط الداخلية التى تقع داخل المضلع

، ك : عدد النقط المحيطة التى تقع على خط محيط المضلع وتسمى بالنقط الحدودية

ففى الشكل المقابل : ن = ٣ ، ك = ٥

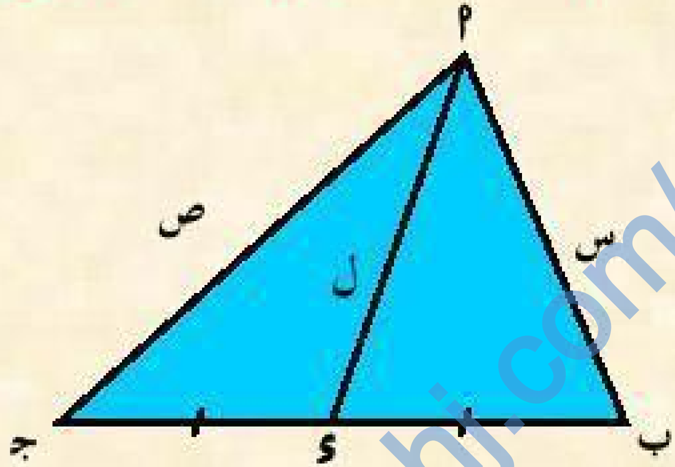
$\therefore \Delta = ن + \frac{ك}{٢} - ١ = ٣ + \frac{٥}{٢} - ١ = ٤,٥$ وحدة مربعة

ملاحظة مهمة :

لاتستخدم قاعدة بيك إلا إذا كانت جميع رءوس المضلع هى نقاط من الشبكة التربيعية

مع تحياتى نجاح رجب

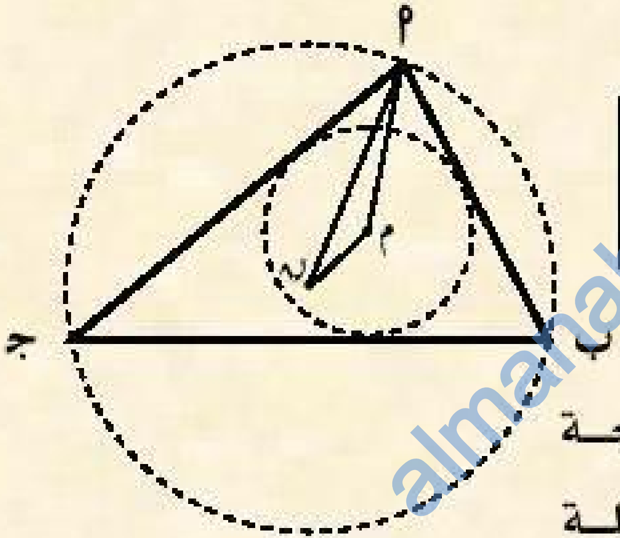
حساب مساحة المثلث بدلالة طولى ضلعين ومتوسط



$$\text{مساحة المثلث} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\sqrt{\text{٢}\,\text{س}^{\text{٢}}\text{ص}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٤}} - \text{ص}^{\text{٤}} + \text{٨}\,\text{س}^{\text{٢}}\text{ل}^{\text{٢}} + \text{٨}\,\text{ص}^{\text{٢}}\text{ل}^{\text{٢}} - \text{١٦}\,\text{ل}^{\text{٤}}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

قانون المسافة بين مركزي الدائرتين الداخلة والخارجة للمثلث



$$م\,ن = \sqrt{نق^{٢} - ٢\,نق\,نع}$$

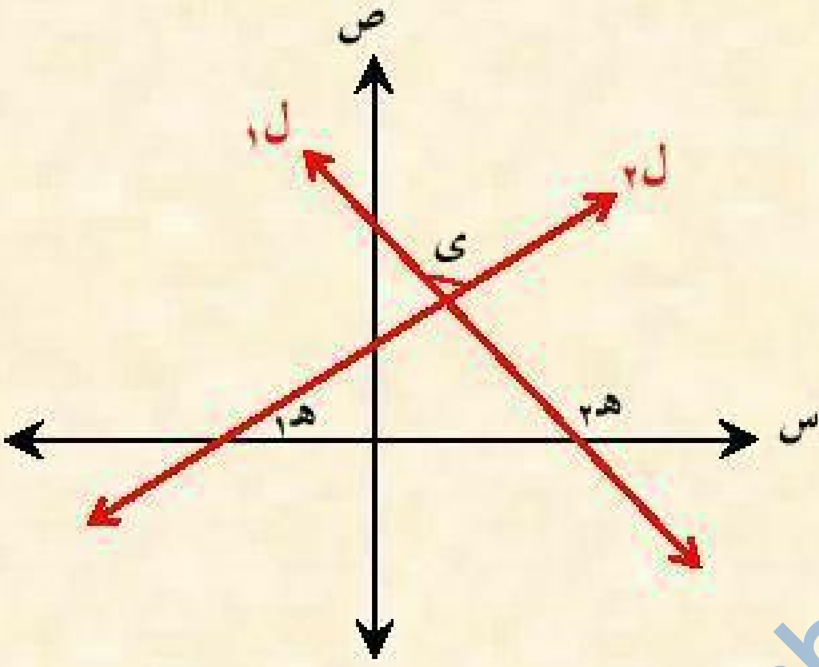
حيث

نق : نصف قطر الدائرة الخارجة

نع : نصف قطر الدائرة الداخلة

مع تحياتي نجاح رجب

قانون قياس الزاوية بين مستقيمين



بفرض أن المستقيمان : ل١ ، ل٢ متقاطعان

والزاوية بينهما هى ى فإذا كان :

م١ : هو ميل المستقيم الأول

م٢ : هو ميل المستقيم الثانى

فإن ى تتعين من العلاقة :

$$\text{ظا ى} = \pm \left(\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\,\text{م}_2} \right)$$

حيث : م١ = ظا هـ١ ، م٢ = ظا هـ٢

طريقة أخرى لإيجاد الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان المستقيمان معادلتيهما :

ل١ : $\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{ج}_1 = 0$ ، ل٢ : $\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{ج}_2 = 0$

$$\text{جتا ى} = \frac{\left| \text{أ}_1\,\text{أ}_2 + \text{ب}_1\,\text{ب}_2 \right|}{\sqrt{\text{أ}_1^2 + \text{ب}_1^2} \times \sqrt{\text{أ}_2^2 + \text{ب}_2^2}}$$

مع تحياتى نجاح رجب

النقـط المتسـامتـة Collinear Point

يقصد **بالنقـط المتسـامتـة** تلك النقط التى تقـع على استقامـة واحـدة فالنقـط : ﻫ(س ${}_1$ ، ص ${}_1$) ، ب(س ${}_2$ ، ص ${}_2$) ، ج(س ${}_3$ ، ص ${}_3$) تكـون على استقـامـة واحـدة إذا تحققـت إحـدى الشـروط الآتيـة :

الحـالـة الأولى

$$\begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & 1 \\ س_2 & ص_2 & 1 \\ س_3 & ص_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحـالـة الثانيـه

نـوجـد الأبعـاد الثلاثـة ﻫب ، ب ج ، ج ﻫ باستخدام قانون البعد بين نقطتين ثـم نجـد أن مجموع أصغر بُعـدين يُسـاوى البُعـد الأكبـر

الحـالـة الثالثـة

نُـوجـد ميلى المستقيمين $\overleftrightarrow{ﻫب}$ ، $\overleftrightarrow{بج}$ ولمـا كـانـت نقطـة ب مشتركة فيكـون النقـط : ﻫ ، ب ، ج تقـع على استقـامـة واحـدة

الحـالـة الرابعـة

بتمثيل الثلاث نقـاط على الشبكة التربيعيـة نجد أنهم على استقامة واحدة

الحـالـة الخامسـة

نُـوجـد معـادلـة المستقيـم المـار بأى نقطتيـن ثـم نعـوض بالنقطـة الثالثـة فى معادلة المستقيم نجـد أن هذه النقطـة تحقق هذا المستقيـم

الحـالـة السادسة

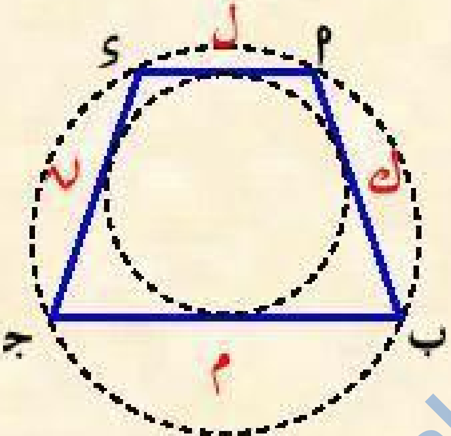
نُـوجد قياس زاويـة ﻫب ج يجـب أن تسـاوى 180° [زاوية مستقيمة]

الحـالـة السابعـة

إذا كـانـت هـذه النقـط متسـاويـة البُعـد عـن مستقيـم واحـد وبجهة واحـدة بالنسبـة لـه فهـي علـى استقامـة واحـدة .

مع تحياتى نجاح رجب

مساحة الشكل الرباعى الذى يمكن رسم دائرة تمسه من الداخل وأخرى تمر برؤوسه



بفرض أن أطوال أضلاع الشكل الرباعى هى : ك ، م ، ن ، ل

مساحة الشكل أ ب جـ د = $\sqrt{ك\ م\ ن\ ل}$

مع تحياتى نجاح رجب

الصـــورة العــامــة للمعــادلــة الإحداثية للدائــرة

الصـــورة العــامــة للمعــادلــة الإحداثية للدائــرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر

حيـث :

مركــز الدائرة م = (- ل ، - ك)

نصــف قطــر الدائرة نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$

مع تحياتي نجاح رجب

العلاقة بين ارتفاعات المثلث ونصف قطر الدائرة نق التى تمسه من الداخل

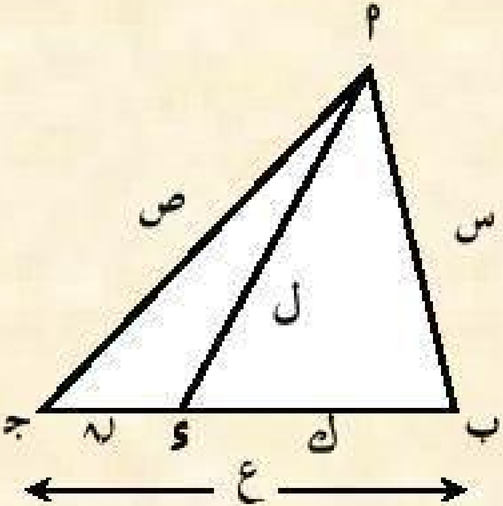
بفرض أن ارتفاعات المثلث ﺃ ب ﺟ هى : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$

، نق نصف قطر الدائرة الداخلة للمثلث ﺃ ب ﺟ

$$\frac{١}{نق} = \frac{١}{ع_١} + \frac{١}{ع_٢} + \frac{١}{ع_٣}$$

مع تحياتى نجاح رجب

نظرية ستيوارت Stewart's theorem



س^{٢} ن + ص^{٢} ك = ع (ل^{٢} + ك ن)

وبصيغة أخرى :

ع ل^{٢} = س^{٢} ن + ص^{٢} ك − ع ك ن

وفى الحالة التى يكون فيها د منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

أى أن : ك = ن نجد أن :

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٢ ل^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ع^{٢} (نظرية أبولونيوس)

مع تحياتى نجاح رجب

نصـــف قطـــر الدائرة الداخلة للمثلث

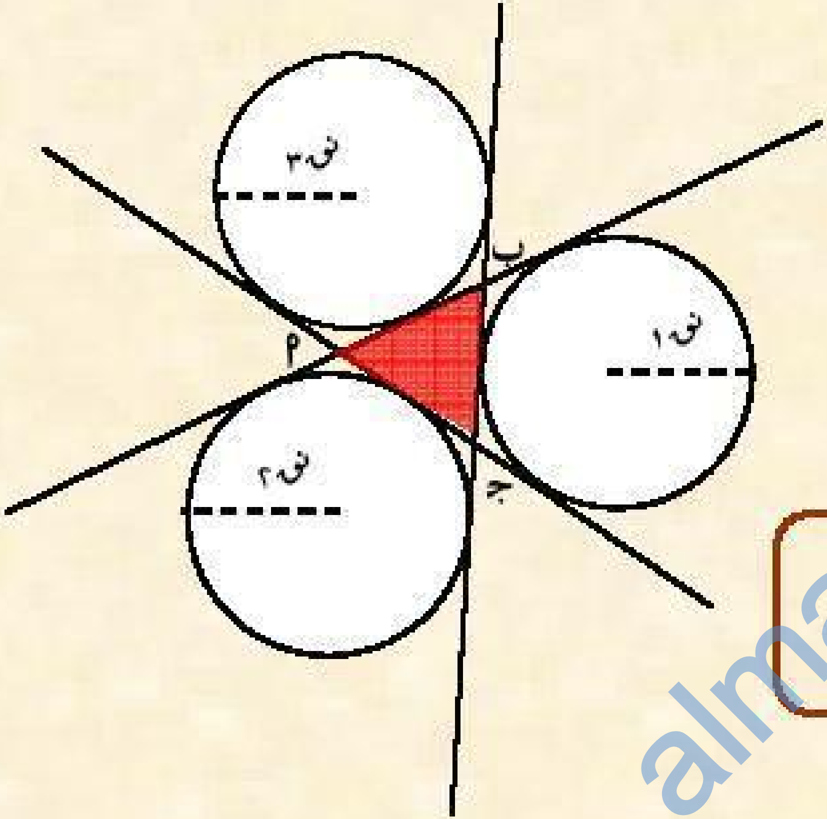
بفرض أن r نصف قطر الدائرة التى تمس المثلث الذى أطوال أضلاعه a ، b ، c وأن R نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن :

$$r = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}}$$

$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$$

مع تحياتى نجاح رجب

أنصاف أقطار الدوائر الخارجة عن المثلث والمماسة لأضلاعه



بفرض أن

نق١ : نصف قطر الدائرة التى تمس أَ وامتداد بَ ، جَ

نق٢ : نصف قطر الدائرة التى تمس بَ وامتداد أَ ، جَ

نق٣ : نصف قطر الدائرة التى تمس جَ وامتداد أَ ، بَ

Δ : هى مساحة المثلث أ ب جـ ، ح نصف محيطه

$$\text{نق}_1 = \frac{\Delta}{\text{ح} - \text{أَ}} \quad ، \quad \text{نق}_2 = \frac{\Delta}{\text{ح} - \text{بَ}} \quad ، \quad \text{نق}_3 = \frac{\Delta}{\text{ح} - \text{جَ}}$$

قانون مهم

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

مع تحياتي نجاح رجب

94 *DeMoivre's Theorem* نظرية ديموافر

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \; .$$

مع تمنياتي بالنجاح رجب

Useful formulae صيغة مفيدة

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}$$

مع تحياتي نجاح رجب

العلاقة بين أنصاف أقطار الدوائر التى تمس المثلث

بفـــرض أن :

نق : نصف قطـــر الدائرة الداخلـــة للمثلـــث أ ب جـ

نق١ : نصف قطـــر الدائرة التى تمس $\overline{\text{أ}}$ وامتـــداد : $\overline{\text{ب}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$

نق٢ : نصف قطـــر الدائرة التى تمس $\overline{\text{ب}}$ وامتـــداد : $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$

نق٣ : نصف قطـــر الدائرة التى تمس $\overline{\text{جـ}}$ وامتـــداد : $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$

$$\frac{١}{\text{نق}_١} + \frac{١}{\text{نق}_٢} + \frac{١}{\text{نق}_٣} = \frac{١}{\text{نق}}$$

مع تحياتى نجاح رجب

ارتفاعات المثلث بدلالة أطوال أضلاعه

بفرض أن أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ هي : أَ ، بَ ، جـَ

وأن ح نصف محيطه وارتفاعاته هي : $ع_{أ}$ ، $ع_{ب}$ ، $ع_{جـ}$

$$ع_{أ} = \frac{2\sqrt{ح\,(ح - أَ)\,(ح - بَ)\,(ح - جـَ)}}{أَ}$$

حيث : $ح = \frac{1}{2}\,(أَ + بَ + جـَ)$

بالمثل يمكن إيجاد كل من : $ع_{ب}$ ، $ع_{جـ}$

مع تحياتي نجاح رجب

النسب المثلثية للزوايا الفاصلة بين الأرباع

الزاوية	النسب المثلثية						
	جا	جتا	ظا	ظتا	قا	قتا	التقدير الدائرى
٠°	٠	١	٠	∞	١	∞	٠
٩٠°	١	٠	∞	٠	∞	١	$\frac{ط}{٢}$
١٨٠°	٠	١−	٠	∞	١−	∞	ط
٢٧٠°	١−	٠	∞	٠	∞	١−	$\frac{٣ ط}{٢}$
٣٦٠°	٠	١	٠	∞	١	∞	٢ط

قواطع مجاميع حدود محدودة

$$\sec(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\sec\alpha\sec\beta\sec\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\gamma-\tan\beta\tan\gamma}$$

مع تحياتي نجاح رجب

أقطـار الشكــل الربـاعى الدائـرى Diagonals

بفـرض أن أطـوال أضـلاع الشكـل الربـاعـى الـدائــرى هــى :
a ، b ، c ، d وأن أطـوال أقطـاره Diagonals هى : p ، q

$$p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \qquad q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+dc)}{ad+bc}}.$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+cb}{ab+cd}$$

For the sum of the diagonals we have the inequality

$$p+q \geq 2\sqrt{ac+bd}.$$

مع تحياتى نجاح رجب