جميع القوانين المستخدمة في الدوال الأسية واللوغاريتمية والدوال الدائرية والمتطابقات والعد والاحتمالات

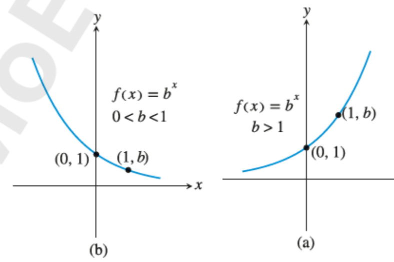
المزيد من الملفات بحسب المستوى الحادي عشر العلمي والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
5	تحميل كتاب الطالب

الوحدة 5 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

1

دالة أساسية **الدوال الأسيّة** $f(x) = b^x$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- عندما $b > 1$ (انظر الشكل 5.1.1a)، فإن
  - f دالة متزايدة
  - $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- عندما $0 < b < 1$ (انظر الشكل 5.1.1b)، فإن
  - f دالة متناقصة
  - $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



الشكل 5.1.1 التمثيل البياني للدالة $f(x) = b^x$
حيث $b > 1$(a) و $0 < b < 1$ (b)

2

نموذج النمو الأسي

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$a > 0, b > 1, b = 1 + r$

3

نموذج الاضمحلال الأسي

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$a >$ ... $= 1 - r$

4

صيغة الفائدة المركبة هي نموذج أسي، وتُكتب كما يلي:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

5

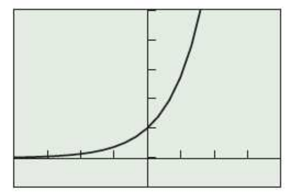
الفائدة المركبة المتواصلة ويتم حسابها بالصيغة.

$$A = Pe^{rt}$$

6

دالة أساسية **الدالة الأسيّة الطبيعية** $f(x) = e^x$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة لكل قيم x
- لا يوجد تناظر لأنها ليست دالة فردية ولا زوجية
- ليس لها قيم قصوى محلية
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$



$[-4, 4]$ في $[-1, 5]$

الشكل 5.1.2

7

$\log_b x = y$، إذا وفقط إذا كانت $b^y = x$،

8

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^y = y$
- $b^{\log_b x} = x$

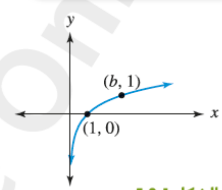
9

- $\ln 1 = 0$،
- $\ln e = 1$،
- $\ln e^y = y$
- $e^{\ln x} = x$،

10

دالة أساسية **الدالة اللوغاريتمية** $f(x) = \log_b x$، $b > 1$

- المجال: $]0, \infty[$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية أو فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي: $x = 0$
- ليس لها خطوط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to\infty} \log_b x = \infty$

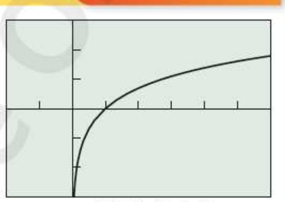


الشكل 5.3.1

11

دالة أساسية **دالة اللوغاريتم الطبيعي** $f(x) = \ln x$

- المجال: $]0, \infty[$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي: $x = 0$
- ليس لها خطوط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$



$[-2, 6]$ في $[-3, 3]$

الشكل 5.3.2

12

قاعدة الضرب: $\log_b(RS) = \log_b R + \log_b S$

13

قاعدة القسمة: $\log_b \frac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$

14

قاعدة القوة: $\log_b R^c = c \log_b R$

15

صيغة تغيير الأساس للوغاريتمات

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

16

خاصية المساواة للمعادلات الأسيّة

$b^u = b^v$ إذا وفقط إذا كان $u = v$.

17

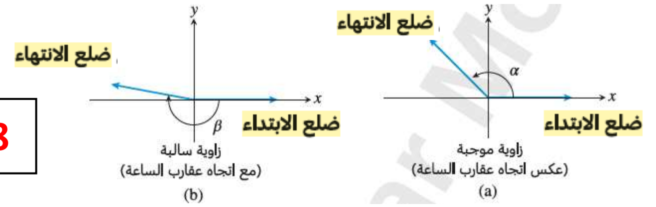
خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية

$\log_b u = \log_b v$ إذا وفقط إذا كان $u = v$.

الوحدة 6 الدوال الدائرية وخصائصها

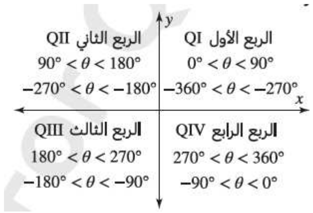
1

الوضع القياسي للزاوية



2

الأرباع الأربعة للمستوي الإحداثي الديكارتي. تعتمد الأرقام الرومانية لتسمية الأرباع.

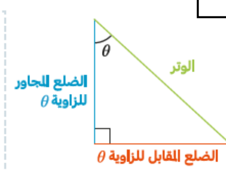


3

زوايا متطارفة

$$\alpha = \theta \pm k \times 360°$$

4



الظل	جيب التمام	الجيب
$\tan\theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$\cos\theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$	$\sin\theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$
ظل تمام	**القاطع**	**قاطع تمام**
$\cot\theta = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$	$\sec\theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$\csc\theta = \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل}}$

5

تعريف النسب المثلثية لأي زاوية

لتكن θ أي زاوية في الوضع القياسي ولتكن $P(x, y)$ أي نقطة على ضلع الانتهاء للزاوية (عدا نقطة الأصل). لتكن r المسافة بين $P(x, y)$ ونقطة الأصل، أي $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (انظر الشكل 6.1.9). إذن،

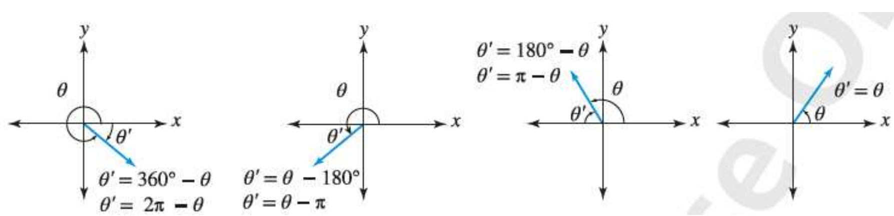
$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\csc\theta = \frac{r}{y}$ $(y \neq 0)$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$ $(x \neq 0)$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

6

الزاوية المرجعية والمثلث المرجعي



7

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة واحدة وبالتالي فإن معادلتها هي $x^2 + y^2 = 1$

8

تعريف النسب المثلثية للزاوية في دائرة الوحدة

لتكن النقطة $P(x, y)$ نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية θ مع دائرة الوحدة. إذن،

$\sin\theta = y$ $\quad$ $\csc\theta = \frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$

$\cos\theta = x$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

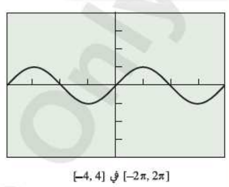
إذن، يمر ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي بالنقطة $(\cos\theta, \sin\theta)$ الواقعة على دائرة

9

تُسمى الزاوية في الوضع القياسي التي يقع ضلع انتهائها على أحد المحورين x أو y، **زاوية ربعية**.

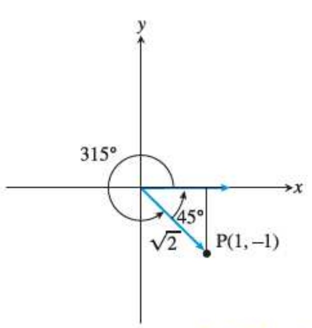
10

دالة أساسية دالة الجيب $f(x) = \sin x$



الشكل 6.3.1

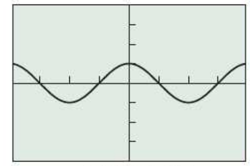
- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول نقطة الأصل، دالة فردية
- لها قيمة عظمى هي 1
- لها قيمة صغرى هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- الدورة: 2π
- السعة: 1
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} \sin x$ و $\lim_{x\to\infty} \sin x$ غير موجودتين. (تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين -1 و 1 ولا تقترب من أي نهاية).



الشكل 6.1.12 الزاوية بقياس °315 في الوضع القياسي تحدد مثلثًا مرجعيًا هو المثلث °90–°45–°45

11

دالة أساسية **دالة جيب التمام** $f(x) = \cos x$


$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-4, 4]$

الشكل 6.3.2

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها.
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول المحور y، دالة زوجية
- لها قيمة عظمى هي 1
- لها قيمة صغرى هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ و $\lim_{x \to \infty} \cos x$ غير موجودتين.
(تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين 1 و -1 ولا تقترب من أي نهاية).

12

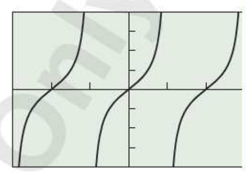
خصائص الدوال الدورية

لكل دالة معرّفة على الشكل $y = a \sin(bx)$ أو $y = a \cos(bx)$

- السعة $= |a|$
- الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$
- التردد $= \frac{|b|}{2\pi}$

13

دالة أساسية **دالة الظل** $f(x) = \tan x$


$\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ في $[-4, 4]$

الشكل 6.3.5

- المجال: كل الأعداد الحقيقية ما عدا المضاعفات الفردية للعدد $\frac{\pi}{2}$
- المدى: $]-\infty, \infty[$
- متصلة في مجالها
- متزايدة في كل فترة في مجالها
- متناظرة عبر نقطة الأصل، دالة فردية
- ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية
- ليس لها خط تقارب أفقي
- خط تقارب رأسي: $x = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ لكل الأعداد الصحيحة الفردية k
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \tan x$ و $\lim_{x \to \infty} \tan x$ غير موجودتين.
(تتراوح قيم الدالة بشكل متواصل بين $-\infty$ و ∞ ولا تقترب من أي نهاية).

14

خصائص الدوال الدورية

بشكل عام، للتمثيل البياني للدوال $y = a \sin(b(x - h)) + k$
و $y = a \cos(b(x - h)) + k$، $(a \neq 0$ و $b \neq 0)$ الخصائص التالية:

- السعة $= |a|$
- الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$
- التردد $= \frac{|b|}{2\pi}$

عند المقارنة بالتمثيل البياني للدالتين $y = a \sin(bx)$ و $y = a \cos(bx)$ يمكن إضافة

الخصائص التالية:

إزاحة رأسية تساوي k وإزاحة الطور تساوي h.

المتطابقات المثلثية الأساسية 1

متطابقات المقلوب

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

متطابقات ناتج القسمة

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

متطابقات فيثاغورس 2

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين 3

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

متطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية 4

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\csc(-x) = -\csc x \qquad \sec(-x) = \sec x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

متطابقات جيب التمام للفرق والمجموع 5

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

متطابقات الجيب للفرق والمجموع 6

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

7 متطابقتي الظل للفرق والمجموع

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}$$

$$\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}$$

8 متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u$$

$$\cos 2u = \begin{cases} \cos^2 u-\sin^2 u \\ 2\cos^2 u-1 \\ 1-2\sin^2 u \end{cases}$$

$$\tan 2u = \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$$

9 متطابقات تبسيط القوى

$$\sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1-\cos 2u}{1+\cos 2u}$$

10 متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$

1

مبدأ الضرب في العد

إذا كانت P عملية تتم بسلسلة من المراحل: $S_1, S_2, \ldots, S_n$

S_1 تتم من خلال r_1 طريقة مختلفة
S_2 تتم من خلال r_2 طريقة مختلفة
$\vdots$
S_n تتم من خلال r_n طريقة مختلفة

فإن عدد الطرق التي يمكن بها إنجاز العملية P هي:

$$r_1 \times r_2 \times \ldots \times r_n$$

2

مضروب العدد

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن **مضروب** n ويُرمز له بالرمز $n!$ يمثّل عملية الضرب:

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots \times 2 \times 1$$

ونعرّف $0! = 1$

3

ترتيب n من العناصر المتمايزة

إذا كان n هو عدد عناصر إحدى المجموعات، فإن تلك العناصر يمكن ترتيبها بـ $n!$ طريقة مختلفة.

4

متطابقات المضروب الأساسية

لأي عدد صحيح $n \geq 1$، $n! = n(n-1)!$

لأي عدد صحيح $n \geq 0$، $(n+1)! = (n+1)n!$

5

تباديل مجموعة مكوّنة من n عنصرًا

عدد تباديل n من العناصر المتمايزة هو $n!$

6

قاعدة تباديل العناصر غير المتمايزة

إذا تضمّنت المجموعة: n_1 عنصرًا من النوع الأول

n_2 عنصرًا من النوع الثاني

n_k عنصرًا من النوع k

حيث: $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = n$

يكون عدد التباديل المتمايزة

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots\ldots \times n_k!}$$

قاعدة التباديل 7

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots\ (n-r+1)$$

إذا كان $r > n$ ، فإن $_nP_r = 0$

قاعدة التوافيق 8

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ ,\ 0 \le r \le n$$

إذا كان $r > n$، فإن $_nC_r = 0$

تناظر التوافيق 9

$_nC_r = {}_nC_{n-r}$ وذلك لأي عدد صحيح موجب n.

قاعدة عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها n 10

عدد المجموعات الجزئية لمجموعة من n عنصرًا هو 2^n

بما في ذلك المجموعة نفسها والمجموعة الخالية $\varnothing$.

معاملات ذات الحدين 11

المعاملات التي تظهر في مفكوك $(a+b)^n$ هي قيم $_nC_r$ حيث $r = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$.

في بعض الأحيان يُستخدم الرمز $\binom{n}{r}$ عوضًا عن $_nC_r$ خصوصًا لمعاملات ذات الحدين.

الصيغة الارتدادية لمثلث باسكال 12

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

أو

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

نظرية ذات الحدين 13

لكل عدد صحيح موجب n،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

حيث

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

14

تعريف احتمال الحدث

احتمال الحدث E هو القيمة التي يقترب منها التكرار النسبي عند تكرار التجربة عددًا كبيرًا من المرات.

15

احتمال الحدث (النواتج التي لها إمكانية الحدوث نفسها)

إذا كان E حدثًا في فضاء عيّنة S منته غير خالٍ، يشتمل على نواتج لها نفس إمكانية الحدوث، يمكننا نمذجة احتمال الحدث E باستعمال القاعدة التالية:

$$P(E) = \frac{\text{E عدد النواتج في}}{\text{S عدد النواتج في}}$$

16

تعريف دالة الاحتمال

دالة الاحتمال هي دالة P تحدّد لكل ناتج في فضاء عيّنة ما S قيمة عددية وفق الشروط التالية:

1. $0 \le P(E) \le 1$ لكل ناتج E
2. مجموع الاحتمالات لكل نواتج فضاء العيّنة S هو 1
3. $P(\varnothing) = 0$
4. $P(S) = 1$

17

احتمال الحدث (قاعدة عامة)

إذا كان S فضاء عيّنة منته غير خالٍ، وكان احتمال كل ناتج فيه تحدّده دالة احتمال P، وكان E أي حدث في S، فإن احتمال الحدث E يساوي مجموع احتمالات النواتج في E.

18

الحدثان المتنافيان

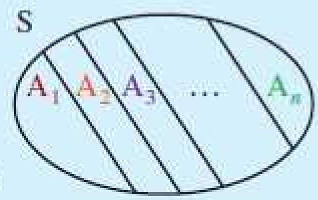
يُسمى الحدثان A و B من فضاء عيّنة S حدثين متنافيين إذا كان $A \cap B = \varnothing$ ، أي لا يوجد بينهما أي ناتج مشترك، ويكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

19 الحوادث المتنافية والشاملة

إذا كانت $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ حوادث من فضاء العيّنة (S)، فإنها تكون متنافية وشاملة إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان الآتيان:



1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = S$ (حوادث شاملة)
2. $A_r \cap A_k = \varnothing$ (حوادث متنافية)

لكل قيم k, r من المجموعة $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ حيث $r \neq k$.

وعليه يكون $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

20 مبدأ عام في حساب الاحتمالات

إذا كان A و B حدثين في نفس فضاء العيّنة، يكون لدينا:

$$P(\text{A أو B}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

21 الحدثان المستقلان

إذا كان احتمال الحدث A هو P(A) واحتمال الحدث B هو P(B).

يكون A و B حدثين مستقلين، إذا وفقط إذا كان احتمال حدوثهما معًا هو $P(A) \times P(B)$.

أي أن:

$$\text{A و B حدثان مستقلان} \Longleftrightarrow P(\text{A و B}) = P(A) \times P(B)$$

22 مبدأ الضرب العام في الاحتمال

بالنسبة لأي حدثين A و B، حيث $A \neq \varnothing$،

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

23 صيغة الاحتمال المشروط

بالنسبة لأي حدثين A و B، حيث $A \neq \varnothing$،

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

24 الحوادث المستقلة والاحتمال المشروط

يكون الحدثان A و B حدثين مستقلين إذا وفقط إذا كان $P(B|A) = P(B)$

إذن، لكل حدثين مستقلين $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.