الاسم ______________________ التاريخ ____________

3-1 تدريبات إعادة التعليم

تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها:

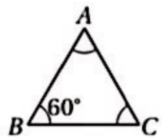
تصنّف المثلثات وفقًا لقياسات زواياها كما يأتي:

• إذا كانت زوايا المثلث الثلاث حادّة، سُمّي مثلثًا **حادّ الزوايا.**
• إذا كانت زوايا المثلث الثلاث متطابقة، سُمّي مثلثًا **متطابق الزوايا.**
• إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة، سُمّي مثلثًا **منفرج الزاوية.**
• إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة، سُمّي مثلثًا **قائم الزاوية.**

مثال

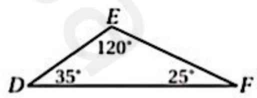
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

(a



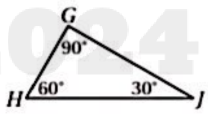
زوايا هذا المثلث الثلاث متطابقة، وقياس كلّ زاوية منها يساوي $60°$؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

(b



يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها $120°$؛ لذا فهو مثلث منفرج الزاوية.

(c

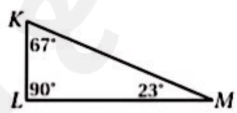


يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها $90°$؛ لذا فهو مثلث قائم الزاوية.

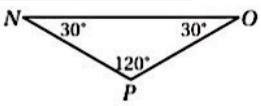
تمارين

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

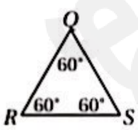
(1



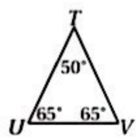
(2



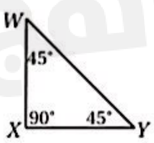
(3



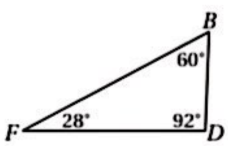
(4



(5



(6



3-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

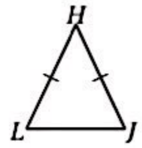
تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها:

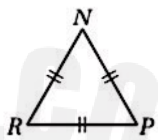
تصنّف المثلثات وفقًا لعدد الأضلاع المتطابقة فيها، ويُشار عادةً إلى الأضلاع المتطابقة في الرسوم، بوضع أعداد متساوية من الشرطات عليها.

• إذا كانت أضلاع المثلث الثلاثة متطابقة، سُمّي مثلثًا **متطابق الأضلاع.**
• إذا كان في المثلث ضلعان متطابقان على الأقل، سُمّي مثلثًا **متطابق الضلعين.** وبناءً عليه يكون المثلث المتطابق الأضلاع مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.
• إذا لم يوجد في المثلث ضلعان متطابقان، سُمّي مثلثًا **مختلف الأضلاع.**

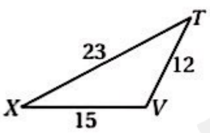
مثال 1 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه.

a)


يوجد في هذا المثلث ضلعان متطابقان؛ لذا فهو متطابق الضلعين.

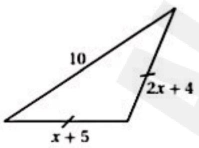
b)


أضلاع هذا المثلث الثلاثة متطابقة؛ لذا فهو متطابق الأضلاع.

c)


لا يوجد في هذا المثلث أي ضلعين متطابقين؛ لذا فهو مختلف الأضلاع.

مثال 2 أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث ABC .



الخطوة 1: أوجد قيمة x وذلك بمساواة طولَي الضلعين.

$2x + 4 = x + 5$ معطى

$x + 4 = 5$ اطرح x من الطرفين

$x = 1$ اطرح 4 من الطرفين

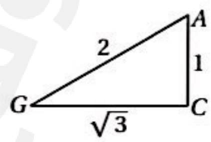
الخطوة 2: عوِّض عن قيمة x بأحد الطولين

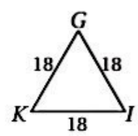
$2x + 4 = 2(1) + 4 = 6$

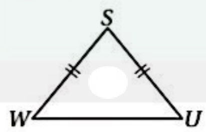
إذن طول كلٍّ من الضلعين 6

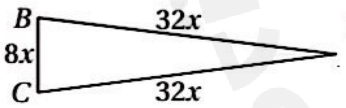
تمارين

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:

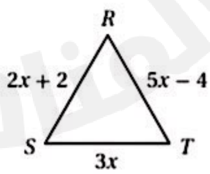
1)


2)


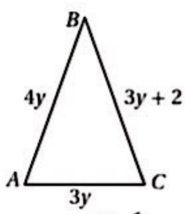
3)


4)


5) **جبر:** أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع ΔRST المتطابق الأضلاع.



6) **جبر:** أوجد قيمة y، وطول كلّ ضلع من أضلاع ΔABC المتطابق الضلعين، علمًا بأن $AB = BC$.



7) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع ΔABC الذي رؤوسه: $A(-1,5), B(6,1), C(2,-6)$، ثمّ صنّفه وفقًا لأضلاعه.

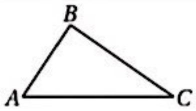
الاسم ____________________ التاريخ ____________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المثلثات

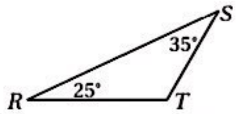
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث:

إذا عُلِم قياسا زاويتين في المثلثُ، فإنه يُمكِنك إيجاد قياس الزاوية الثالثة مستعملًا النظرية الآتية دائمًا:

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث	مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$. في الشكل المجاور: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. 

ونتيجةً لنظرية مجموع قياسات زوايا المثلث؛ نستطيع القول بأنه في أيِّ مثلثٍ قائمٍ تكون الزاويتان الحادتان متتامتين، وكذلك نستنتج أنه لا يمكن وجود مثلث يحوي أكثر من زاويةٍ قائمةٍ أو أكثر من زاويةٍ منفرجةٍ.

مثال 1 أوجد $m\angle T$.



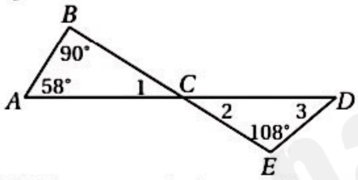
$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$25° + 35° + m\angle T = 180°$ بالتعويض

$60° + m\angle T = 180°$ بالتبسيط

$m\angle T = 120°$ بطرح 60 من الطرفين.

مثال 2 أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في الشكل الآتي:



$m\angle 1 + m\angle A + m\angle B = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 58° + 90° = 180°$ بالتعويض

$m\angle 1 + 148° = 180°$ بالتبسيط

$m\angle 1 = 32°$ بطرح $148°$ من الطرفين

$m\angle 2 = 32°$ الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

$m\angle 3 + m\angle 2 + m\angle E = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

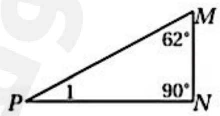
$m\angle 3 + 32° + 108° = 180°$ بالتعويض

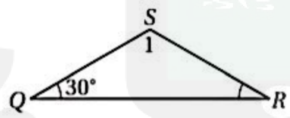
$m\angle 3 + 140° = 180°$ بالتبسيط

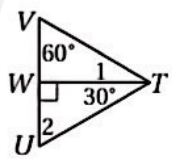
$m\angle 3 = 40°$ بطرح $140°$ من الطرفين

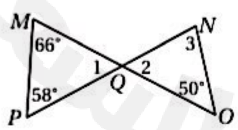
تمارين

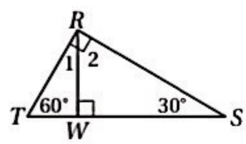
أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

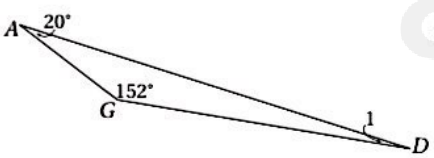
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

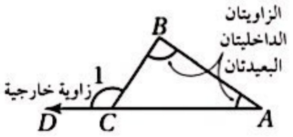
6) 

3-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

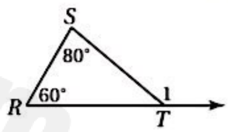
زوايا المثلث

نظريَّة الزاوية الخارجيَّة:

الزاوية المتشكّلة من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع الآخر عند كلّ رأس من رؤوسه تُسمى **زاوية خارجية للمثلث**. ويقابل كلّ زاوية خارجيّة للمثلث **زاويتان داخليّتان بعيدتان**، وهما زاويتان داخليّتان غير مجاورتين لها. في الشكل الآتي $\angle A, \angle B$ هما الزاويتان الداخليّتان البعيدتان بالنسبة للزاوية الخارجيّة $\angle DCB$.

نظرية الزاوية الخارجيّة	قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليّتين البعيدتين. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle B$	

مثال 1 أوجد $m\angle 1$.

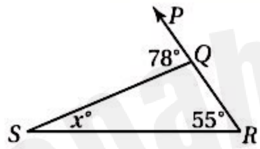


$m\angle 1 = m\angle R + m\angle S$ نظرية الزاوية الخارجية

$= 60° + 80°$ بالتعويض

$= 140°$ بالجمع

مثال 2 أوجد قيمة x.



$m\angle PQS = m\angle R + m\angle S$ نظرية الزاوية الخارجية

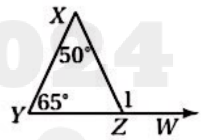
$78 = 55 + x$ بالتعويض

$23 = x$ بطرح 55 من الطرفين

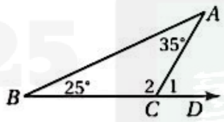
تمارين

أوجد قياسات الزوايا المرقّمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

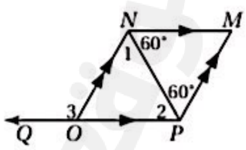
1)



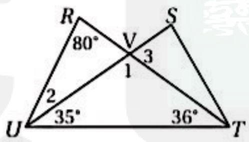
2)



3)

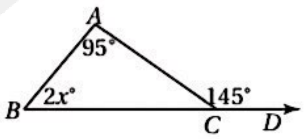


4)

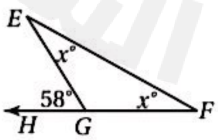


أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

5)



6)

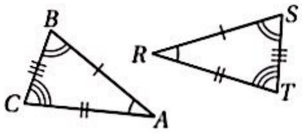


3-3 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة

التطابق والعناصر المتناظرة:

المثلثات التي لها القياس نفسه والشكل نفسه تُسمَّى **مثلثات متطابقة**، ويتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت **العناصر المتناظرة** متطابقة؛ أي أزواج الزوايا المتناظرة الثلاث متطابقة، وكانت أزواج الأضلاع المتناظرة الثلاثة متطابقة.



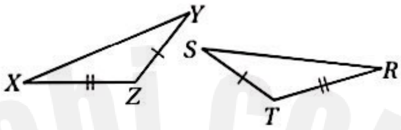
نظريّة الزاوية الثالثة	إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال

إذا كان $\Delta XYZ \cong \Delta RST$ ، فسمّ أزواج الزوايا المتطابقة وأزواج الأضلاع المتطابقة .

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T$

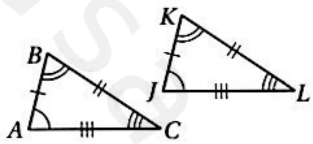
$\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}$



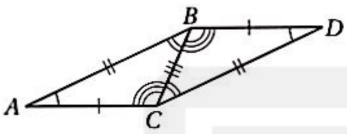
تمارين

في كلٍّ من الأسئلة الآتية، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

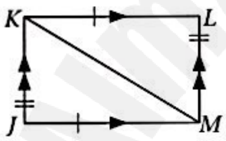
1)



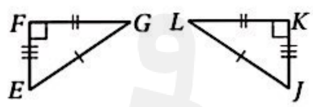
2)



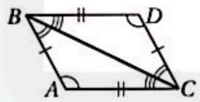
3)



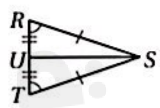
4)



5)



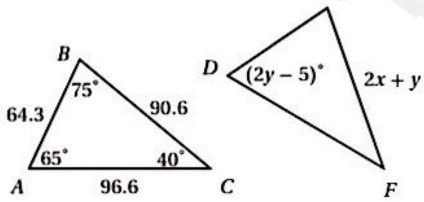
6)



في الشكل المجاور، إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$، فأوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

7) y

8) x



3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

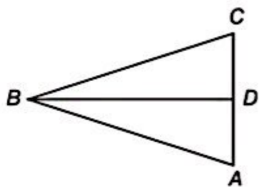
المثلثات المتطابقة

إثبات تطابق مثلثين:

يتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة، وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع. إن العبارة " إذا.. وفقط إذا" تعني أن العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان.

وعند إثبات تطابق مثلثين، يمكن استعمال خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للتطابق.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\angle BAD \cong \angle BCD$, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ، $\overline{BD}$ تنصف $\angle ABC$.

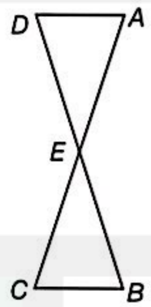
المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}$	1) معطيات.
2) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق.
3) $\angle BAD \cong \angle BCD$	3) معطيات.
4) $\angle ABD \cong \angle CBD$	4) تعريف منصف الزاوية.
5) $\angle BDA \cong \angle BDC$	5) نظرية الزاوية الثالثة.
6) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$	6) جميع العناصر المتناظرة متطابقة.

تمارين

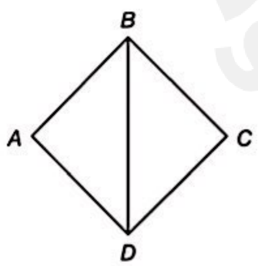
1) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B,$
$\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AE} \cong \overline{CE}$
$\overline{AC}$ تنصف $\overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta AED \cong \Delta CEB$

2) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{BD}$ تنصف كلًّا من $\angle ABC$ ، $\angle ADC$ ،
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{CB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

3-4 تدريبات إعادة التعليم

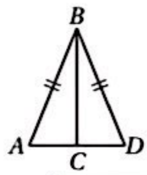
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

المسلَمة SSS:

تعلم أن المثلثين يكونان متطابقين إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة، وكانت زواياهما المتناظرة متطابقة. المسلّمة: ضلع – ضلع – ضلع (SSS)، وتمكّنك من أن تثبت تطابق مثلثين إذا علمت أن أضلاعهما المتناظرة متطابقة .

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع (SSS):	إذا طابقت الأضلاع الثلاثة في مثلث الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DB}$, C نقطة منتصف $\overline{AD}$.

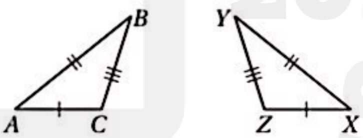
المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.

العبارات	المبرَرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DB}$	1) معطيات
2) C نقطة منتصف $\overline{AD}$	2) معطيات
3) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$	3) تعريف نقطة المنتصف
4) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\Delta ABC \cong \Delta DBC$	5) المسلّمة SSS

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

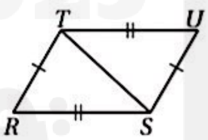
1) برهان ذو عمودين:



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{XY}, \overline{AC} \cong \overline{XZ}, \overline{BC} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

2) برهان تسلسلي:



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UT}, \overline{RT} \cong \overline{US}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta RST \cong \Delta UTS$

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

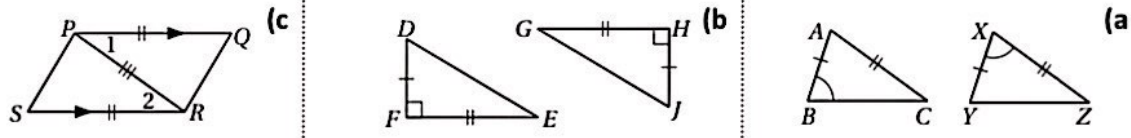
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

مسلَمة التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما SAS:

يمكنك إثبات تطابق مثلثين بطريقةٍ أخرى مستعملًا المسلّمة: ضلع زاوية ضلع (SAS) .

مسلّمة التطابق بضلعين وزاويةٍ محصورةٍ بينهما (SAS)	إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلثٍ نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال أي أزواج المثلثات الآتية يُمكِنك إثبات تطابقها باستعمال المسلّمة SAS.



a) الزاوية المحددة في ΔABC ليست محصورة بين الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. وبناءً عليه لا يمكنك إثبات تطابق هذين المثلثين مستعملًا المسلّمة SAS.

b) الزاويتان القائمتان متطابقتان، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة، وبناءً عليه فإن $\Delta DEF \cong \Delta JGH$ وفق المسلّمة SAS.

c) $\angle 2$,$\angle 1$ متطابقتان؛ لأنهما متبادلتان داخليًّا بين مستقيمين متوازيين ومستقيم يقطعهما، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة. وبناءً عليه فإن $\Delta PSR \cong \Delta RQP$ وفق المسلّمة SAS.

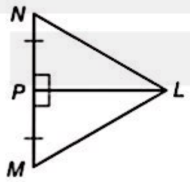
تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية.

1) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $\overline{NP} \perp \overline{PL}$, $\overline{NP} \cong \overline{PM}$

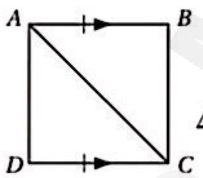
المطلوب: إثبات أن $\Delta NPL \cong \Delta MPL$



2) برهان تسلسلي:

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ACD \cong \Delta CAB$



3) برهان حر.

المعطيات: V نقطة منتصف $\overline{YZ}$ و V نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta XVZ \cong \Delta WVY$.

الاسم ______________________ التاريخ ____________

3-5 تدريبات إعادة التعليم

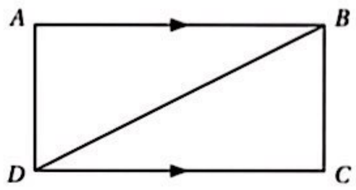
إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA):

يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملًا المسلّمة: زاوية – ضلع – زاوية (ASA) .

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)	إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

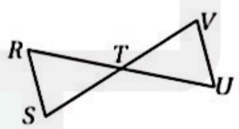
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	**1)** معطيات
2) $\angle CBD \cong \angle ADB$	**2)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
3) $\angle ABD \cong \angle BDC$	**3)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	**4)** خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	**5)** المسلّمة ASA

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين.

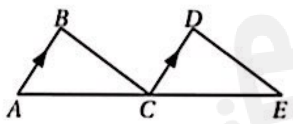


المعطيات: $\angle S \cong \angle V$

T نقطة منتصف $\overline{SV}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta RTS \cong \Delta UTV$

2) برهان حر.



المعطيات: $\overline{AE}$ تنصف $\overline{CD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\angle E \cong \angle BCA$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta CDE$

3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

التطابق بزاويتين وضلع غير محصورٍ بينهما (AAS):

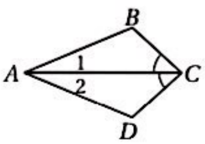
يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملًا نظرية: زاوية – زاوية – ضلع (AAS) .

التطابق بزاويتين وضلع غير محصورٍ بينهما (AAS)	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.

لقد أصبح لديك الآن خمس طرائق لإثبات تطابق مثلثين هي:

- المسلّمة ASA
- المسلّمة SSS
- المسلّمة AAS
- المسلّمة SAS

مثال **في الشكل المجاور: $\angle BCA \cong \angle DCA$، ما الأضلاع المتطابقة في الشكل؟ ما العنصران المتناظران الآخران اللذان يتعيّن أن يكونا متطابقين، حتى يكون المثلثان متطابقين وفق النظرية AAS؟**



الأضلاع المتطابقة: $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ وفق خاصية الانعكاس للتطابق.

لا يمكن أن يكون العنصران الآخران هما $\angle 1$ و$\angle 2$ ؛ لأن $\overline{AC}$ يكون الضلع المحصور بينهما في هذه الحالة؛ لذا يتعين أن تكون $\angle B \cong \angle D$، وعندها يكون $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ وفق النظرية AAS.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من السؤالين الآتيين:

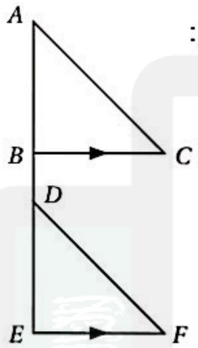
1) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

$\overline{AB} \cong \overline{ED}$

$\angle C \cong \angle F$

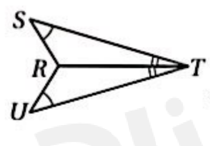
المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



2) برهان تسلسلي.

المعطيات: $\overline{TR}$ تنصّف $\angle STU$ ؛ $\angle S \cong \angle U$

المطلوب: إثبات أن $\angle SRT \cong \angle URT$



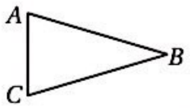
3-6 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين:

في المثلث المتطابق الضلعين يوجد ضلعان متطابقان، يطلق عليهما اسم **الساقين**. وتُسمَّى الزاوية التي ضلعاها ساقا المثلث **زاوية الرأس**. وتُسمَّى الزاويتان الأخريان **زاويتي القاعدة**. ويمكنك إثبات النظرية الآتية الخاصة بالمثلث المتطابق الضلعين وعكسها.

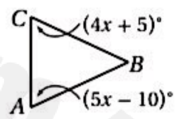
- إذا تطابق ضلعان في مثلثٍ، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان (نظرية المثلث المتطابق الضلعين).
- إذا تطابقت زاويتان في مثلثٍ، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين).



إذا كانت: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فإن: $\angle A \cong \angle C$

إذا كانت: $\angle A \cong \angle C$ ، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

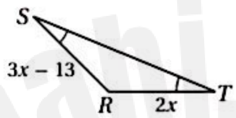
مثال 1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه، إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.



بما أن $BC = BA$، فإن:

$m\angle A = m\angle C$	نظريّة المثلث المتطابق الضلعين
$5x - 10 = 4x + 5$	بالتعويض
$x - 10 = 5$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$x = 15$	بإضافة 10 إلى كلا الطرفين

مثال 2 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.

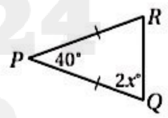


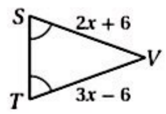
بما أن $m\angle S = m\angle T$، فإن:

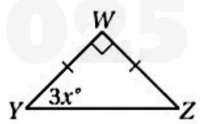
$SR = TR$	عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$3x - 13 = 2x$	بالتعويض
$3x = 2x + 13$	بإضافة 13 إلى كلا الطرفين
$x = 13$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

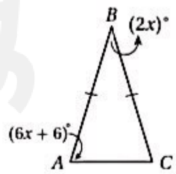
تمارين

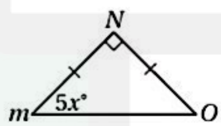
جبر: أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

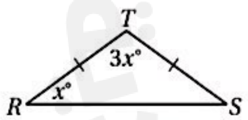
1)


2)


3)


4)


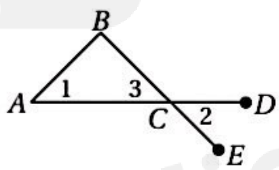
5)


6)


7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$



3-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

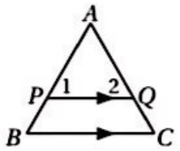
المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع:

الأضلاع في المثلث المتطابق الأضلاع تكون متطابقة، تقود نظريّة المثلث المتطابق الضلعين إلى النتيجتين الآتيتين المتعلقتين بزوايا المثلث المتطابق الأضلاع:

1) يكون المثلث متطابق الأضلاع، إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.
2) قياس كلّ زاويةٍ في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي °60.

مثال أثبت أنه إذا وازَى مستقيمٌ أحد أضلاع مثلثٍ متطابق الأضلاع، فإنه يُكوِّن مثلثًا آخر متطابق الأضلاع.



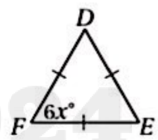
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) ΔABC متطابق الأضلاع $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	1) معطيات
2) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^\circ$	2) قياس كلّ زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي °60 .
3) $\angle 1 \cong \angle B, \angle 2 \cong \angle C$	3) إذا توازَى مستقيمان، فإن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.
4) $m\angle 1 = 60^\circ,\ m\angle 2 = 60^\circ$	4) بالتعويض
5) ΔAPQ متطابق الأضلاع.	5) إذا كان المثلث متطابق الزوايا، فإنه يكون متطابق الأضلاع.

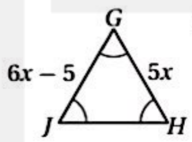
تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

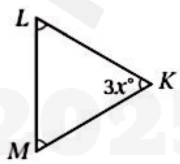
1)



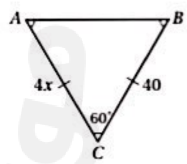
2)



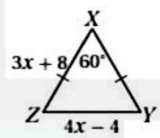
3)



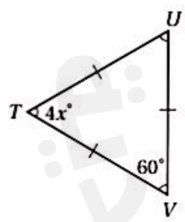
4)



5)



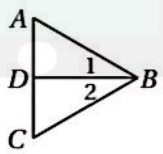
6)



7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: ΔABC متطابق الأضلاع؛ $\angle 2 \cong \angle 1$.

المطلوب: إثبات أن $\angle ADB \cong \angle CDB$



3-7 تدريبات إعادة التعليم

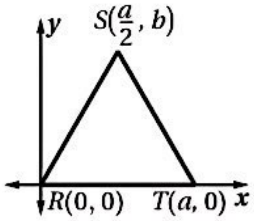
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

رسم المثلثات وتحديد مواقعها:

يستعمل البرهان الإحداثيّ الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات خصائص هندسيّة، والخطوة الأولى في البرهان الإحداثيّ هي رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ، وكتابة إحداثيّات رؤوسه. استعمل الإرشادات الآتية عند رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ:

1) اجعل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للشكل.
2) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقلّ من أضلاع المضلّع على أحد المحورين.
3) ارسم الشكل في الربع الأوّل من المستوى الإحداثيّ إن أمكن.
4) استعمل الإحداثيّات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

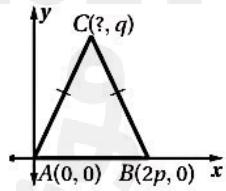
مثال ارسم ΔRST المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ، وحدِّد إحداثيات رؤوسه، على أن تكون قاعدته على المحور x الموجب، ويكون طولها a وحدةً.

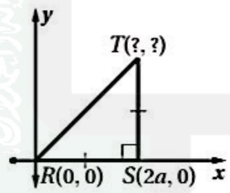


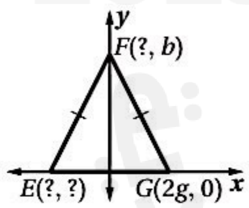
- ابدأ بوضع الرأس R عند نقطة الأصل $R(0, 0)$، وارسم القاعده $\overline{RT}$ على المحور x الموجب، فإذا كان RT يساوي a وحدةً، فإن إحداثيَّي T هما $(a, 0)$.
- أما الرأس S، فإنه يقابل نقطة منتصف $\overline{RT}$؛ لأن المثلث متطابق الضلعين، فسيكون الإحداثيّ x له يساوي $\frac{a}{2}$، وبما أننا لا نستطيع أن نكتب الإحداثيّ الصاديّ للرأس S بدلالة a، إذن سنفترض أن هذا الإحداثيّ يساوي b، فيكون الرأس الثالث $S\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تمارين

أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:

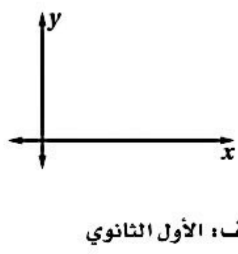
1)


2)


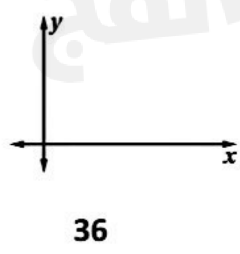
3)


ارسم كلَّ مثلثٍ ممَّا يأتي في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسه:

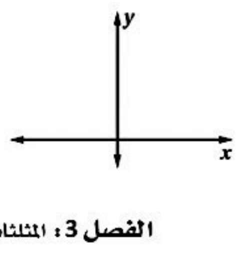
4) المثلث المتطابق الضلعين RST، والذي طول قاعدته $\overline{RS}$ يساوي $4a$ وحدة.



5) المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين DEF الذي طول ساقه e وحدة.



6) المثلث المتطابق الأضلاع EQI الذي طول ضلعه $2b$ وحدة، ورأسه $Q(0, \sqrt{3}b)$.



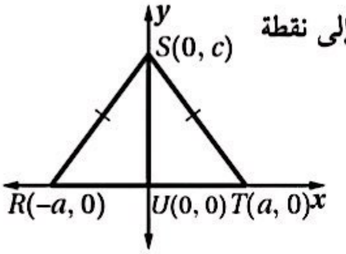
3-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات والبرهان الإحداثيّ

كتابة البرهان الإحداثيّ:

نستعمل البراهين الإحداثيّة لإثبات بعض النظريّات، والتحقّق من بعض خصائص الأشكال الهندسيّة، ونستعمل قانون المسافة أو قانون الميل أو قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة في كثيرٍ من البراهين الإحداثيّة.

مثال **اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة المرسومة من الرأس إلى نقطة منتصف القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين تكون عموديّة على القاعدة.**



ارسم مثلثًا متطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ أوّلًا،
ولتسهيل عمليّة كتابة البرهان، اجعل رؤوس المثلث عند:
$S(0, c)$, $R(-a, 0)$, $T(a, 0)$، وعندها تكون $U(0, 0)$ نقطة منتصف $\overline{RT}$.

المعطيات: $\triangle RST$ متطابق الضلعين، و U نقطة منتصف القاعدة $\overline{RT}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

البرهان: بما أن U نقطة منتصف $\overline{RT}$ ، فإن إحداثيَّيها هما $\left(\frac{-a+a}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$؛ أيْ $(0, 0)$، وعندها فإن $\overline{SU}$ تكون واقعةً على المحور y ، وقد رسم $\triangle RST$ ، بحيث كانت $\overline{RT}$ على المحور x ، ومن المعلوم أن المحورين متعامدان، وبناءً عليه فإن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات كلٍّ من العبارتين الآتيتين:

1) "القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين منتصفات أضلاع المثلث القائم الزاوية تشكّل مثلثًا قائم الزاوية".

2) في أيِّ مثلثٍ قائمٍ، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعَي طولَي الضلعين الآخرين "نظرية فيثاغورس".