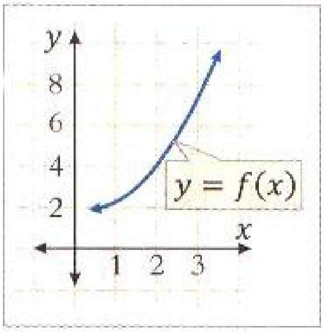
الفصل ١ : تحليل الدوال

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة:

(١) الصفة المميزة لمجموعة الأعداد $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ هي ..

Ⓐ $\{x \mid -3 \le x \le 2,\ x \in W\}$.
Ⓑ $\{x \mid -3 \le x \le 2,\ x \in Z\}$.
Ⓒ $\{x \mid -3 \le x \le 2,\ x \in N\}$.
Ⓓ $\{x \mid -4 \le x \le 3,\ x \in Z\}$.

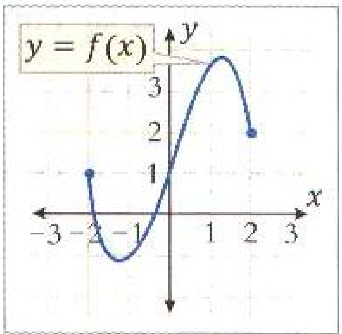


(٢) المتباينة $4 < x \le 7$ تمثلها الفترة ..

Ⓐ $[4, 7)$. Ⓑ $(4, 7)$. Ⓒ $[4, 7]$. Ⓓ $(4, 7]$.

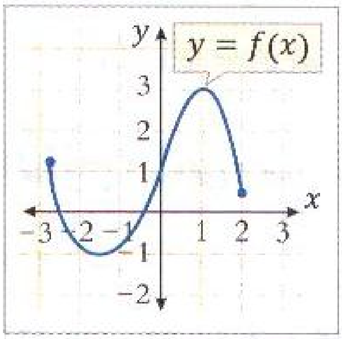
(٣) من الشكل المجاور $f(2)$ تساوي ..

Ⓐ 12 . Ⓑ 8 . Ⓒ 4 . Ⓓ 2 .



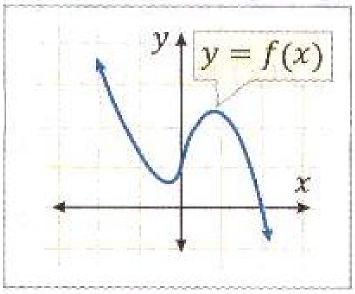
(٤) من الشكل المجاور مجال الدالة $y = f(x)$ هو ..

Ⓐ $[0, 3]$. Ⓑ $[-2, 2]$. Ⓒ $(-2, 2)$. Ⓓ $[1, 2]$.



(٥) من الشكل المجاور مدى الدالة $y = f(x)$ هو ..

Ⓐ $[-1, 3]$. Ⓑ $[-1, 2]$. Ⓒ $(-3, 2)$. Ⓓ $[1, 2]$.

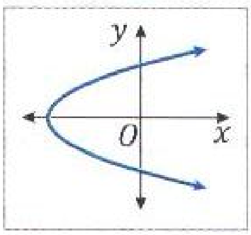


(٦) من الشكل المجاور المقطع x للدالة $y = f(x)$ هو ..

Ⓐ 0 . Ⓑ 1 . Ⓒ 2 . Ⓓ $[1, 2]$.

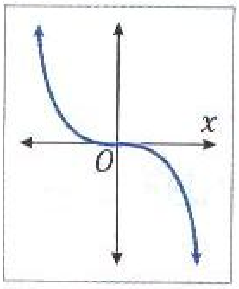
(٧) من الشكل المجاور المقطع y للدالة $y = f(x)$ هو ..

Ⓐ 0 . Ⓑ 1 . Ⓒ 2 . Ⓓ $[1, 2]$.



(٨) من الشكل المجاور الدالة متماثلة حول ..

Ⓐ محور x . Ⓑ محور y . Ⓒ نقطة الأصل.

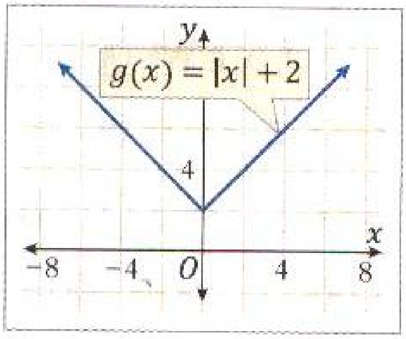


(٩) من الشكل المجاور الدالة متماثلة حول ..

Ⓐ محور x . Ⓑ محور y . Ⓒ نقطة الأصل.

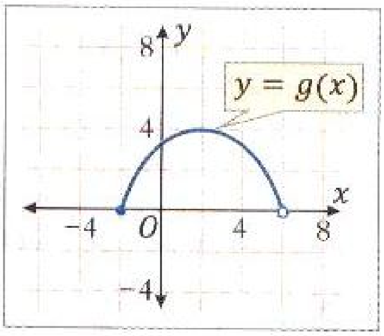
(١٠) الدالة $f(x) = x$ ..

Ⓐ زوجية. Ⓑ فردية. Ⓒ غير ذلك.



(١١) من الشكل المجاور القيمة الصغرى المحلية تساوي ..

Ⓐ 0 . Ⓑ 1 . Ⓒ 2 .



(١٢) من الشكل المجاور القيمة العظمى المطلقة للدالة $g(x)$ تساوي ..

Ⓐ -2 . Ⓑ 2 . Ⓒ 4 .

(١٣) إذا كانت $f(x) = x$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ فإن $(f \cdot g)(x)$ تساوي ..

Ⓐ x . Ⓑ $\frac{1}{x}$. Ⓒ 1 . Ⓓ x^2 .

(١٤) إذا كانت $f(x) = x$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ فإن $(g \circ f)(x)$ تساوي ..

Ⓐ x . Ⓑ $\frac{1}{x}$. Ⓒ 1 . Ⓓ x^2 .

(١٥) الدالة العكسية لـ $f(x) = x^3$ هي ..

Ⓐ $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Ⓑ $g(x) = \frac{1}{x^3}$. Ⓒ $g(x) = x$. Ⓓ $g(x) = x^3$.

السؤال الثاني: ضع علامة ✓ أمام العبارة الصحيحة وعلامة × أمام الخاطئة مما يلي:

(١) العدد $\sqrt{23}$ عدد نسبي.

(٢) الفترة $[2, 3]$ فترة محدودة.

(٣) الدالة $f(x) = x^4$ زوجية.

(٤) الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ زوجية.

(٥) التحويل الهندسي $g(x) = |f(x)|$ للدالة $f(x) = x^3$ هو انعكاس لمنحنى الدالة بأكمله حول المحور x .

(٦) التحويل الهندسي $g(x) = f(|x|)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x-1}$ انعكاس لمنحنى الدالة بأكمله حول المحور y .

(٧) إذا كانت $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x$ فإن $(f - g)(x) = x^2 - x$.

(٨) إذا كانت $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x^3$ فإن $(f \circ g)(x) = x^6$.

(٩) تكون كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ عكسية للأخرى إذا كانت $f(x) = g(x)$.

السؤال الثالث: مسائل حسابية:

(١) اكتب المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ باستعمال الصفة المميزة.

(٢) اكتب المجموعة $-4 \le y < -1$ باستعمال رمز الفترة.

(٣) إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$ فأوجد قيمة $f(12)$.

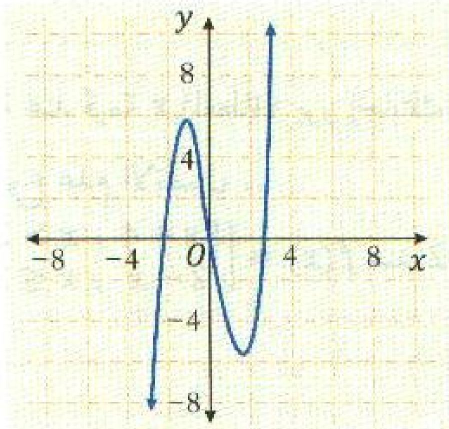
(٤) حدد مجال الدالة $f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$.

(٥) في كل مما يلي حدد إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا ..

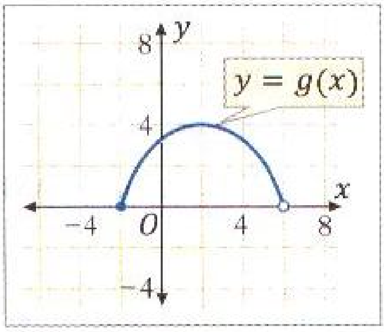
(a)

x	y
-6	-7
2	3
5	8
5	9
	22

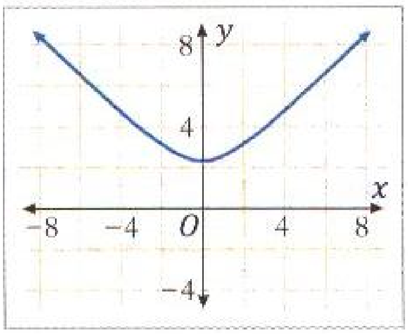
(b)

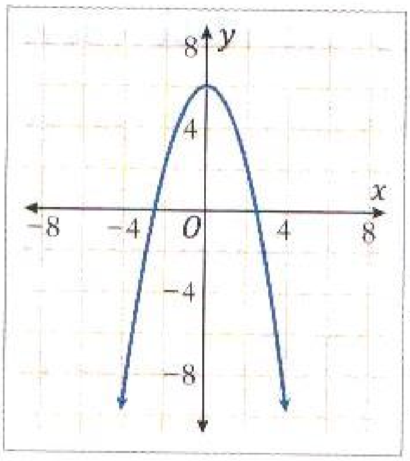


(٦) أوجد المجال والمدى للدالة $y = g(x)$ باستعمال التمثيل البياني المجاور.



(٧) الشكل المجاور يُبين التمثيل البياني للدالة $h(x) = \sqrt{x^2+6}$ ؛ أوجد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبريًا.





(٨) الشـكـل المجاور يُبين التمثيل البياني للدالة $y = -x^2 + 6$ ؛ اختبر التمـاثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصـــل، وعزّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا.

....

....

....

....

....

....

....

(٩) حدد جبريًا إن كانت الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2}$ زوجية أم فردية أم غير ذلك.

....

....

....

....

(١٠) حدد ما إذا كانت الدالة متصـلة عند قيمة x المعطاة؛ برر إجابتك باسـتعمال اختبار الاتصـال، وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال ..

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4 \ , \ x > 2 \\ 2 - x \ , \ x \leq 2 \end{cases} \text{ عند } x = 2$$

....

....

....

....

....

....

(١١) حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = \frac{x^2-6}{x+4}$ في الفترة $[-3, 4]$.

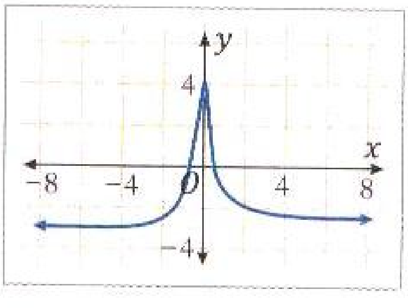
....

....

....

....

....



(١٢) اسـتعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{-6x^2+4}{2x^2+x+1}$ لوصـف سـلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

....

....

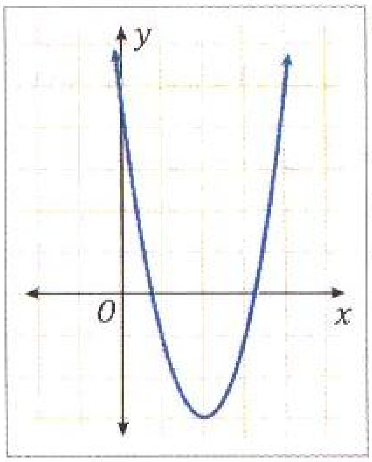
....

....

....

....

....



(١٣) استعمل التمثيل البياني المقابل لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ متزايدة أو متناقصة أو ثابتة، ثم عزز إجابتك عدديًا.

....

....

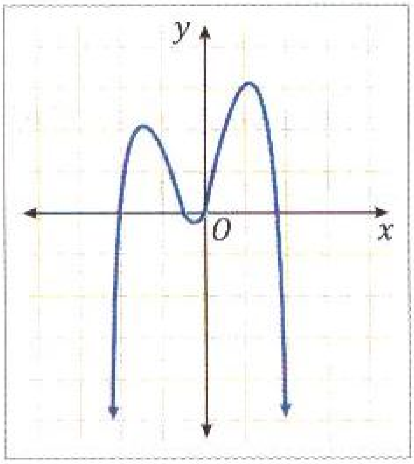
....

....

....

....

....



(١٤) قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(١٥) أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ على الفترة $[2, 3]$.

....

....

....

(١٦) استعمل منحنى الدالة الرئيسة « الأم » $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال التالية بيانيًا:

(a) $h(x) = x^3 - 5$. **(b)** $h(x) = 8 + x^3$. **(c)** $h(x) = (x+2)^3 + 4$.

....

....

....

....

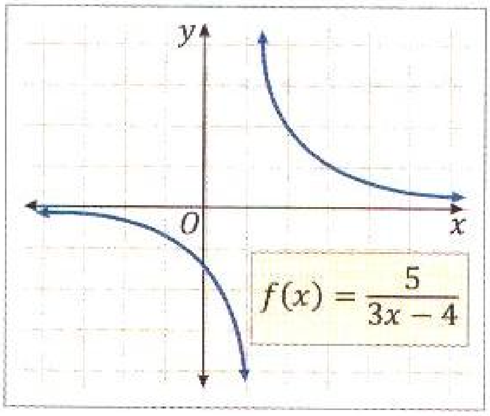
....

....

....

(١٧) عين الدالة الرئيسة « الأم » $f(x)$ للدالة $g(x) = \frac{15}{x} + 3$ ، ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

(١٨) استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًا.



(١٩) إذا كانت $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = x^2 - 6x - 8$ فأوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، ثم أوجد مجال الدوال الناتجة.

(٢٠) أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، $h(x) = x^2 - 2x + 1$ وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$.

....

....

....

....

(٢١) أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن للدالة $f(x) = -16 + x^3$.

....

....

....

....

الأجوبة النهائية

أجوبة السؤال الأول: الاختيار من متعدد ..

(١) B	(٢) D	(٣) C	(٤) B	(٥) A	(٦) C	(٧) B	(٨) A
(٩) C	(١٠) B	(١١) B	(١٢) C	(١٣) C	(١٤) B	(١٥) A	

أجوبة السؤال الثاني: بيان الإجابة الصحيحة والخاطئة ..

(١) ×	(٢) ✓	(٣) ✓	(٤) ×	(٥) ×
(٦) ✓	(٧) ✓	(٨) ✓	(٩) ×	

أجوبة السؤال الثالث: مسائل متنوعة ..

(١) الصفة المميزة للمجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ هي $\{x | x \geq 1,\ x \in N\}$.

(٢) رمز الفترة للمجموعة $-4 \leq y < -1$ هي $[-4, -1)$.

(٣) $f(12) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1} = \frac{2(12)+3}{(12)^2-2(12)+1} = \frac{27}{121}$.

(٤) بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف كما أن الدالة غير معرفة إذا كان المقام صفراً ..

$$\therefore\ 2x + 6 > 0 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -3$$

$\therefore$ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 أو $(-3, \infty)$

(٥) لتحديد إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا ..

(a)	نُجري اختبار الجدولة .. قيمة x تساوي 5 في الجدول لها قيمتين مختلفتين في y .. $\therefore$ y لا تمثل دالة في x	(b)	نُجري اختبار الخط الرأسي .. يقطع الخط الرأسي المنحنى في نقطة واحدة عند كل المواضع .. $\therefore$ y تمثل دالة في x

(٦) نُوجد مجال الدالة بالنظر إلى محور x ، ومدى الدالة بالنظر إلى محور y ..

∴ المجال $= [-2,6)$ ، المدى $= [0,4]$

(٧) بما أن المقطع y هو نقطة تقاطع منحنى الدالة مع المحور y فإن القيمة التقريبية للمقطع $y \approx 2.4$.

نُوجد القيمة التقريبية للمقطع y جبريًا بالتعويض عن $x = 0$ ..

$$h(0) = \sqrt{(0)^2+6} \approx 2.4$$

(٨) **اختبار التماثل:** بما أن المنحنى متماثل حول المحور y فإنه لكل نقطة (x,y) على المنحنى تكون النقطة $(-x,y)$ واقعة عليه.

التعزيز عدديًا:

x	2	−2	3	−3
y	2	2	−3	−3
(x,y)	(2,2)	(−2,2)	(3,−3)	(−3,−3)

التحقق جبريًا: باستبدال x بـ $-x$ ..

بما أن المعادلة $y = -(-x)^2 + 6$ تكافئ $y = -x^2 + 6$ فإن المنحنى متماثل حول المحور y

(٩) بالتعويض بـ $-x$ مكان x في الدالة ..

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} = f(x) \quad \Leftarrow \quad \text{الدالة زوجية}$$

(١٠) نُجري اختبار الاتصال ..

- $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 2 - 2 = 0$ « الدالة معرفة عند $x = 2$ »

- هل $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة؟

نُكون جدولاً يُبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين ..

$f(x)$	$2 - x, x \le 2$				$5x+4, x>2$		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.1	0.001	0.0001		14.005	14.05	14.5

∴ الدالة غير متصلة عند $x = 2$ ونوع الاتصال قفزي

(١١) نكون جدول القيم باستعمال الفترة $[-3,4]$ ..

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	−1	−1.66	−1.5	−1	−0.33	0.43	1.25

نُلاحظ تغير إشارة $f(x)$ في الجدول في الفترتين $-3 < x < -2$ ، $2 < x < 3$ ..

∴ توجد أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين

(١٢) يتضـــح من التمثيـل البيـاني أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$ بـالنظر يمينـًا، وأن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ بالنظر إلى اليسار.

التعزيز عدديًا: نكون جدولاً لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ ..

x	-1000	-100	0	100	1000
$f(x)$	-3.001497	-3.014722	4	-2.984727	-2.998497

(١٣) يُبين التمثيل البياني أن الدالة $f(x)$ متناقصة في الفترة $(-\infty, 2)$ ومتزايدة في الفترة $(2, \infty)$.

التعزيز عدديًا: نكون جدولاً لاستقصاء قيم $f(x)$ على كل فترة سابقة ..

في الفترة $(-\infty, 2)$ ..

x	...	-1	0	1	2
$f(x)$	...	15	5	-1	-3

كلما زادت قيم x فإن $f(x)$ تتناقص

في الفترة $(2, \infty)$ ..

x	2	3	4	5	...
$f(x)$	-3	-1		15	...

كلما زادت قيم x فإن $f(x)$ تتزايد

(١٤) نُقدر قيم x التي يكون للدالة عندها قيم قصوى ..

يوضـــح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x \approx -1.5$ ومقدارها 2 تقريبًا ؛ كذلك قيمة عظمى مطلقة عند $x \approx 1$ ومقدارها 3 تقريبًا.

يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x \approx -0.5$ ومقدارها 0 تقريبًا.

التعزيز عــدديًا: نُكون جـدولاً بحيث نختار قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن تكون عندها قيمة قصوى، ثم نختار قيمتين إحداهما كبيرة جدًا والأخرى صغيرة جدًا ..

x	-100	-2	-1.5	-1	-0.5		0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-98970200	0	2.06	1	-0.19	0	1.56	3	1.31	-8

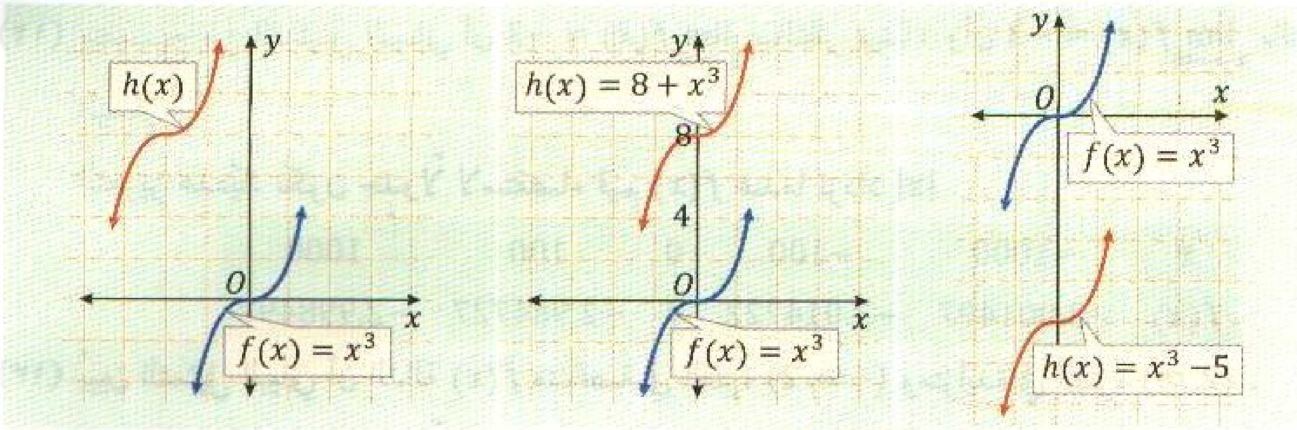
وعندما نقارن تقدير القيم القصوى من التمثيل البياني بالقيم التي في الجدول نجد أن التقدير يُعدّ معقولاً.

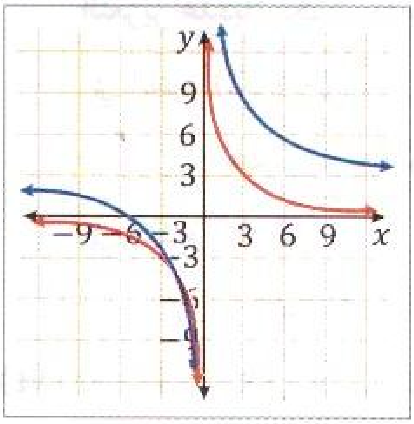
(١٥) نستعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير ..

$$m_{sec} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{2-(-4)}{1} = 6$$

(١٦) نُمثل كل دالة في شكل منفصل ..

(a)	(b)	(c)
الدالة $h(x) = x^3 - 5$ هي نفس الدالة الرئيسة مزاحة $|-5|$ وحدات إلى الأسفل	الدالة $h(x) = 8 + x^3$ هي نفس الدالة الرئيسة مزاحة 8 وحدات إلى الأعلى	$h(x) = (x+2)^3 + 4$ هي نفس الدالة الرئيسة مزاحة 2 وحدة لليسار، 4 وحدات للأعلى





(١٧) الدالة الرئيسة « الأم » هي $f(x) = \frac{1}{x}$ ..

نصف ـ الآن ـ العلاقة بين المنحنيين ثم نمثلهما بيانيًا ..

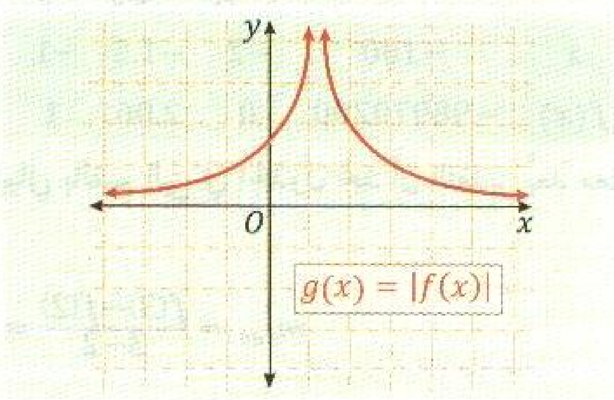
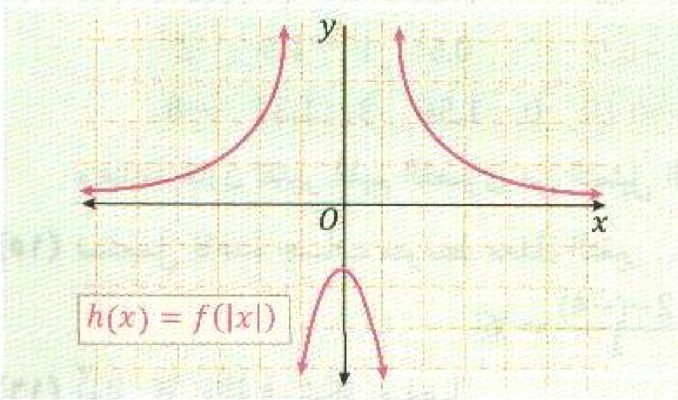
منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى الدالة الأم بمقدار $a = 15$ ..

$$g(x) = 15\left(\frac{1}{x}\right) = 15f(x)$$

ثم انسحاب مقداره 3 وحدات لأعلى لأن ..

$$g(x) = 15f(x) + 3$$

(١٨) لتمثيل الدالتين ..

$g(x) = \lvert f(x)\rvert$	$h(x) = f(\lvert x\rvert)$
لتمثيل الدالة $g(x) = \lvert f(x)\rvert$ نعكس الجزء السالب من منحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x	لتمثيل الدالة $h(x) = f(\lvert x\rvert)$ نضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y
	

(١٩) إيجاد كل من $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، ومجالاتها ..

$(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$$

مجال $f(x)$ هو $(-\infty, \infty)$ ومجال $g(x)$ هو $[0, \infty)$ ..

مجال $(f+g)(x)$ هو تقاطع مجالي الدالتين أي $[0, \infty)$

$(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x-8-\sqrt{x}$ مجال $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال $g(x)$ هو $[0,\infty)$ .. مجال $(f-g)(x)$ هو تقاطع مجالي الدالتين أي $[0,\infty)$
$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2-6x-8)(\sqrt{x})=x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}$ مجال $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال $g(x)$ هو $[0,\infty)$ .. مجال $(f\cdot g)(x)$ هو تقاطع مجالي الدالتين أي $[0,\infty)$

(٢٠) بتحليل الدالة $h(x)$ إلى عوامل نجد أن ..

$$h(x)=(x-1)^2$$

يمكننا الآن كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $g(x)=x-1$ ، $f(x)=x^2$ ؛ وعندئذٍ فإن ..

$$h(x)=(x-1)^2=[g(x)]^2=f[g(x)]=[f\circ g](x)$$

(٢١) بإجراء اختبار الخط الأفقي للدالة $f(x)=-16+x^3$ نتأكد أن لها دالة عكسية نوجدها كالتالي:

$$f(x)=-16+x^3 \;\Rightarrow\; y=-16+x^3$$
$$x=-16+y^3 \;\Rightarrow\; x+16=y^3 \;\Rightarrow\; y=\sqrt[3]{x+16}$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+16}$$

مجال الدالة $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومداها هو $(-\infty,\infty)$.

مجال الدالة $f^{-1}(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومداها هو $(-\infty,\infty)$.

مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب لذلك لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1} .

(٢٢) إثبات أن $f[g(x)]=x$ و $g[f(x)]=x$ ..

$\boldsymbol{f[g(x)]}$	$\boldsymbol{g[f(x)]}$
$f[g(x)]=f\left(6-\frac{x}{3}\right)$ $=18-3\left(6-\frac{x}{3}\right)$ $=18-18+x=x$	$g[f(x)]=g(18-3x)$ $=6-\frac{(18-3x)}{3}$ $=6-6+x=x$

بما أن $f[g(x)]=[f(x)]=x$ فإن كلاً من الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ دالة عكسية للأخرى.

الفصل ٢ : العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) منحنى الدالة الأسية $f(x) = (3)^x$ يقطع محور y في النقطة ..

Ⓐ $(0,0)$. Ⓑ $(0,1)$. Ⓒ $(1,0)$. Ⓓ $(1,1)$.

(٤) التمثيل البياني للدالة $f(x) = (5)^x - 1$ ينتج من إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = (5)^x$ بمقدار وحدة واحدة ..

Ⓐ للأعلى. Ⓑ للأسفل. Ⓒ لليمين. Ⓓ لليسار.

(٥) منحنى الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ يقطع محور y في النقطة ..

Ⓐ $(0,0)$. Ⓑ $(0,1)$. Ⓒ $(1,0)$. Ⓓ $(1,1)$.

(٦) إذا كانت $3^{x-1} = 27$ فإن x تساوي ..

Ⓐ 3 . Ⓑ 4 . Ⓒ 9 . Ⓓ 27 .

(٧) إذا كانت $3^x \geq 9$ فإن ..

Ⓐ $x \leq 1$. Ⓑ $x < 2$. Ⓒ $x \geq 2$.

(٨) الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة الأسية $5^3 = 125$ هي ..

Ⓐ $125 = \log_3 5$. Ⓑ $125 = \log_5 3$. Ⓒ $3 = \log_5 125$.

(٩) منحنى الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ يقطع محور x في النقطة ..

Ⓐ $(0,0)$. Ⓑ $(0,1)$. Ⓒ $(1,1)$. Ⓓ $(1,0)$.

(١٠) يكون منحنى الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ متناقصًا إذا كانت ..

Ⓐ $b > 0$. Ⓑ $b > 1$. Ⓒ $0 < b < 1$. Ⓓ $0 < x < 1$.

(١١) قيمة العبارة اللوغاريتمية $\log_6 6^2$ تساوي ..

Ⓐ 2 . Ⓑ 6 . Ⓒ 12 . Ⓓ 36 .

(١٢) إذا كان $\log_2 x = 3$ فإن x تساوي ..

Ⓐ 2 . Ⓑ 3 . Ⓒ 5 . Ⓓ 8 .

(١٣) إذا كان $\log_5 x = \log_5 (3)^2$ فإن x تساوي ..

Ⓐ 2 . Ⓑ 3 . Ⓒ 5 . Ⓓ 9 .

(١٤) إذا كان $\log_4 x \geq 2$ فإن ..

Ⓐ $x \geq 2$. Ⓑ $x \geq 4$. Ⓒ $x \geq 8$. Ⓓ $x \geq 16$.

(١٥) إذا كان $\log_3 x > \log_3 (2)^2$ فإن ..

Ⓐ $x > 2$. Ⓑ $x < 4$. Ⓒ $x > 6$. Ⓓ $x > 9$.

(١٦) .... $= \log 200$.

Ⓐ 2 Ⓑ $\log 2$ Ⓒ $2 - \log 2$ Ⓓ $2 + \log 2$

(١٧) $\frac{\log 7}{\cdots\cdots} = \log_2 7$.

Ⓐ $\log 2$ Ⓑ $\log 5$ Ⓒ $\log_5 2$ Ⓓ $\log_2 5$

السؤال الثاني: ضع علامة ✓ أمام العبارة الصحيحة وعلامة × أمام الخاطئة مما يلي:

(١) خط التقارب للدالة الأسية $f(x) = 7^x$ هو نفسه خط التقارب لمنحنى الدالة $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

(٢) $\log_8 8 = \log_5 5$.

(٣) $\log_{12} 1 = 12$.

(٤) مجال الدالة اللوغاريتمية الأم يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية R .

(٥) $\log_{25}(7 \times 8) = \log_{25} 7 \times \log_{25} 8$.

(٦) $\log_5 \frac{12}{3} = \log_5 12 - \log_5 3$.

(٧) $\log_7 7 = \log 10$.

(٨) $\log_6 8 = \frac{\log 8}{\log 6}$.

(٩) خط التقارب للدالة الأسية $f(x) = 7^x$ هو محور x .

السؤال الثالث: املأ الفراغ بما يناسبه:

(١) التمثيل البياني للدالة $f(x) = (3)^{x-4} + 5$ ينتج من إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$ يمينًا بمقدار .... وحدات ثم لأعلى بمقدار .... وحدات.

(٢) قيمة x التي تحقق المعادلة $2^x - 8 = 0$ هي ....

(٣) حل المتباينة $2^x - 8 < 0$ هو ....

(٤) .... $= \log_7 7^5$.

السؤال الرابع: مسائل متنوعة:

(١) مثّل الدالة $y = 4^x$ بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداها.

....

(٢) مثل الدالة $y = (2)^{x+3} - 5$ بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداها.

(٣) مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، ثم حدد مجالها ومداها.

(٤) أوجد حل المعادلة $4^{2n-1} = 64$.

(٥) أوجد حل المتباينة $10^{5b+2} > 1000$.

(٦) أوجد قيمة العبارة اللوغاريتمية $\log_3 81$.

(٧) مثل الدالة $f(x) = \log_2 x$.

(٨) احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$.

(٩) أوجد حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$.

(١٠) أوجد حل المتباينة $\log_5(2x+1) \leq \log_5(x+4)$.

(١١) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة آلاف.

الأجوبة النهائية

أجوبة السؤال الأول: الاختيار من متعدد ..

(١) B	(٢) B	(٣) B	(٤) B	(٥) C	(٦) C	(٧) D	(٨) C
(٩) B	(١٠) D	(١١) D	(١٢) D	(١٣) D	(١٤) D	(١٥) A	

أجوبة السؤال الثاني: بيان الإجابة الصحيحة والخاطئة ..

(١) ✓	(٢) ✓	(٣) ✓	(٤) ×	(٥) ×	(٦) ×	(٧) ✓	(٨) ✓	(٩) ✓

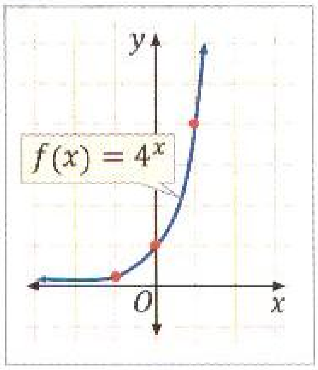
أجوبة السؤال الثالث: ملء الفراغ ..

(١) يمينًا 4 ، لأعلى 5	(٢) 3	(٣) $x < 3$	(٤) 5

أجوبة السؤال الرابع: مسائل متنوعة ..

(١) **أولاً:** نُنشئ جدولاً لبعض قيم الدالة ونرسم منحنى الدالة على المستوى الإحداثي ..

x	$y = 4^x$	(x, y)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	$y = 4^{-1} = \frac{1}{4}$	$\left(-1, \frac{1}{4}\right)$
0	$y = 4^0 = 1$	$(0,1)$
1	$y = 4^1 = 4$	$(1,4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



ثانيًا: مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ .

(٢) في الدالة $y = 1(2)^{x+3} - 5$ ..

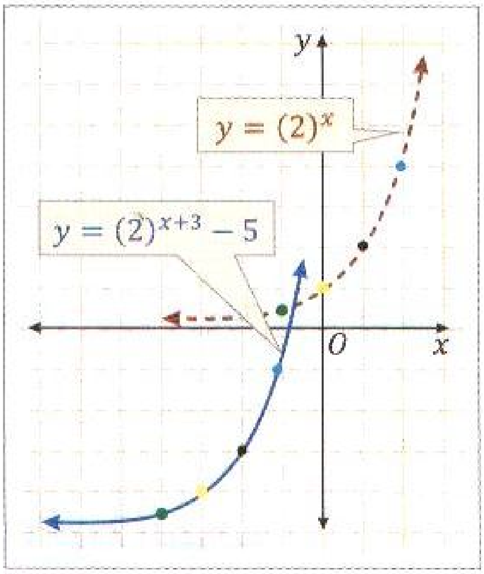
$a = 1 \;,\; h = -3 \;,\; k = -5$

التمثيل البياني للدالة $y = (2)^{x+3} - 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = (2)^x$ بالتحويلات التالية:

مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية

$f(x) = 1(2)^{x+3} \; -5$

$f(x) = ab^{x-h} \; +k$



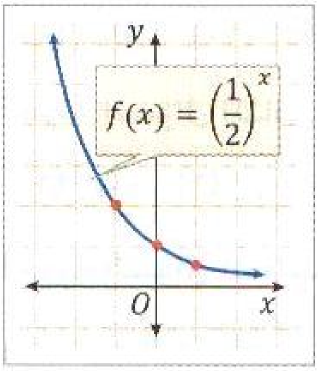
- إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات لليسار.
- إزاحة رأسية بمقدار 5 وحدات للأسفل.
- المنحنى لا يتسع رأسيًا ولا يضيق رأسيًا ولا ينعكس حول محور x لأن $a = 1$.

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -5

(٣) **أولاً:** نُنشئ جدولاً لبعض قيم الدالة ونرسم منحنى الدالة على المستوى الإحداثي ..

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
⋮	⋮	⋮
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1,2)$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$(0,1)$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$
⋮	⋮	⋮



ثانيًا: مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ .

(٤) حل المعادلة ..

$$4^{2n-1} = 64$$
$$(2^2)^{2n-1} = 2^6$$
$$2^{4n-2} = 2^6$$
$$4n - 2 = 6$$
$$4n = 8$$
$$n = 2$$

(٥) حل المتباينة ..

$$10^{5b+2} > 1000$$
$$10^{5b+2} > 10^3$$
$$5b + 2 > 3$$
$$5b > 1$$
$$b > \frac{1}{5}$$

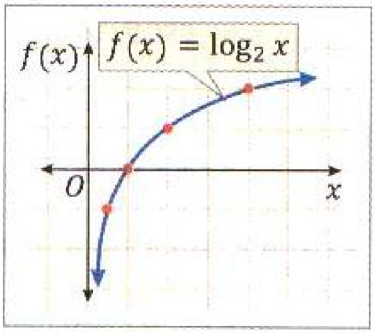
(٦) الحل باستخدام الخاصية الأساسية $\log_b b^x = x$ للوغاريتمات ..

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

(٧) بما أن منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ يمر بالنقط الثلاث $\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1,0), (b,1)$.

وبما أن $b = 2$ فإن منحنى الدالة $f(x) = \log_2 x$ يمر بالنقط التالية:

$$\left(\frac{1}{2}, -1\right), (1,0), (2,1)$$



(٨) قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$ ..

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 (36)^{\frac{1}{3}} = \log_6 [(6)^2]^{\frac{1}{3}} = \log_6 [6]^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_6 6 = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

(٩) نلاحظ أن المعادلة تحوي لوغاريتمًا واحدًا، ولذلك نستخدم التحويل للصورة الأسية ..

$$\log_9 x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = (3)^{\cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}}} = 3^3 = 27$$

(١٠) نحل باستخدام خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية ..

$$\log_5(2x+1) \le \log_5(x+4)$$
$$2x + 1 \le x + 4$$
$$2x + 1 - x - 1 \le x + 4 - x - 1$$
$$x \le 3$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \le 3\right\}$

(١١) كتابة $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ..

$$\log_6 8 = \frac{\log 8}{\log 6} \Rightarrow \log_6 8 = \frac{\log 8}{\log 6} \approx 1.1606$$

الفصل ٣ : المتطابقات والمعادلات المثلثية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة:

(١) قيمة العبارة $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ تساوي ..

Ⓐ 1 . Ⓑ -1 . Ⓒ 0 . Ⓓ $\tan\theta$.

(٢) العبارة $\cos\theta \neq 0$ ، $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ تساوي ..

Ⓐ $\csc\theta$. Ⓑ $\cot\theta$. Ⓒ $\tan\theta$. Ⓓ $\sec\theta$.

(٣) $\cos(-\theta)$ تساوي ..

Ⓐ $-\cos\theta$. Ⓑ $\cos\theta$. Ⓒ $\sin\theta$. Ⓓ $\sin(-\theta)$.

(٤) $\cos A\cos B - \sin A\sin B$ تساوي ..

Ⓐ $\cos(A-B)$. Ⓑ $\cos(A+B)$. Ⓒ $\sin(A+B)$. Ⓓ $\cos(A-B)$.

(٥) $\cos 2\theta$ تساوي ..

Ⓐ $2\cos\theta\sin\theta$. Ⓑ $2\cos\theta$. Ⓒ $\cos^2\theta$. Ⓓ $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.

(٦) أحد حلول المعادلة $\frac{1}{2} = \cos\theta$ حيث θ تقع في الربع الأول هو ..

Ⓐ $60°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $45°$. Ⓓ $55°$.

السؤال الثاني: ضع علامة ✓ أمام العبارة الصحيحة وعلامة × أمام الخاطئة مما يلي:

(١) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

(٢) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$.

(٣) $\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta$.

(٤) المعادلة $\sin\theta - 2 = 0$ ليس لها حل.

السؤال الثالث: مسائل متنوعة:

(١) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ حيث $270° < \theta < 360°$.

....

....

....

....

....

(٢) بسّط $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$.

....

....

(٣) أثبت أن المعادلة $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$ تُمثل متطابقة.

(٤) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$.

(٥) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، علمًا أن $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ؛ $90° < \theta < 180°$.

(٦) أثبت أن المعادلة $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$ تمثل متطابقة.

(٧) حل المعادلة $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$.

الأجوبة النهائية

أجوبة السؤال الأول: الاختيار من متعدد ..

(١) Ⓐ	(٢) Ⓒ	(٣) Ⓑ	(٤) Ⓑ	(٥) Ⓓ	(٦) Ⓐ

أجوبة السؤال الثاني: بيان الإجابة الصحيحة والخاطئة ..

(١) ✓	(٢) ✓	(٣) ×	(٤) ✓

أجوبة السؤال الثالث: مسائل متنوعة ..

(١) قيمة $\sin\theta$ ..

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ « متطابقة فيثاغورس »

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$ « طرحنا $\cos^2\theta$ من الطرفين »

$$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$ « عوضنا عن $\cos\theta = \frac{1}{3}$ »

$$\sin^2\theta = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ « بسطنا ثم أخذنا الجذر التربيعي »

وبما أن θ تقع في الربع الرابع فإن $\sin\theta$ سالبة؛ ومنه فإن: $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(٢) تبسيط المقدار ..

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta) = \frac{\sec\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta$$ « من علاقة فيثاغورس $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ »

$$= \frac{\sec\theta}{\cancel{\sin\theta}}\cancel{\sin\theta}\sin\theta$$ « حذفنا $\sin\theta$ بسطًا ومقامًا »

$$= \sec\theta\sin\theta$$ « بسطنا »

$$= \frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$$ « عوضنا عن $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ، $\cos\theta \neq 0$ »

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$ « عوضنا عن $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ »

(٣) نحول الطرف الأيسر للمعادلة ..

$$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\cot^2\theta}\right)$$ « أخذنا $\cot^2\theta$ عامل مشترك »

$$= \cot^2\theta\left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\right)$$ « عوضنا عن $\cot^2\theta$ بـ $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ »

$$= \cot^2\theta\left(1 - \cancel{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\right)$$ « بسطنا »

$$= \cot^2\theta(1 - \sin^2\theta)$$ « بسطنا »

$$= \cot^2\theta\cos^2\theta$$ « من علاقة فيثاغورس »

وهو الطرف الأيمن من المعادلة

(٤) نختار زاويتين معلومتين الفرق بينهما $15°$ ، ثم نوجد الدالة المثلثية الناتجة من متطابقة الفرق ..

$$\sin 15° = \sin(60° - 45°)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$ « متطابقة الفرق »

$$\sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$$ « أخذنا $A = 60°, B = 45°$ »

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ « عوضنا عن النسب المثلثية »

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$ « بسطنا »

(٥) لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ نحسب $\sin\theta$ ..

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ « متطابقة فيثاغورس »

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$ « بطرح $\cos^2\theta$ من الطرفين »

$$\sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$ « عوضنا عن $\cos\theta = \frac{1}{3}$ »

$$\sin^2\theta = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ « بسطنا ثم أخذنا الجذر التربيعي للطرفين »

وبما أن $90° < \theta < 180°$ فإن θ تقع في الربع الثاني و $\sin\theta$ موجبة ؛ ومنه فإن $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ..

نستعمل تعريف دالة الظل لإيجاد $\tan\theta$ ، ثم نُوجد ـ الآن ـ القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ..

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}} \times -\frac{\cancel{3}}{1} = -2\sqrt{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2(-2\sqrt{2})}{1 - (-2\sqrt{2})^2} = \frac{-4\sqrt{2}}{1 - 8} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

(٦) نبدأ بالطرف الأيسر ..

$$4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^2 x - (\sin 2x)^2$$ « أعدنا صياغة $\sin^2 2x$ »

$$= 4\cos^2 x - (2\sin x \cos x)^2$$ « عوضنا عن $\sin 2x$ »

$$= 4\cos^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x$$ « فككنا »

$$= 4\cos^2 x(1 - \sin^2 x)$$ « أخذنا $4\cos^2 x$ عامل مشترك »

$$= 4\cos^2 x \cos^2 x = 4\cos^4 x$$ « عوضنا عن $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ »

(٧) نستعمل متطابقة فيثاغورس ..

$$\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$$

$$1 - \cos^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$$ « عوضنا عن $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ »

$$1 + \cos^2\theta = 4$$ « بسطنا »

$$\cos^2\theta = 3 \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{3}$$ « طرحنا 1 من الطرفين ثم أخذنا الجذر التربيعي »

$\therefore$ المعادلة ليس لها حل لأن قيم $\cos\theta$ لا تقع بين 1 و -1

الفصل ٤ : القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة:

(١) رأس القطع المكافئ $(y+1)^2 = 3(x-2)$ النقطة ..

Ⓐ $(-1,2)$. Ⓑ $(2,1)$. Ⓒ $(2,-1)$. Ⓓ $(3,-1)$.

(٢) طول الوتر البؤري للقطع $(x+3)^2 = -12(y-4)$ يساوي .... وحدة.

Ⓐ 3 . Ⓑ 4 . Ⓒ 12 . Ⓓ 24 .

(٣) القطع الناقص $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ مركزه النقطة ..

Ⓐ $(-1,-3)$. Ⓑ $(-3,-1)$. Ⓒ $(3,1)$. Ⓓ $(1,3)$.

(٤) البعد بين المركز والرأس المرافق في القطع الناقص $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ تساوي ..

Ⓐ وحدتان. Ⓑ 4 وحدات. Ⓒ 8 وحدات. Ⓓ 16 وحدة.

(٥) في القطع الناقص $\frac{(x+6)^2}{9} + (y-4)^2 = 1$ ؛ البعد بين المركز و .... يساوي 3 وحدات.

Ⓐ الرأس Ⓑ الرأس المرافق Ⓒ البؤرة Ⓓ المحور x

(٦) مركز القطع الناقص $\frac{(y-1)^2}{9} + \frac{(x+2)^2}{4} = 1$ النقطة ..

Ⓐ $(-1,2)$. Ⓑ $(1,-2)$. Ⓒ $(-2,1)$. Ⓓ $(9,4)$.

(٧) القطع الناقص $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{5} = 1$ محوره الأكبر ..

Ⓐ أفقي. Ⓑ رأسي. Ⓒ مائل.

(٨) البعد بين المركز والرأس في القطع الناقص $\frac{(y-6)^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{16} = 1$ يساوي .... وحدات.

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 10

(٩) قيمة الاختلاف المركزي e في القطع الناقص تنحصر بين 0 و ..

Ⓐ -2 . Ⓑ -1 . Ⓒ 1 . Ⓓ 2 .

(١٠) عندما $e = 0$ فإن القطع الناقص يصبح ..

Ⓐ قطعًا مكافئًا. Ⓑ قطعًا زائدًا. Ⓒ دائرةً.

(١١) مركز الدائرة $x^2 + (y+1)^2 = 16$ النقطة ..

Ⓐ $(0,1)$. Ⓑ $(0,-1)$. Ⓒ $(-1,0)$. Ⓓ $(1,16)$.

(١٢) نصف قطر الدائرة $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ يساوي ..

Ⓐ وحدة واحدة. Ⓑ وحدتان. Ⓒ 3 وحدات. Ⓓ 9 وحدات.

(١٣) مركز القطع الزائد $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ النقطة ..

Ⓐ $(2,1)$. Ⓑ $(-2,1)$. Ⓒ $(1,2)$. Ⓓ $(4,9)$.

(١٤) البعد بين المركز والرأس في القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$ يساوي ..

Ⓐ وحدتين. Ⓑ 4 وحدات. Ⓒ 8 وحدات. Ⓓ 16 وحدة.

(١٥) طول المحور القاطع في القطع الزائد $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ يساوي .... وحدات.

Ⓐ 3 . Ⓑ 4 . Ⓒ 6 . Ⓓ 8 .

(١٦) القطع الزائد $\frac{(y-3)^2}{3} - \frac{x^2}{5} = 1$ محوره القاطع ..

Ⓐ أفقي. Ⓑ رأسي. Ⓒ مائل.

(١٧) طول المحور المرافق في القطع الزائد $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$ يساوي ..

Ⓐ وحدتين. Ⓑ 4 وحدات. Ⓒ 8 وحدات. Ⓓ 16 وحدة.

(١٨) قيمة الاختلاف المركزي e في القطع الزائد ..

Ⓐ أصغر من 0 . Ⓑ أصغر من 1 . Ⓒ أكبر من 1 . Ⓓ $0 \le e < 1$.

(١٩) في المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ إذا كان المميز $B^2 - 4AC = 0$ فإن المعادلة تمثل ..

Ⓐ دائرةً. Ⓑ قطعًا مكافئًا. Ⓒ قطعًا ناقصًا. Ⓓ قطعًا زائدًا.

(٢٠) إذا كانت المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ تمثل قطعًا زائدًا فإن ..

Ⓐ $B^2 - 4AC = 0$. Ⓑ $B^2 - 4AC > 0$. Ⓒ $B^2 - 4AC < 0$.

(٢١) المسافة الأفقية x لجسم قُذف بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق تعطى بالمعادلة ..

Ⓐ $t\,v_0 \cos\theta$. Ⓑ $t\,v_0 \sin\theta$. Ⓒ $t\,v_0 \tan\theta$. Ⓓ $t\,v_0 \cos^2\theta$.

السؤال الثاني: ضع علامة ✓ أمام العبارة الصحيحة وعلامة × أمام الخاطئة مما يلي:

(١) القطع المكافئ $(y+1)^2 = -9(x-2)$ مفتوح أفقيًا.

(٢) القطع المكافئ الذي رأسه $(3,7)$ وبؤرته $(3,2)$ مفتوح أفقيًّا.

السؤال الثالث: مسائل متنوعة:

(١) اكتب المعادلة $3y^2 + 6y + 15 = 12x$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائصه.

....

....

....

....

....

(٢) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-6, 2)$ ورأسه $(-6, -1)$.

(٣) حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

(٤) حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

(٥) حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{x^2}{18}+\frac{(y+8)^2}{48}=1$.

(٦) حدد خصائص القطع الزائد $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

....

(٧) اكتب معادلة القطع الزائد الذي رأساه $(3,6)$, $(3,2)$ وطول المحور المرافق 10 وحدات.

....

(٨) حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$.

....

(٩) حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$ دون كتابتها على الصورة القياسية « باستخدام المميز ».

....

(١٠) استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $xy = -8$ في المستوى $x`y`$ ، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

....

(١١) اكتب معادلة القطع المخروطي $(x`)^2 = 8\,y`$ في المستوى xy إذا كانت زاوية الدوران $\theta = 45°$.

(١٢) مثل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين $x = 3t\ ,\ y = \sqrt{t} + 6$ حيث $0 \leq t \leq 8$.

(١٣) اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = t^2 - 5\ ,\ y = 4t$ بالصورة الديكارتية.

(١٤) يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية $0.75\ m/s$ ويصنع زاوية مقدارها $45°$ مع الأفق، وينخفض سطح الجدول $0.3\ m$ عن الحافة التي قفز منها الضفدع، افترض أن $g = 9.8\ m/s^2$ ؛ اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t مفترضًا أن سطح الماء يمثل بالمستقيم $y = 0$.

الأجوبة النهائية

أجوبة السؤال الأول: الاختيار من متعدد ..

(١) Ⓒ	(٢) Ⓒ	(٣) Ⓒ	(٤) Ⓐ	(٥) Ⓐ	(٦) Ⓒ	(٧) Ⓑ
(٨) Ⓒ	(٩) Ⓒ	(١٠) Ⓒ	(١١) Ⓑ	(١٢) Ⓒ	(١٣) Ⓑ	(١٤) Ⓑ
(١٥) Ⓒ	(١٦) Ⓑ	(١٧) Ⓑ	(١٨) Ⓒ	(١٩) Ⓑ	(٢٠) Ⓑ	(٢١) Ⓐ

أجوبة السؤال الثاني: بيان الإجابة الصحيحة والخاطئة ..

(١) ✓	(٢) ×

أجوبة السؤال الثالث: مسائل متنوعة ..

(١) نكتب المعادلة على الصورة القياسية ..

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x$$
$$3y^2 + 6y = 12x - 15$$
$$3(y^2 + 2y) = 12x - 15$$
$$3(y^2 + 2y + 1) = 12x - 15 + 3(1)$$
$$3(y+1)^2 = 12x - 12$$
$$(y+1)^2 = 4x - 4$$
$$(y+1)^2 = 4(x-1)$$

نُحدد ـ الآن ـ خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** المنحنى مفتوح أفقيًا.
- **الرأس:** $(h,k) = (1,-1)$.
- **البؤرة:** $(h+p,k) = (1+1,-1) = (2,-1)$.
- **معادلة محور التماثل:** $y = k = -1$.
- **معادلة الدليل:** $x = h - p = 1 - 1 = 0$.
- **طول الوتر البؤري:** $|4p| = |4(1)| = 4$.

مقارنة معادلة القطع بالصورة القياسية

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y+1)^2 = 4(x-1)$$
$$k = -1 \ , \ h = 1$$
$$4p = 4 \ \Rightarrow \ p = 1 > 0$$

(٢) بما أن البؤرة والرأس لهما نفس الإحداثي x فإن القطع مفتوح رأسيًا ..

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع على الصورة $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

أولاً: من الرأس نُوجد h, k ..

$$(h,k) = (-6,-1) \ \Rightarrow \ h = -6 \ , \ k = -1$$

ثانيًا: من البؤرة نُوجد p ..

$$(h, k+p) = (-6,2) \ \Rightarrow \ k+p = 2 \ \Rightarrow \ -1+p = 2 \ \Rightarrow \ p = 2+1 = 3$$

ثالثًا: نُوجد معادلة القطع ..

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$[x-(-6)]^2 = 4(3)\big(y-(-1)\big)$$

$$(x+6)^2 = 12(y+1)$$

(٣) **أولاً:** نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** المحور الأكبر أفقي.
- **المركز:** $(h,k) = (-4,-3)$.
- **البؤرتان:** $(h \pm c, k) = (-4 \pm \sqrt{5}, -3)$.

∴ البؤرتان $(-4-\sqrt{5},-3), (-4+\sqrt{5},-3)$

- **الرأسان:** $(h \pm a, k) = (-4 \pm 3, -3)$.

∴ الرأسان $(-7,-3), (-1,-3)$

- **الرأسان المرافقان:** $(h, k \pm b) = (-4, -3 \pm 2)$.

∴ الرأسان المرافقان $(-4,-5), (-4,-1)$

- **المحور الأكبر:** $y = k = -3$.
- **المحور الأصغر:** $x = h = -4$.

ثانيًا: نرسم منحنى القطع ..

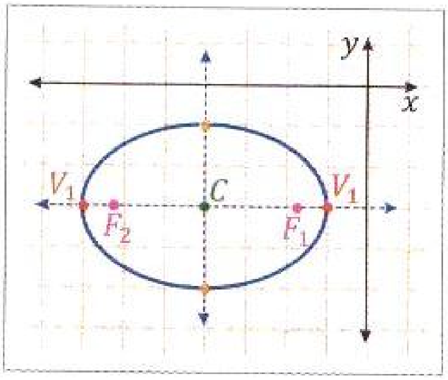
مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

h	k	a	b	c
-4	-3	3	2	$\sqrt{5}$



(٤) **أولاً:** نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** المحور الأكبر رأسي.
- **المركز:** $(h,k) = (6,-3)$.
- **البؤرتان:** $(h, k \pm c) = (6, -3 \pm \sqrt{7})$.

∴ البؤرتان $(6,-3-\sqrt{7}), (6,-3+\sqrt{7})$

- **الرأسان:** $(h, k \pm a) = (6, -3 \pm 4)$.

∴ الرأسان $(6,1), (6,-7)$

- **الرأسان المرافقان:** $(h \pm b, k) = (6 \pm 3, -3)$.

∴ الرأسان المرافقان $(9,-3), (3,-3)$

- **المحور الأكبر:** $x = h = 6$.
- **المحور الأصغر:** $y = k = -3$.

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

h	k	a	b	c
6	-3	4	3	$\sqrt{7}$

(٥) نُحدد قيمتي a, c ..

$$a^2 = 48 \Rightarrow a = \sqrt{48} \quad , \quad b^2 = 18 \; ,$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{48 - 18} = \sqrt{30}$$

نُوجد ـ الآن ـ الاختلاف المركزي e ..

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{48}} \approx 0.79$$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-0)^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$$

(٦) **أولاً:** نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** أفقي « الحد المطروح منه يحوي x ».
- **المركز:** $(h, k) = (0, 0)$.
- **الرأسان:** $(h \pm a, k) = (0 \pm 2, 0)$.

$\therefore$ الرأسان $(2, 0), (-2, 0)$

- **البؤرتان:** $(h \pm c, k) = (0 \pm \sqrt{5}, 0)$.

$\therefore$ البؤرتان $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

- **المحور القاطع:** $y = k = 0$.
- **المحور المرافق:** $x = h = 0$.
- **خطا التقارب:** $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$.

$$y - 0 = \pm\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$$

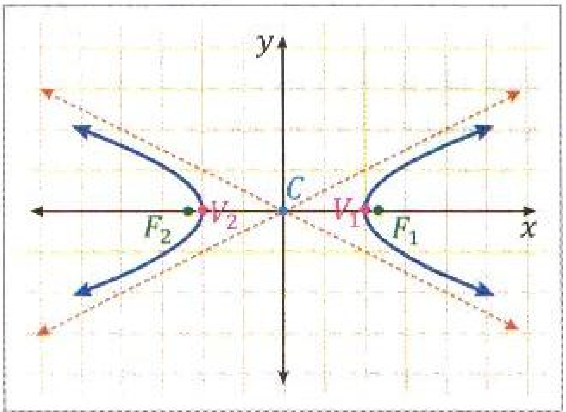
$\therefore$ خطا التقارب هما $y = \frac{1}{2}x \; , \; y = -\frac{1}{2}x$

ثانيًا: نرسم منحنى القطع ..

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-0)^2}{1} = 1$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

h	k	a	b	c
0	0	2	1	$\sqrt{5}$



(٧) بما أن رأسي القطع لهما نفس الإحداثي x فإن المحور القاطع رأسي ..

$\therefore$ المعادلة المطلوبة على الصورة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

نُحدد ـ الآن ـ h, k, a, b ..

بما أن المركز (h, k) في منتصف البعد بين الرأسين $(3, 6), (3, 2)$ فإن ..

$$(h, k) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (3, 4) \Rightarrow h = 3 \, , k = 4$$

وبما أن المسافة بين الرأسين يساوي $2a$ ومن قانون المسافة فإن ..

$$2a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (2-6)^2} = 4 \Rightarrow a = 2$$

وبما أن طول المحور المرافق يساوي $2b$ فإن ..

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

وبالتعويض في الصورة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ عن h,k,a,b ..

∴ المعادلة المطلوبة هي $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{25}=1$

(٨) نُحدد قيمتي $a\,,c$ ..

$$a^2=64 \;\Rightarrow\; a=\sqrt{64}=8 \;,\; b^2=80 \;,$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+80}=\sqrt{144}=12$$

نُوجد ـ الآن ـ الاختلاف المركزي e ..

$$e=\frac{c}{a}=\frac{12}{8}=1.5$$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{(y-4)^2}{80}=1$$

(٩) نُعيد كتابة المعادلة لترتيبها ..

$$-6x^2+8y^2+4xy-6x+2y-4=0$$

نُحدد ـ الآن ـ قيمة المميز ..

$$\text{المميز}=B^2-4AC=4^2-4(-6)(8)=208>0$$

∴ المعادلة تمثل قطعًا زائدًا

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$Ax^2 \;+Bxy \;+Cy^2 \;+Dx \;+Ey \;+F=0$$
$$-6x^2 \;+4xy \;+8y^2 \;-6x \;+2y \;-4=0$$
$$A=-6 \;,\; B=4 \;,\; C=8$$

(١٠) بما أن المطلوب كتابة المعادلة في المستوى $x`y`$ فإننا نستخدم صيغتي الدوران التاليتين:

$\boldsymbol{y=x`\sin\theta+y`\cos\theta}$	$\boldsymbol{x=x`\cos\theta-y`\sin\theta}$
$y=x`\sin 45^\circ+y`\cos 45^\circ$ $=x`\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)+y`\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $=\frac{\sqrt2(x`+y`)}{2}$	$x=x`\cos 45^\circ-y`\sin 45^\circ$ $=x`\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)-y`\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $=\frac{\sqrt2\,(x`-y`)}{2}$

نعوض ـ الآن ـ عن x,y في المعادلة $xy=-8$ ..

$$\left(\frac{\sqrt2(x`-y`)}{2}\right)\left(\frac{\sqrt2(x`+y`)}{2}\right)=-8$$
$$\frac{2\left((x`)^2-(y`)^2\right)}{4}=-8$$
$$2(x`)^2-2(y`)^2=-32$$
$$\frac{(y`)^2}{16}-\frac{(x`)^2}{16}=1$$

(١١) بما أن المطلوب كتابة معادلة القطع في المستوى xy فإننا نستخدم صيغتي الدوران التاليتين:

$\boldsymbol{y`=y\cos\theta-x\sin\theta}$	$\boldsymbol{x`=x\cos\theta+y\sin\theta}$
$y`=y\cos 45^\circ-x\sin 45^\circ$ $=y\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)-x\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $=\frac{\sqrt2\,(y-x)}{2}$	$x`=x\cos 45^\circ+y`\sin 45^\circ$ $=x\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)+y\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)$ $=\frac{\sqrt2\,(x+y)}{2}$

نعوض ـ الآن ـ عن $x`, y`$ في المعادلة $(x`)^2 = 8y`$ ..

$$\left(\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{\sqrt{2}(y-x)}{2}\right)$$

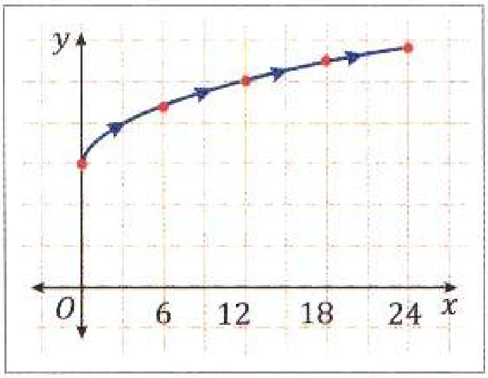
$$\frac{2(x^2+2xy+y^2)}{4} = 4\sqrt{2}\,y - 4x$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 16\sqrt{2}\,y - 16x$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 16x - 16\sqrt{2}\,y = 0$$

(١٢) نكون جدولاً لقيم x, y بناءً على قيم t ثم نرسم المنحنى على شبكة التربيع كما يلي:

t	$x = 3t$	$y = \sqrt{t} + 6$	(x, y)
0	$3(0) = 0$	$\sqrt{0} + 6 = 6$	$(0, 6)$
2	$3(2) = 6$	$\sqrt{2} + 6 = 7.4$	$(6, 7.4)$
4	$3(4) = 12$	$\sqrt{4} + 6 = 8$	$(12, 8)$
6	$3(6) = 18$	$\sqrt{6} + 6 = 8.4$	$(18, 8.4)$
8	$3(8) = 24$	$\sqrt{8} + 6 = 8.8$	$(24, 8.8)$



(١٣) نُوجد قيمة المتغير الوسيط t من المعادلة $y = 4$ ..

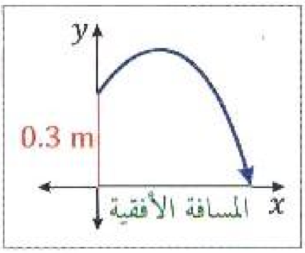
$$y = 4t \Rightarrow t = \frac{y}{4}$$

نُعوض بقيمة t في المعادلة الثانية $x = t^2 - 5$ ..

$$x = \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 5$$

$\therefore$ الصورة الديكارتية هي $x = \frac{y^2}{16} - 5$

(١٤) نكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t ..



أولاً: المسافة الأفقية ..

$$x = t\,v_0 \cos\theta = t\,(0.75)\cos 45° = \frac{3\sqrt{2}}{8}t$$

ثانيًا: المسافة الرأسية ..

$$y = t\,v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0 = t(0.75)\sin 45° - \frac{1}{2}(9.8)t^2 + 0.3$$

$$\therefore \quad y = \frac{3\sqrt{2}}{8}t - 4.9t^2 + 0.3$$