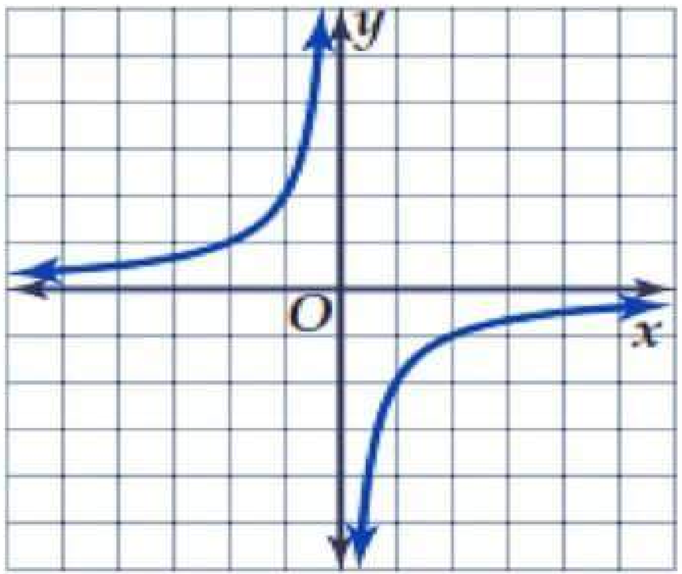
التهيئة للفصل 8

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

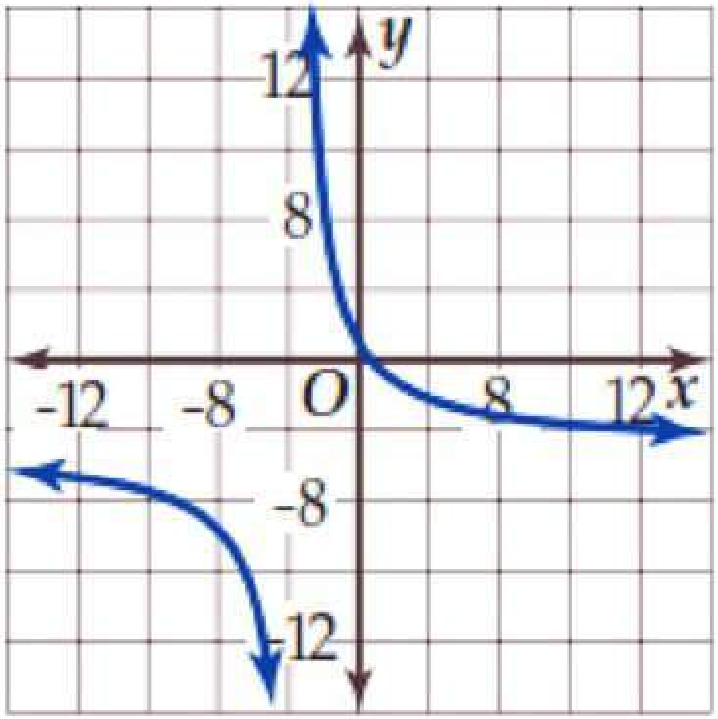
1) $q(x) = -\frac{2}{x}$



يظهر من المنحنى أن $g(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$ ، و

$g(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$

$$m(x) = \frac{7 - 10x}{2x + 7} \quad (2$$



يظهر من المنحنى أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$ ، و

$f(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$

3) **صناعة:** يمكن تقدير معدل التكلفة بالريال لإنتاج x قطعة من منتج ما باستعمال الدالة $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة باستعمال التمثيل البياني للحاسبة البيانية عندما تقترب x من موجب مالانهاية.

تقترب قيمة $A(x)$ من 1200 عندما تقترب x من موجب ما لا نهاية.

4) أوجد متوسط مُعدّل تغيّر الدالة $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6$، على الفترة $[-4, -1]$

- 17

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

5) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2 + 1}$

$y = 2$

6) $h(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 10}$

$x = 10$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$$ (7

$x = -2, x = 4, y = 1$

$$g(x) = \frac{x^2 - 16}{(x-2)(x+4)}$$ (8

$x = 2, y = 1$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي:

(9 $8, 3, -2, -7, \ldots$ — $-12, -17, -22, -27$

(10 $5, -1, -7, -13, \ldots$ — $-19, -25, -31, -37$

(11 $5, -10, 20, -40, \ldots$ — $80, -160, 320, -640$

(12 $-28, -21, -14, -7, \ldots$ — $0. 7, 14, 21$

تقدير النهايات بيانيا

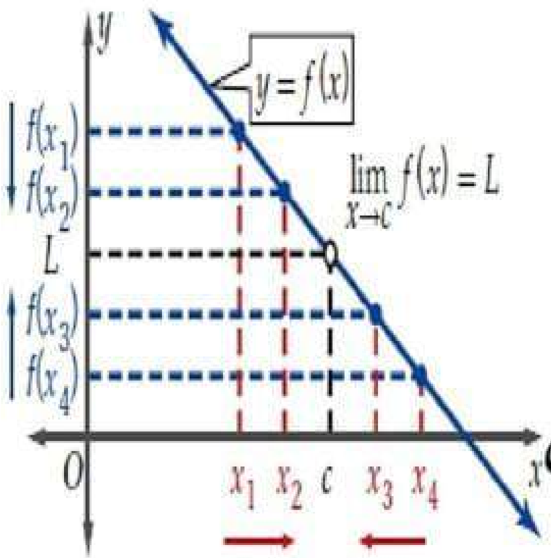
يتمحور علم التفاضل والتكامل حول مسألتين أساسيتين هما :-

1- ايجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه .

2-ايجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لمنحنى دالة المحور X وتعد مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين .

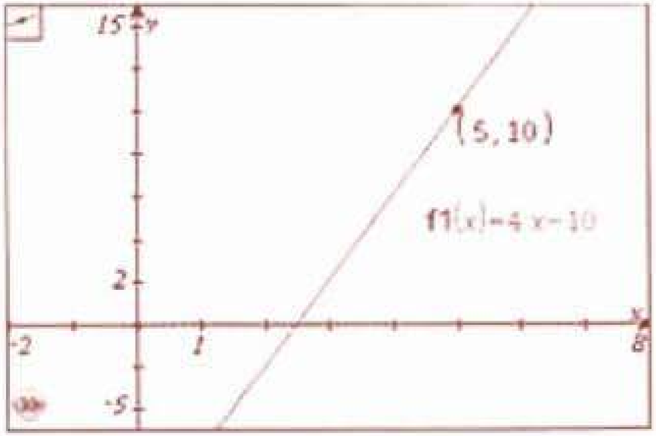
إذا اقتربت قيم f(x) من قيمة وحيدة L،
كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين
فإنها تكتب على الصورة يمكنك $\lim_{x\to c} f(x) = L$

تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x ن العدد c ، أو $\lim_{x\to c} f(x)$ ، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيا ، أو إنشاء جدول لقيم $f(x)$.



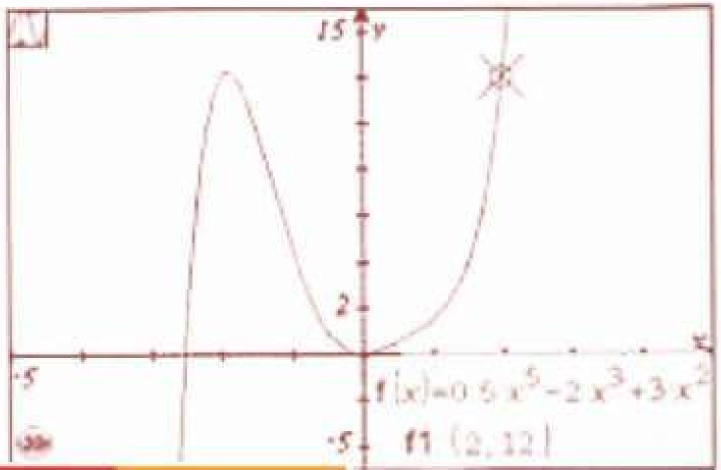
تدرب وحل المسائل

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم. إرشاد:" يمكنك استعمال الآلة البيانية للتمثيل البياني". (المثالان 1, 2)



1) $\lim_{x \to 5} (4x - 10)$ **10**

x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

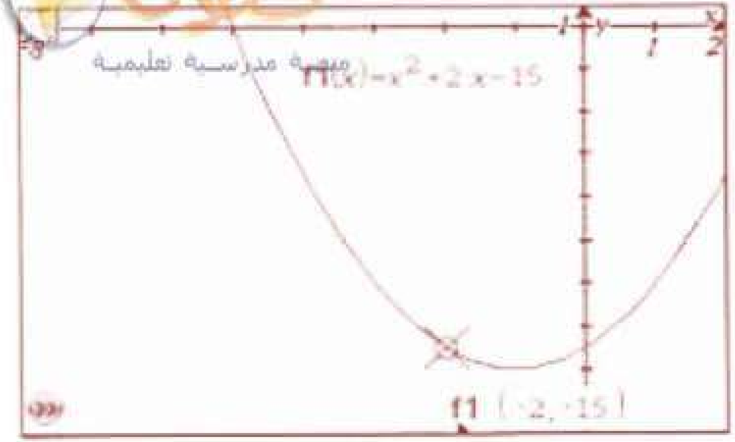


2) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}x^5 - 2x^3 + 3x^2\right)$ **12**

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

$$\lim_{x \to -2} (x^2 + 2x - 15) \quad (3$$

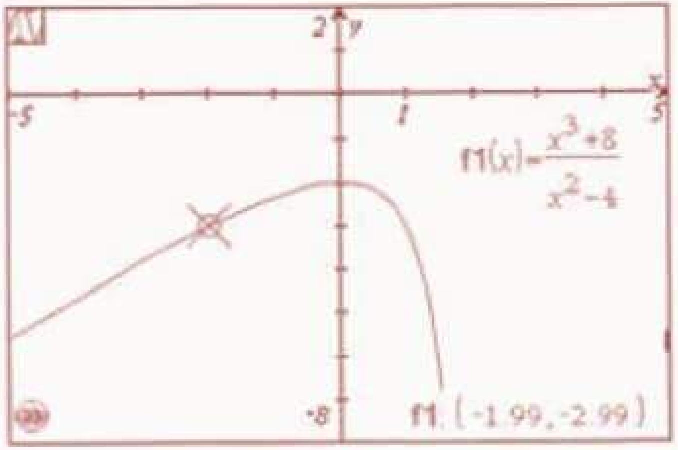
$$-15$$



x	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-14.98	-14.998		-15.002	-15.02

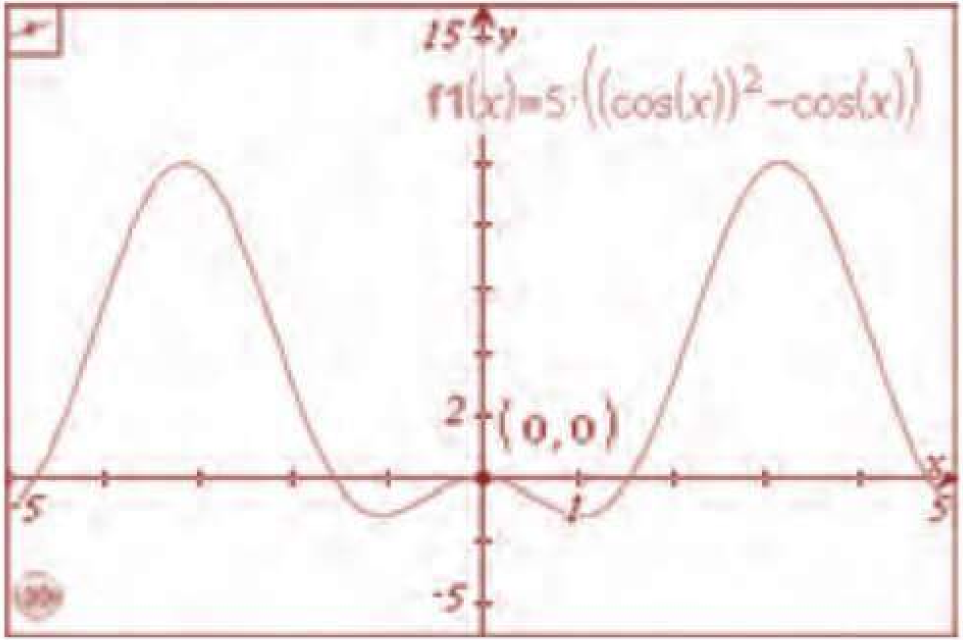
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \quad (4$$

$$-3$$



x	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-3.008	-3.0008		-2.9993	-2.993

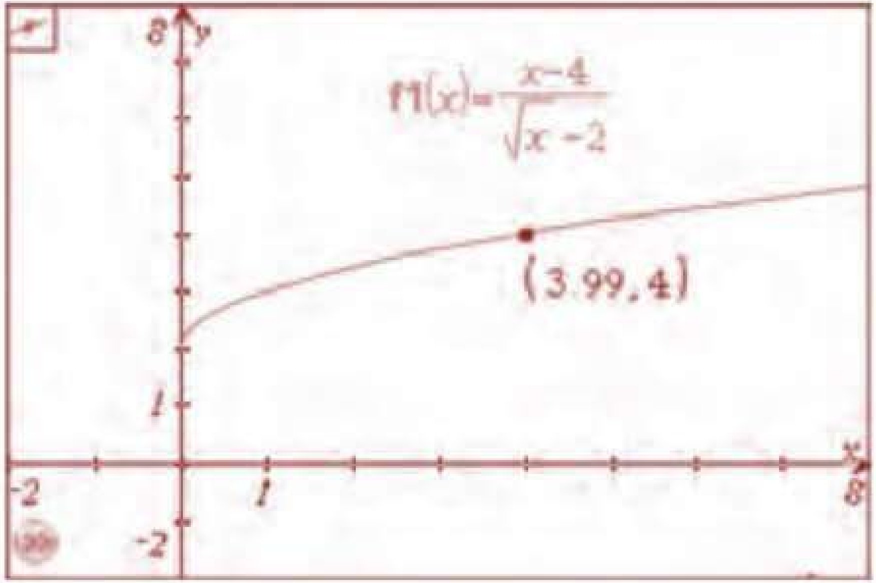
5) $\lim_{x \to 0} [5(\cos^2 x - \cos x)]$ **0**



x	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01
$f(x)$	-0.0002	-0.000002		-0.000002	-0.0002

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad (6$$

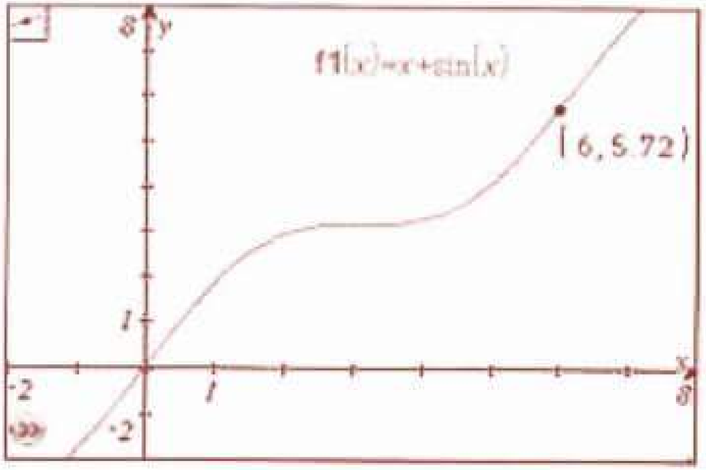
4



x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.997	3.9997		4.0002	4.002

7) $\lim_{x \to 6} (x + \sin x)$

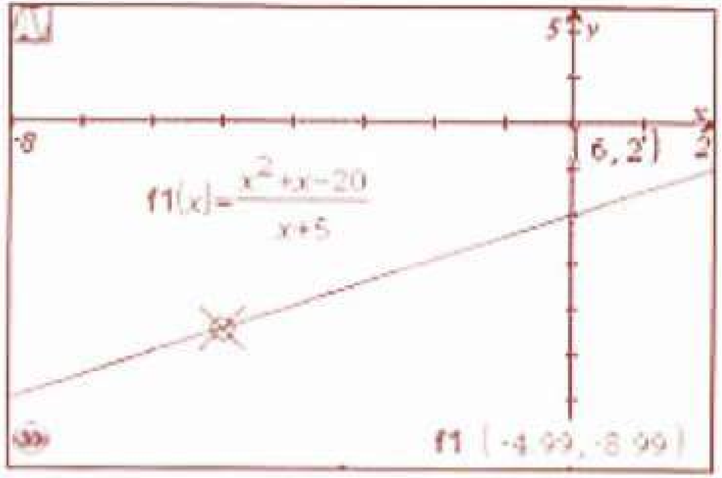
5.72



x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

8) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$

−9



x	-5.01	-5.001	-5	-4.999	-4.99
$f(x)$	-9.01	-9.001		-8.999	-8.99

حلول
منصة مدرسية تعليمية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

9) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x}$

0

10) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|4x|}{x}$

-4

11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{|x|}$

0

12) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

1

13) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{|2x + 1|}{x}$

0

14) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{|x + 2|}$

غير موجودة

15) $\lim\limits_{x \to 0^-} (\sqrt{-x} - 7)$

-7

16) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

10

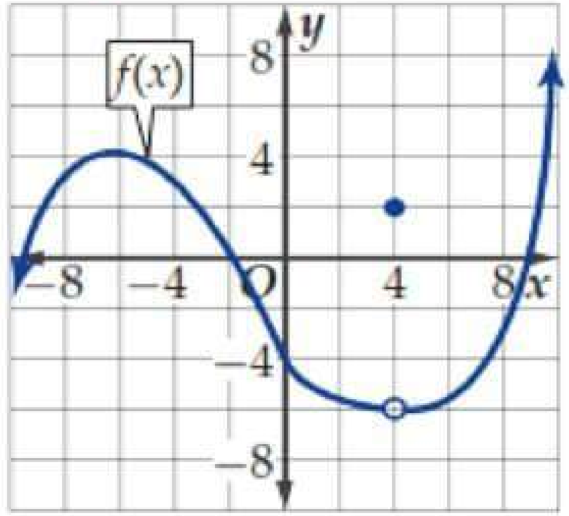
17) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|3x|}{2x}$

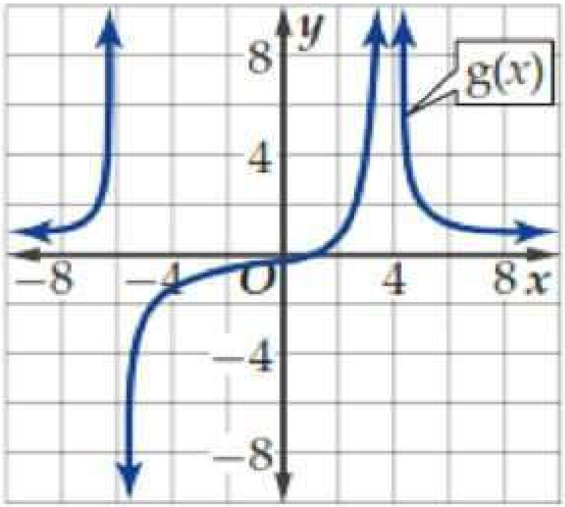
غير موجودة

18) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{|x + 1|}{x^2 - 1}$

غير موجودة

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة.





21) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ **3**

22) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ **∞**

23) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **-6**

24) $\lim\limits_{x \to -6} g(x)$ **غير موجودة**

قدّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

25) $\lim_{x \to -4} \frac{-17}{x^2 + 8x + 16}$ $-\infty$

26) $\lim_{x \to 4} \frac{|x|}{x - 4}$ غير موجودة

27) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{x^2 - 10x + 25}$ ∞

28) $\lim_{x \to 6} \frac{5}{(x - 6)^2}$ ∞

29) $\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 7x^4 - 4x + 1)$ $-\infty$

30) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 22}{4x^3 - 13}$ 0

31) $\lim_{x \to \infty} x \cos x$ غير موجودة

32) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}$ -1

33) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin |x|}{x}$ غير موجودة

34) $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ 0

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدّ من عدوى مرض ما. ويُبيّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7)

a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w)$ ، $\lim_{w\to 3} f(w)$.

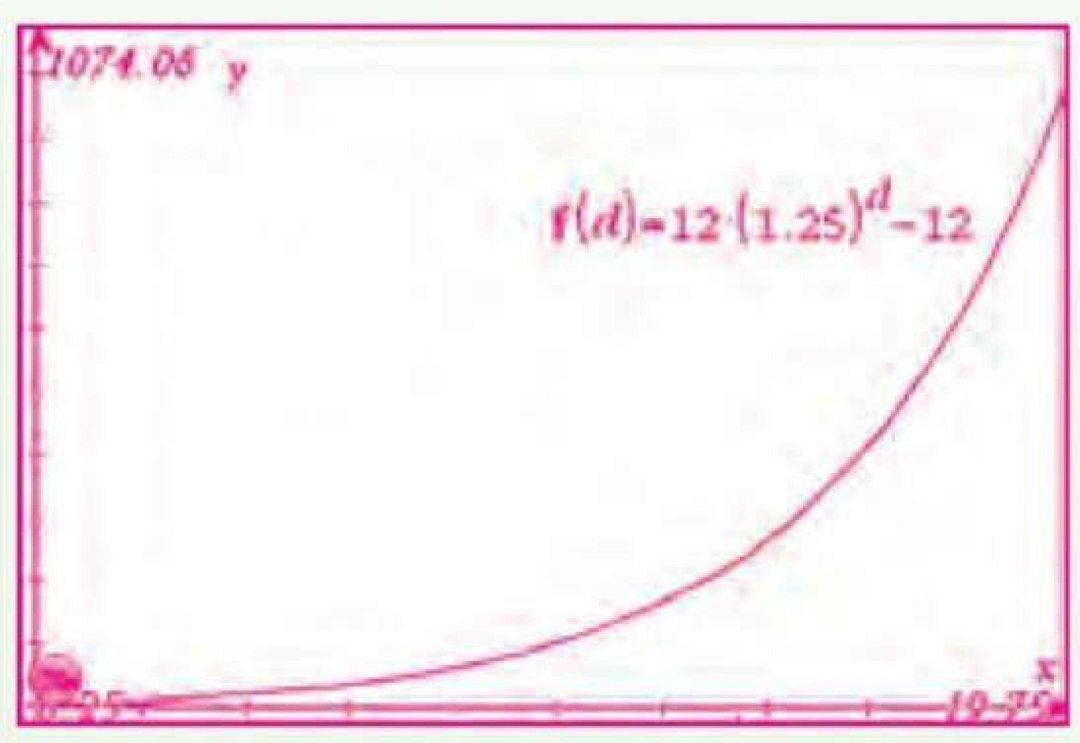
$$\lim_{w\to 1} f(w) = 250\ ;\quad \lim_{w\to 3} f(w) = 100$$

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to\infty} f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

0 ؛ إجابة ممكنة : سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن

36) **برامج تلفزيونية :** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $f(d) = 12(1.25012)^d - 12$، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7)

a) مَثِّل الدالة $f(d)$ بيانيًّا في الفترة $0 \leq d \leq 20$.



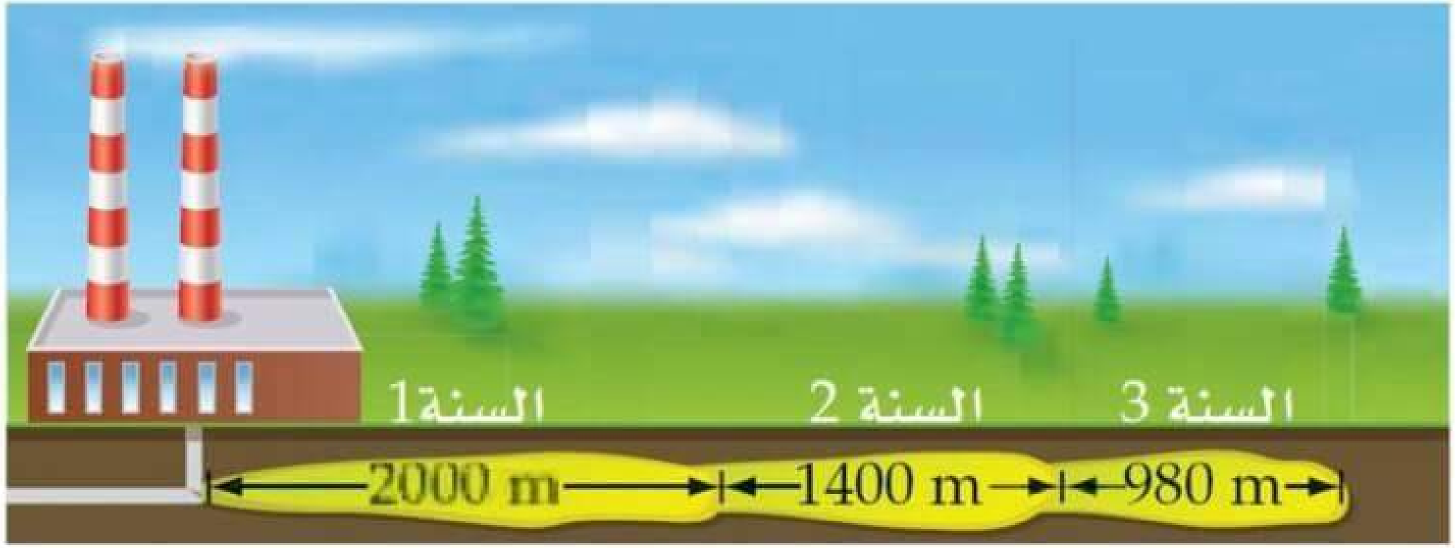
b) ما عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر ، العشرين، بعد شهرين($d = 60$)؟

نحو 25 ، نحو 100، نحو 1031، نحو 7875584 شخصًا سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين .

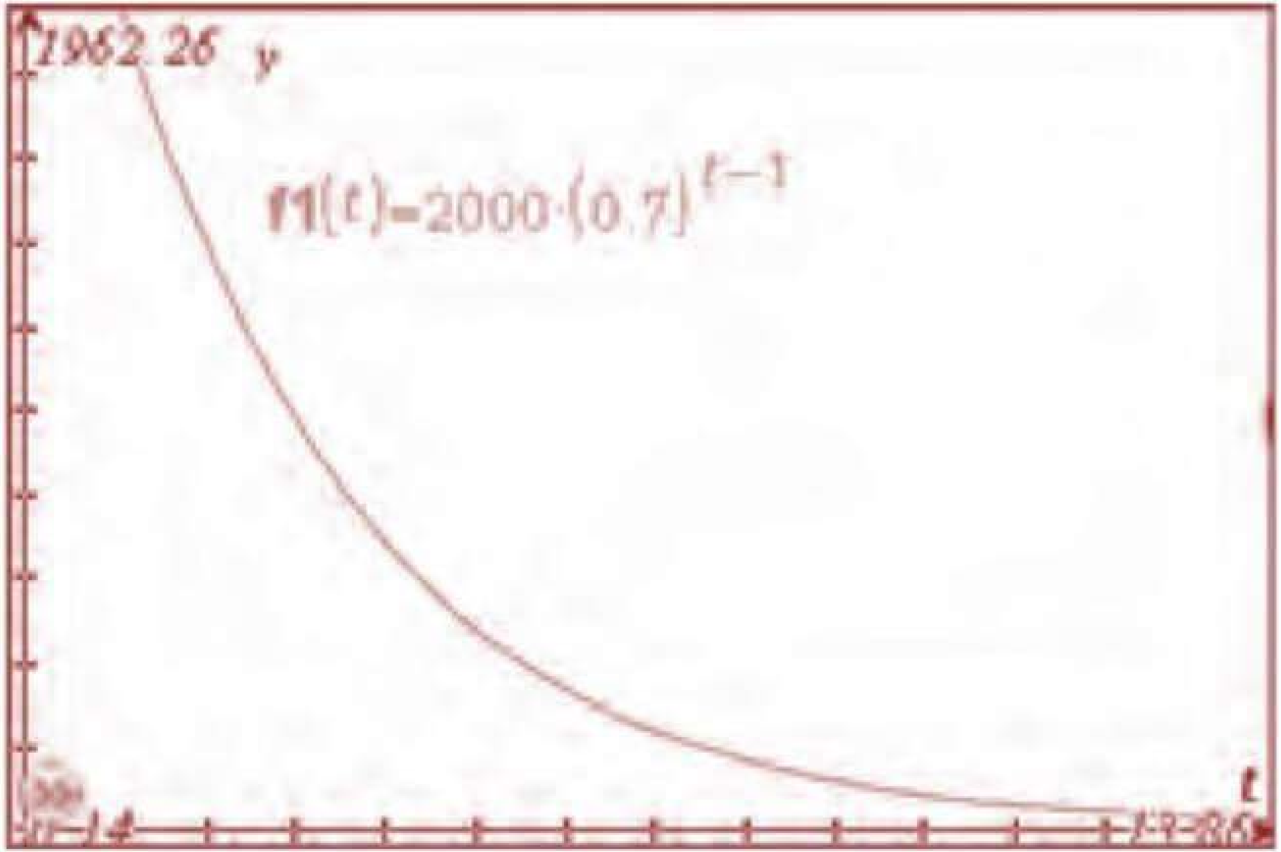
c) قدِّر $\lim\limits_{d\to\infty} f(d)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

∞، إجابة ممكنة: يعني الناتج أن عدد مشاهدي البرنامج سيزداد بشكل لا نهائي.

(37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أنبوب غاز تحت الأرض كما في الشكل أدناه. ويعبَّر عن المسافة الأفقية بالأمتار التي تقطعها المادة المتسرِّبة بالدالة $d(t) = 2000(0.7)^{t-1}, t \geq 1$ ، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرُّب. **(مثال 7)**



a) مَثل باستعمال الآلة البيانية الدالة بيانيًا في الفترة $1 \le t \le 15$.



b) استعمل التمثيل البياني وخاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية لإيجاد قيم d عندما $t = 5, 10, 15$.

480.2 , 80.71 , 13.56

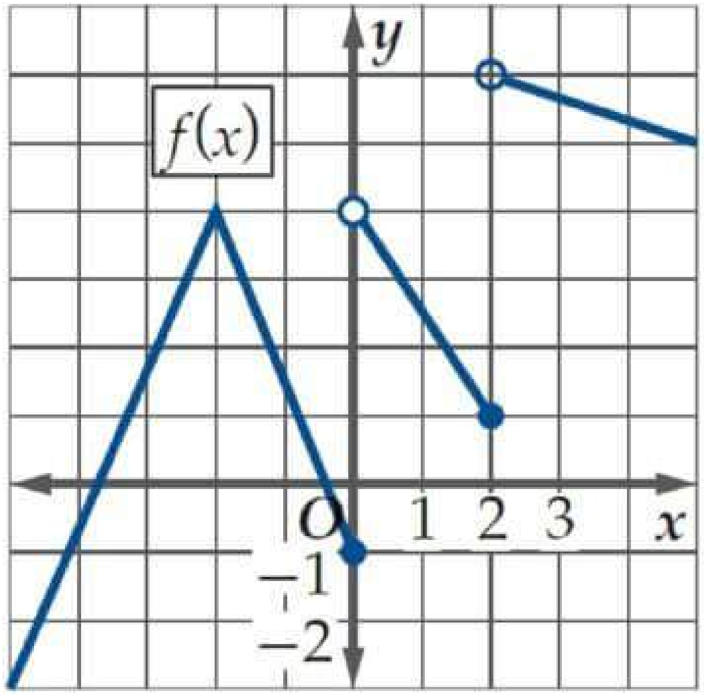
c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} d(t)$.

0

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسرِّبة لمستشفى يقع على بُعد 7000 m من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هو $\frac{a_1}{1-r}$.

لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية 6666.67 m تقريبًا، وهو أقل من 7000 m ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

للدالة الممثَّلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



38) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ -1

39) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ 4

40) $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

41) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ 1

42) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ 6

43) $\lim_{x \to 1} f(x)$ 2.5

حاسبة بيانية: حدِّد ما إذا كانت النهاية موجودة أو غير موجودة في كل مما يأتي. وإذا لم تكن موجودة، فصف التمثيل البياني للدالة عند نقطة النهاية:

44) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x=2$

45) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$

غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x=$

46) $\lim\limits_{x \to 0} 3 \cos \frac{\pi}{x}$

غير موجودة؛ تذبذب

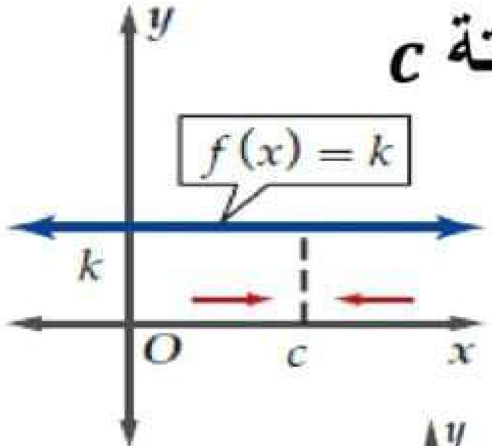
47) $\lim\limits_{x \to -5} \frac{|x + 5|}{x + 5}$

غير موجودة؛ تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد 5− من اليمين ومن اليسار.

حساب النهايات جبريا

نهايات الدوال

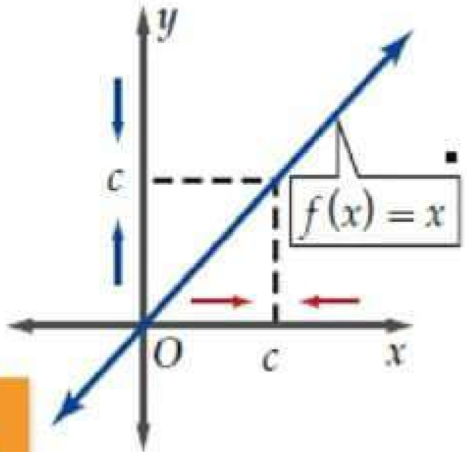
نهايات الدوال الثابتة



نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة للدالة هى القيمة الثابتة c

الرموز : $\lim_{x \to c} k = k$

نهايات الدوال المحايدة



نهاية الدالة المحايدة عند نقطة c هى c .

الرموز : $\lim_{x \to c} x = c$

تدرب وحل المسائل استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to -3} (5x - 10)$ $\quad -25$

2) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 4x + 13}{x - 3}$ $\quad 29$

3) $\lim_{x \to 9} \left(\frac{1}{x} + 2x + \sqrt{x}\right)$ $\quad 21.11$

4) $\lim_{x \to -4} [x^2(x + 1) + 2]$ $\quad -46$

5) $\lim_{x \to 12} \frac{x^2 - 10x}{\sqrt{x + 4}}$ $\quad 6$

6) $\lim_{x \to -6} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$ $\quad 42$

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2)

7) $\lim_{x\to16} \frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$ ليس ممكنا ؛ فالمقام يساوي صفرا عندما $x = 16$.

8) $\lim_{x\to2} (4x^3-3x^2+10)$ **30**

9) $\lim_{x\to3} \frac{x^3+9x+6}{x^2+5x+6}$ **2**

10) $\lim_{x\to3} \sqrt{2-x}$ ليس ممكنا ؛ قيمة الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$ ، هي $\sqrt{-1}$ عندما $x=3$ وهي ليست معرفة .

11) $\lim_{x\to9} (3x^2-10x+35)$ **188**

12) $\lim_{x\to10} (-x^2+3x+\sqrt{x})$ **-66.84**

13) **فيزياء:** بحسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عندالسكون.

أوجد $\lim\limits_{v \to 0} m$ ، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0 . **(مثال 2)**

$\lim\limits_{v \to 0} m = m_0$. عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر ، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية ، أو كتلته في وضع السكون .

احسب كل نهاية مما يأتي:

14) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ 3

15) $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$ 8

16) $\lim_{x\to -5} \frac{4x^2+21x+5}{3x^2+17x+10}$ 1.46

17) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ -12

18) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-15}{x+3}$ -8

19) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ $\frac{1}{6}$

20) $\lim_{x\to \infty} (5-2x^2+7x^3)$ ∞

21) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$ $\frac{3}{4}$

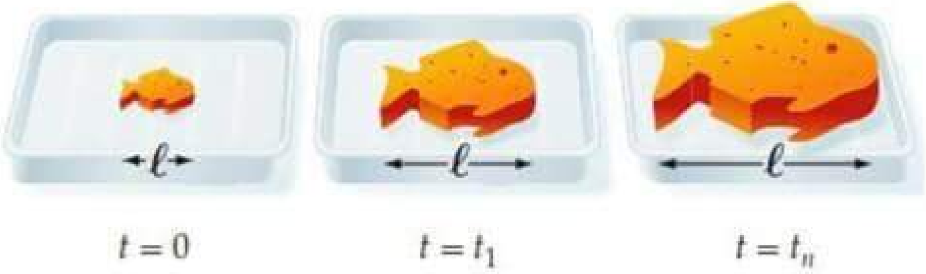
22) $\lim_{x\to \infty} (10x+14+6x^2-x^4)$ $-\infty$

23) $\lim_{x\to \infty} \frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$ ∞

24) $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$ 0

25) $\lim_{x\to \infty} \frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ 2

26) **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t) = \frac{105t^2}{10 + t^2} + 25$ ، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)



a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟ **25 mm**

b) ما نهاية الدالة عندما $t \to \infty$؟ **130 mm**

c) وضّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

لن يتعدى طول الحيوان الإسفنجي 130 mm .

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة

27) $a_n = \dfrac{8n+1}{n^2-3}$ $\quad 0$

28) $a_n = \dfrac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$ $\quad -4$

29) $a_n = \dfrac{12n^2+2}{6n^2-1}$ $\quad 2$

30) $a_n = \dfrac{8n^2+5n+2}{3+2n}$ $\quad \infty$

31) $a_n = \dfrac{1}{n^4}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$ $\quad \dfrac{1}{4}$

32) $a_n = \dfrac{12}{n^2}\left[\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$ $\quad \infty$

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة مستخدمًا التعويض المباشر لحساب النهايتين من اليمين واليسار:

(33 $$\lim_{x \to -2} \begin{cases} x - 3 \ , & x \leq -2 \\ 2x - 1 \ , & x > -2 \end{cases}$$ -5

(34 $$\lim_{x \to 0} \begin{cases} 5 - x^2 \ , & x \leq 0 \\ 5 - x \ , & x > 0 \end{cases}$$ 5

(35 $$\lim_{x \to 2} \begin{cases} (x - 2)^2 + 1 \ , & x \leq 2 \\ x - 6 \ , & x > 2 \end{cases}$$ غير موجودة

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كانت موجودة:

37) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

38) $\lim_{x \to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$

$$\lim_{x \to 0} (1+x+2^x-\cos x) = 1+0+2^0-\cos 0=1$$

39) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x} = \frac{\tan \pi}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

40) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$

$$-0.5$$

منصة مدرسية تعليمية

أوجد $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

41) $f(x) = 2x - 1$ $\quad 2$

42) $f(x) = 7 - 9x$ $\quad -9$

43) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$

44) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

45) $f(x) = x^2$ $\quad 2x$

46) $f(x) = x^2 + 8x + 4$

$2x + 8$

47) فيزياء: يمتلك الجسم المتحرك طاقةً تُسمى الطاقة الحركية؛ لأن بإمكانه بذل شغل عند تأثيره على جسم آخر. وتُعطى الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t) = \frac{1}{2}m \cdot (v(t))^2$ ، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t ، و m كتلته بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t) = \frac{50}{1+t^2}$ لكل $t \geq 0$ ، وكتلته $1\,\text{kg}$، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من $100\,\text{s}$؟

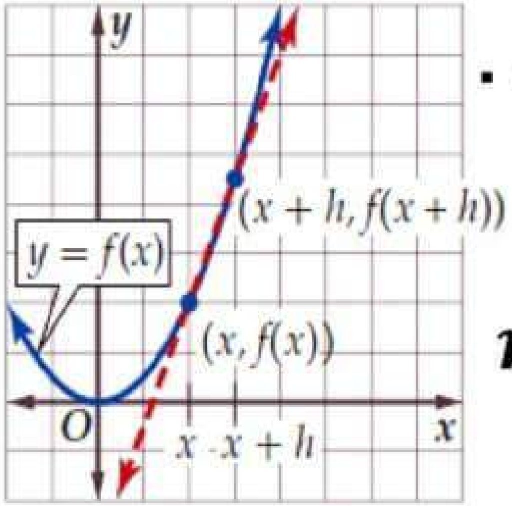
0.0000125

المماس والسرعة المتجهة

مماس منحنى

هو مستقيم يتقاطع مع منحنى ، ولكنة لا يعبره عند نقطة التماس ، ويمثل ميل المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس .

ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلي صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x+h, f(x+h))$ كما في الشكل .



يكتب ميل القاطع بالصيغة :

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتسمى صيغة قسمة الفرق .

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$ $\quad -3.5$

2) $y = 6 - 3x$, $(-2 , 12)$, $(6, -12)$ $\quad -3$ و -3

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ $\quad -\frac{1}{3}$ و -3

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$ $\quad 12, 3$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

5) $y = 4 - 2x$ $\quad m = -2$

6) $y = -x^2 + 4x$ $\quad m = -2x + 4$

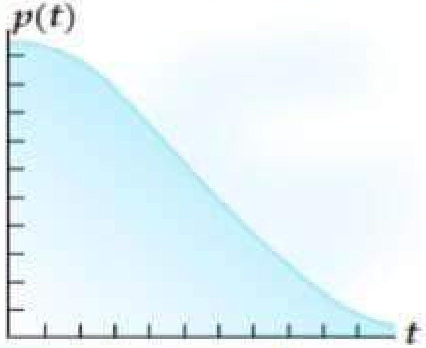
$m = -2x$ $\quad$ $y = 8 - x^2$ (7

$m = -\frac{2}{x^3}$ $\quad$ $y = \frac{1}{x^2}$ (8

$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$ $\quad$ $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (9

$m = -6x^2$ $\quad$ $y = -2x^3$ (10

11) **تزلج:** تمثّل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية من انطلاقه. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن.

$m = 0.18t^2 - 2.16t$

b) أوجد الميل عندما $t = 2s, 5s, 7s$.

$-3.6, - -6.3, -6.3$

تمثّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحوِّل الدقائق إلى ساعات) :(مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3 \,,\ 3 \le t \le 5$ **$45\ mi/h$ تقريبا**

13) $s(t) = 1.08t - 30 \,,\ 4 \le t \le 8$ **$65\ mi/h$ تقريبا**

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2 \,,\ 4 \le t \le 7$ **$49\ mi/h$ تقريبا**

15) $s(t) = -0.5(t-5)^2 + 3 \,,\ 4 \le t \le 4.5$ **$45\ mi/h$ تقريبا**

16) تمثّل المعادلة $f(t) = -16t^2 + 65t + 12$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت إلى أعلى، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة بين $t = 15, 2t$. (مثال 3)

تمثّل $f(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $f(t) = 100 - 16t^2, t = 3$ $\qquad -96\ ft/s$

18) $f(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$ $\qquad 12.4\ ft/s$

19) $f(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$ $\qquad -512\ ft/s$

20) $f(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$ $\qquad -121.6\ ft/s$

21) $f(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$ $\qquad -58.2\ ft/s$

22) $f(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$ $\qquad -57.6\ ft/s$

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن : (مثال 5)

23) $s(t) = 14t^2 - 7$ $\quad v(t) = 28t$

24) $s(t) = t - 3t^2$ $\quad v(t) = 1 - 6t$

25) $s(t) = 5t + 8$ $\quad v(t) = 5$

26) $s(t) = 18 - t^2 + 4t$ $\quad v(t) = -2t + 4$

27) $s(t) = 12t^2 - 2t^3$ $\quad v(t) = 24t + 6t^2$

28) $s(t) = 3t^3 - 20 + 6t$ $\quad v(t) = 9t^2 + 6$

(29 **قفز مظلي:** يمكنُ وصفُ ارتفاع مظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية من قفزه بالدالة $h(t) = 15000 - 16t^2$.

(a أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للمظلي بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز.

$$-112\ ft/s$$

(b كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظَلِّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟

$$-64ft/s, -160ft\ /s$$

(c أوجد معادلة سرعة المظلي المتجهة اللحظية عند أي زمن.

$$v(t) = -32t$$

30) **غوص:** يُبيِّنّ الجدول أدناه ارتفاع غواص d مقربًا لأقرب جزء من عشرة بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.8	42.3	40.1	34	25.3	14.3	0.75

a) احسب السرعة المتوسطة المتجهة للغواص في الفترة الزمنية $0.5 \leq t \leq 1.0$.

-7.4 m/s

b) إذا كانت معادلة المنحنى لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$، فأوجد معادلة سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3 s.

$v(t) = -9.82t - 0.04$, -29.5 m/s

31) **كرة القدم:** ركل سلمان كرة بسرعة رأسية قدرها 75 ft/s. افترض أن ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بالدالة $f(t) = -16t^2 + 75t + 2.5$.

a) أوجد معادلة سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$. $-32t + 75$

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 0.5 s من ركلها؟   59 ft/s

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟ $t \approx 2.344$ s

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟   90.39 ft تقريبًا

حلول
منصة مدرسية تعليمية

32) **فيزياء:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالمعادلة $d(t) = 3t^3 + 8t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي زمن.

$9t^2 + 8$

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2s, 4s, 6s$

44 m, 152 m, 332 m

حلول
منصة مدرسية تعليمية

المشتقات

قاعدة اساسية

تستعمل النهايات لتحديد ميل مماس منحنى الدالة f(x) عند أى نقطة علية وتسمى هذة النهاية مشتقة الدالة وتعطى بالصيغة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

عملية ايجاد المشتقة تسمى اشتقاق

نتيجة الاشتقاق تسمى معادلة تفاضلية

مثال مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1,5$.

صيغة المشتقة $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

تكملة الشرح

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقةَ كلٍّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $f(x) = 4x^2 - 3 , x = 2 , -1$

$$\boldsymbol{f'(x) = 8x, f'(2) = 16, f'(-1) = -8}$$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11 , t = 5 , 3$

$$\boldsymbol{g'(t) = -2t + 2, g'(5) = -8, g'(3) = -4}$$

3) $m(j) = 14j - 13 , j = -7 , -4$

$$\boldsymbol{m'(i) = 14, m'(-7) = 14, m'(-4) = 14}$$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17 , n = 7 , 2$

$$\boldsymbol{v'(n) = 10n + 9, v'(7) = 79, v'(2) = 29}$$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b , b = -4 , -3$

$$\boldsymbol{r'(b) = 6b^2 - 10, r'(-4) = 86, r'(-3) = 44}$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

6) $y(f) = -11f$

$$y'(f) = -11$$

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

$$z'(n) = 4n + 7$$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$

$$g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}}$$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

$$b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}}$$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

$$n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$$

11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

14) **درجات حرارة:** تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة :
$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ،
حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4)

a) أوجد معادلة تمثل مُعدّل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

$$f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04$$

b) أوجد مُعدّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$.

$$f'(2) \approx 1.96°\text{F}, f(14) \approx -0.36°\text{F}, f(20) \approx -2.68°\text{F}$$

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \le h \le 24$

$$68.92°\text{F}$$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة. (مثال 5)

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$

نقطة حرجة $(-2, -8)$ ، صغرى $(-2, -8)$ ، عظمى $(-5, 10)$

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

نقطة حرجة $(0, -2)$ ، صغرى $(1, 5)$ ، عظمى $(4, 350)$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

نقطة حرجة $(-5, -10)$ ، صغرى $(-6, -11)$ ، عظمى $(-3, -2)$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

نقطة حرجة $(-9, 405)$ ، صغرى $(-11, 385)$ ، عظمى $(-9, 405)$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

نقطة حرجة $(1, 1)$ ، صغرى $(0, 0)$ ، عظمى $(3, 9)$

21) **رياضة :** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. الدالة: $h(t) = 65t - 16t^2 + 3$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية، عندما $0 \leq t \leq 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$.

$$h'(t) = 65 - 32t$$

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة $h(t)$ في الفترة $[0, 4]$.

(0, 3),(2,03,68.9)

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 68 ft ؟

نعم ؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 68.9ft . وهذا أعلى من 68ft .

حلول
منصة مدرسية تعليمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(22 $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

(23 $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

(24 $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

(25 $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

$$f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$$ (28

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالةٍ ممّا يأتي:

29) $f(m) = \dfrac{3 - 2m}{3 + 2m}$

30) $r(t) = \dfrac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \dfrac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$

32) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \dfrac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$

34) $t(w) = \dfrac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملابس بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d ريالًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًّا يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ التي تمثل إجمالي المبيعات اليومية، عندما يكون سعر القميص d ريالًا.

$$r(d) = d(80 - 2d)$$

b) أوجد $r'(d)$.

$$r'(d) = -4d + 80$$

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن.

20 ريالا

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ **1**

2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ **1**

3) $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$ **12**

4) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$ **0**

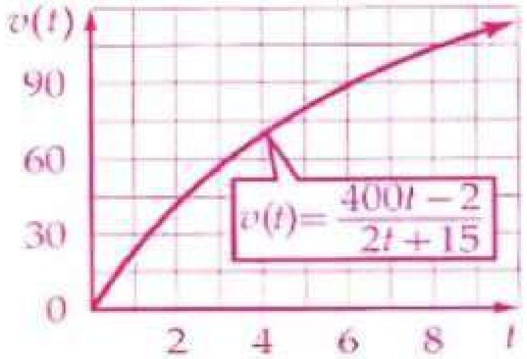
5) $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2 + 1}$ $\mathbf{\frac{3}{5}}$

6) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 + 3}$ **2**

7) $\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x + 20}}{x}$ **−1**

8) $\lim_{x \to 3} \frac{|4 - x|}{\sqrt{3x}}$ $\mathbf{\frac{1}{3}}$

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًا بحيث تُعطى قيمتها بآلاف الريالات بعد t سنة بالعلاقة $v(t) = \frac{400t + 2}{2t + 15}$. **(الدرس 1-8)**



a) مثّل الدالة $v(t)$ بيانيًا في الفترة $0 \le t \le 10$.

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t = 2, 5, 10$.

42000, 80000, 115000 ريال

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$.

200

d) وضّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية.

إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال .

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر ، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 2-8)

10) $\lim_{x\to 9} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$

ليس ممكنا ؛ عندما $x = 9$ ، فإن المقام يساوي صفرا .

11) $\lim_{x\to -2} (2x^3 + x^2 - 8)$

-20

12) **حياة بريَّة :** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t) = \frac{10t^3 - 40t + 2}{2t^3 + 14t + 12}$ ، وذلك بعد t سنة ، حيث $t \geq 3$ . . ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 2-8)

500 غزال

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

13) $\lim_{x\to\infty} (15 - x^2 + 8x^3)$ ∞

14) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x - 2}{4x^3 + 5x^2}$ $\frac{1}{2}$

15) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{2x^4 - 14x^2 + 2}$ 0

16) $\lim_{x\to\infty} (10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4)$ $-\infty$

17) **اختيار من متعدد:** قدِّر $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 5}{10 - (2.7)^{\frac{16}{x}}}$

(الدرس 1-8)

A غير موجودة

B $\frac{1}{2}$

C ∞

D $-\infty$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

18) $y = x^2 - 3x$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$ $\quad$ $1, -5$

19) $y = 2 - 5x$, $(-2, 12)$, $(3, -13)$ $\quad$ $-5, -5$

20) $y = x^3 - 4x^2$, $(1, -3)$, $(3, -9)$ $\quad$ $-5, 3$

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية رأسيًّا إلى أعلى بسرعة $90\,\mathrm{ft/s}$، وتمثّل الدالة $h(t) = -16t^2 + 90t + 3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 8-3)

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة. $\quad$ $-32t + 90$

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد $0.5\,\mathrm{s}$ من الإطلاق؟ $\quad$ $74\ ft/s$

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟ $\quad$ $129.7 ft/s$ تقريبا

22) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثِّل معادلة ميل منحنى $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة عليه؟ (الدرس 3-8)

A $m = 7x$

B $\boxed{m = 14x}$

C $m = 7x - 2$

D $m = 14x - 2$

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 3-8)

27) $h(t) = 4t^2 - 9t$ $\quad v(t) = 8t - 9$

28) $h(t) = 2t - 13t^2$ $\quad v(t) = 2 - 26t$

29) $h(t) = 2t - 5t^2$ $\quad v(t) = 2 - 10t$

30) $h(t) = 6t^2 - t^3$ $\quad v(t) = 12t - 3t^2$

المساحة تحت المنحنى والتكامل

يمكن حساب المساحة تحت المنحنى بأستخدام شكل اساسى معلوم المساحة كمساحة المستطيل للوصول الى المساحة التقريبية تحت المنحنى كما يوضح المثال الآتي :-

مثال **المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات**

قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0 , 12]$ باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلا على الترتيب . استعمل الطرف الأيمن لكل مستطيل لتحديد ارتفاعه .

مثل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية ، باتباع الخطوات التالية :

1- أوجد طول الفترة $[0 , 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها .

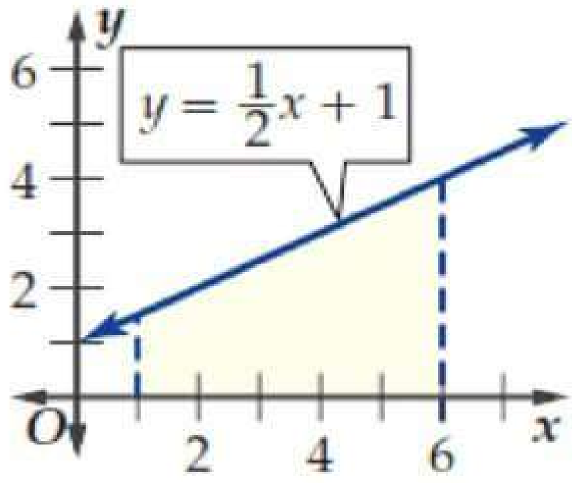
2- أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات ، فمثلا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم $12 \div 4 = 3$.

تكملة الشرح

تدرب وحل المسائل

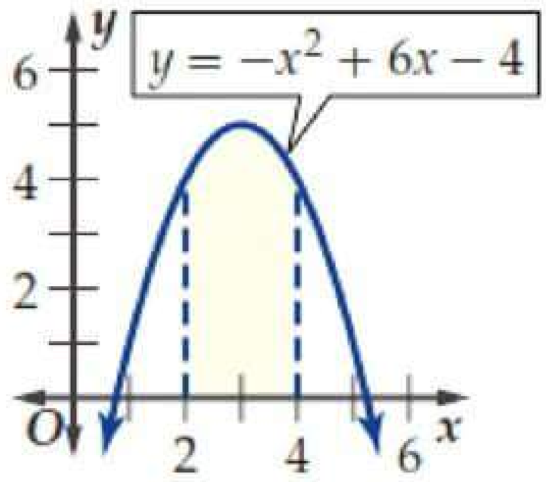
قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملًا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

1) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن



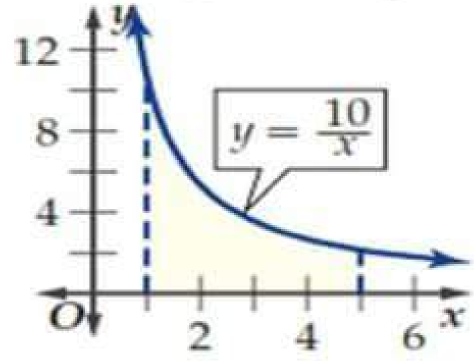
15 وحدة مربعة تقريبا

2) 4 مستطيلات
الطرف الأيسر



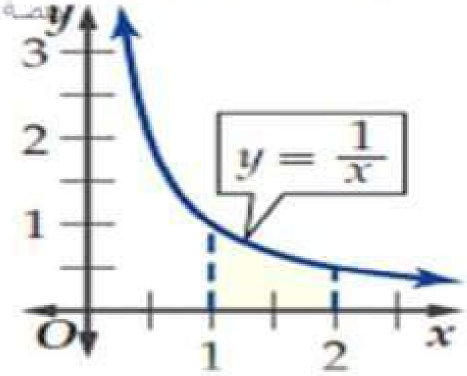
9.25 وحدات مربعة تقريبا

3) 8 مستطيلات
الطرف الأيمن



14.29 وحدة مربعة تقريبا

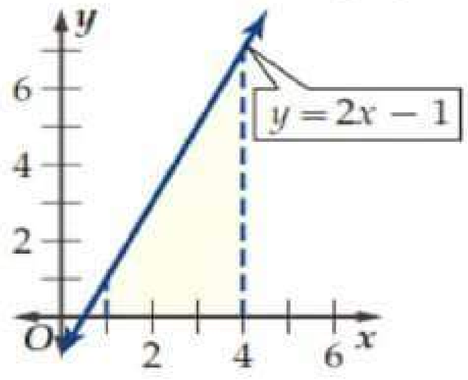
4) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن



0.65 وحدة مربعة تقريبا

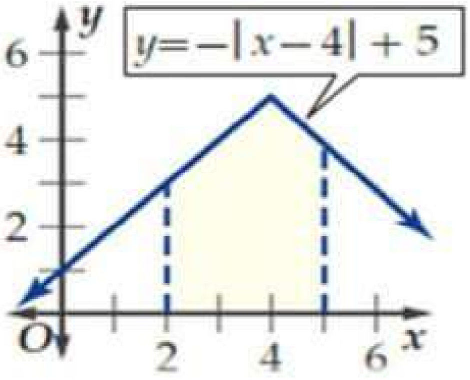
قرِّب مساحة المنطقة المظلَّلة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملًا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2)

6) العرض 0.5



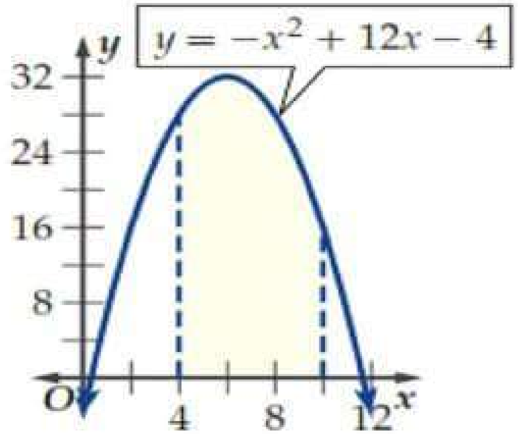
المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة ، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة ، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة .

7) العرض 0.5



المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة ، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة ، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة .

8) العرض 0.75



المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة ، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة ، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة .

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3,4)

10) $\int_1^4 4x^2\,dx$

84 وحدة مربعة تقريبا

11) $\int_0^2 6x\,dx$

12 وحدة مربعة تقريبا

12) $\int_1^3 (2x^2+3)\,dx$

23.33 وحدة مربعة تقريبا

13) $\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$

10.687 وحدات مربعة تقريبا

14) $\int_3^4 (-x^2+6x)\,dx$

8.67 وحدات مربعة تقريبا

15) $\int_2^4 (-3x+15)\,dx$

12 وحدة مربعة تقريبا

16) $\int_1^5 (x^2-x+1)\,dx$

33.33 وحدة مربعة تقريبا

17) $\int_1^3 12x\,dx$

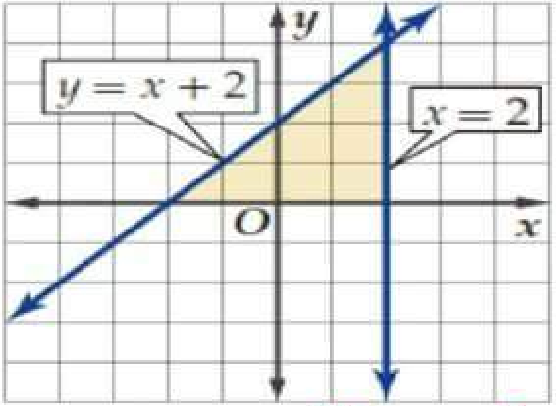
48 وحدة مربعة تقريبا

18) طباعة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس . إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل

$$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\, dx .$$ (مثال 5)

3750 ريالا

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث.

الارتفاع = 4 وحدات ،
القاعدة = 4 وحدات ،
المساحة = 8 وحدات مربعة

b) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x + 2)\, dx$.

8 وحدات مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$

0.67 وحدة مربعة تقريبا

21) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\, dx$

1.75 وحدة مربعة تقريبا

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\, dx$

17.33وحدة مربعة تقريبا

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\, dx$

12.5 وحدة مربعة تقريبا

24) $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\, dx$

8 وحدات مربعة تقريبا

25) $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x)\, dx$

0.75 وحدة مربعة تقريبا

النظرية الاساسية فى التفاضل والتكامل

قواعد الدالة الاصلية

قاعدة القوة

إذا كان $f(x) = xn$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي 1- ، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

قاعدة ضرب دالة القوة فى عدد ثابت

إذا كان $f(x) = kxn$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي 1- ، k عددا ثابتا ، فإن : $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

قاعدة المجموع والفرق

إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ ، دالتان أصليان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب ، فإن : $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

1) $f(x) = x^5$

$$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + c$$

2) $f(z) = \sqrt[3]{z}$

$$F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + c$$

3) $q(r) = \frac{3}{4}r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8}r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

$$Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + c$$

4) $w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{2}{5}u$

$$W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{5}u^2 + c$$

5) $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$

$$U(d) = -\frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + c$$

7) **سقوط حر:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال3)

a) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\, dt$.

$$s(t) = -16t^2 + c$$

b) احسب قيمة C عندما $t = 2s$ ، $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 64$$

c) ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

$$28ft$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

8) $\int (6m + 12m^3)\, dm$

$3m^3 + 3m^4 + c$

9) $\int_1^4 2x^3\, dx$

127.5

10) $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da$

46.5

11) $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4\right) dh$

7.99

12) $\int (3.4\,t^4 - 1.2\,t^3 + 2.3\,t - 5.7)\, dt$

$0.685t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + c$

13) $\int (14.2\,w^{6.1} - 20.1\,w^{5.7} + 13.2\,w^{2.3} + 3)\, dw$

$2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + c$

14) **حشرات:** تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية.

a) أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 34t$$

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

$$2.125s$$

15) **هندسة :** صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت القوس. (مثال 6)

$264600ft^2$

احسب كل تكامل مما يأتي:

16) $\int_{-3}^{1} 3\,dx$ 12

17) $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\,dx$ 27

18) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right) dx$ 2.5

19) $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\,dx$ 16.4

20) $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\,dx$ 28.5

21) **مقذوفات:** تُعطى سرعة مقذوف بـ $v(t) = -32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعه 228 ft بعد 3 s .

a) أوجد أقصى ارتفاع يصله المقذوف.

$$\mathbf{237\,ft}$$

b) أوجد سرعة المقذوف عندما يصل إلى سطح الأرض.

$$\mathbf{-123.16\ ft/s}$$

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$ **-6**

2) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ **8**

3) $\lim_{x \to 7} \dfrac{6}{x - 7}$

غير موجودة

4) $\lim_{x \to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$

∞

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالريال عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية.

100

b) فَسِّر الناتج في الفرع a.

إجابة ممكنة : رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني ، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز .

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4}-2}$

-25

7) $\lim_{x \to 9} (2x^3 - 12x + 3)$

1353

8) **نادِ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟ **4**

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟ **200**

حلول
منصة مدرسية تعليمية

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+2)$

∞

10) $\lim_{x\to\infty}(2x^3-8x^2-5)$

∞

11) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x-1}{-x^4+7x^3+4}$

0

12) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{25+x}-4}{x}$

0

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$ ؟

A $\boxed{-\frac{1}{9}}$

B 0

C $\frac{1}{9}$

D غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y = x^2 + 2x - 8$, $(-5, 7)$, $(-2, -8)$

$$-8 \,, -2$$

15) $y = \frac{4}{x^3} + 2$, $(-1, -2)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

$$-12 \,, -\frac{3}{4}$$

16) $y = (2x + 1)^2$, $(-3, 25)$, $(0, 1)$

$$-20 \,, 4$$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t) = 9t + 3t^2$ $\quad v(t) = 9 + 6t$

18) $h(t) = 10t^2 - 7t^3$ $\quad v(t) = 20t - 21t^2$

19) $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$ $\quad v(t) = 9t^2 + 4$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x) = -3x - 7$ $\quad f'(x) = -3$

21) $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$

$$b'(c) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$$

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\, dx$ 10.5 وحدات مربعة تقريبا

27) $\int_3^8 10x^4\, dx$ 65050 وحدة مربعة تقريبا

28) $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\, dx$ 156 وحدة مربعة تقريبا

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\, dx$ $\frac{4}{5}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + c$

32) $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\, dx$ 45