وزارة التعليم
Ministry of Education

ملخص الدرس الخامس

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الضرب الداخلي

الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين

$\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ و $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$

$$a.b = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان a,b الغير صفريين

متعامدان

اذا وفقط اذا كان

$$a.b = 0$$

الزاوية بين متجهين غير صفرين

اذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين فإن:

$$\cos\theta = \frac{a \, . \, b}{|a|\,|b|}$$

ملاحظة مهمة /

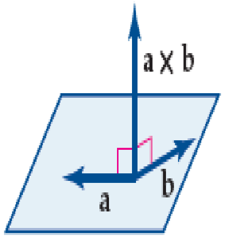
إذا كان a.b=0 فإن $\theta = 90°$

إذا كان(موجب) a.b>0 فإن $0^0 < \theta \le 90°$

إذا كان(سالب) a.b<0 فإن $90^0 < \theta \le 180°$

رياضيات

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء



هو **متجه** و**ليس عدد** ويرمز له بالرمز **a x b** وهو **عمودي** على المستوى الذي يحوي **a,b**

قاعدة المحددة من الدرجة الثالثة

إذا كان $a=a_1i+a_2j+a_3k$ و $b=b_1i+b_2j+b_3k$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين هو المتجه:

$$a \times b = (a_2.b_3-a_3.b_2)i - (a_1b_3-a_3.b_1)j + (a_1b_2-a_2b_1)k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة i, j, k في الصف 1

بوضع إحداثيات a في الصف 2

بوضع إحداثيات b في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$a \times b = (a_2.b_3-a_3.b_2)i - (a_1b_3-a_3.b_1)j + (a_1b_2-a_2b_1)k$$

قاعدة الأقطار

1) أعد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

2) أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

3) أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

4) لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

ملاحظة /

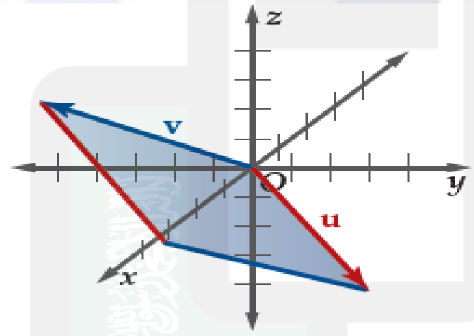
الضرب الاتجاهي للمتجهات خاص في الفضاء الثلاثي فقط .

وهو ليس ابدالي أي أن $a \times b \neq b \times a$

تطبيقات على الضرب الاتجاهي

حساب مساحة متوازي الأضلاع

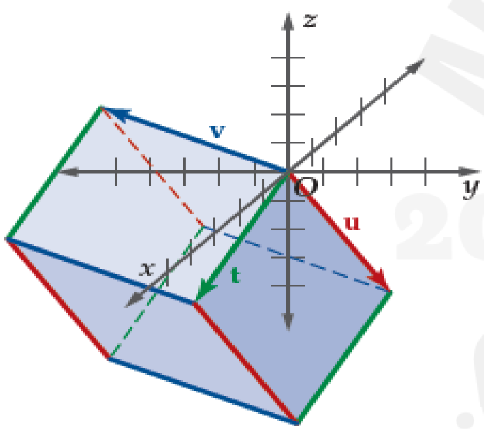
$|u \times v|$ حيث u , v ضلعان متجاوران



الضرب القياسي الثلاثي

إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكون أحرفاً متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسم له ستة اوجه، كل وجه منها على شكل متوازي اضلاع،

إن القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي لهذه المتجهات هو عدد يمثل حجم متوازي السطوح.



إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$