شرح الدرس الثاني المتجهات في المستوى الإحداثي

رياضيات 3-2

الفصل الخامس : المتجهات

الدرس الثاني: المتجهات في المستوى الإحداثي

مدة إعطاء الدرس
بإذن الله
هي ثلاث حصص

إعداد الأستاذ :
عبدالعزيز السهيمي

فيما سبق

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس 1 — 5)

أهداف الدرس

- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات

الصورة الإحداثية

component form

متجه الوحدة

unit vector

متجها الوحدة القياسيان

standard unit vectors

توافق خطي

linear combination

أ/عبدالعزيز السهيمي

سنتعرف في هذه الدرس...

1- المتجهات في المستوى الإحداثي

2- طول المتجه

3- العمليات على المتجهات

4- متجه الوحدة

5- صورة التوافق الخطي

6- الصورة الإحداثية للمتجه

7- زاوية اتجاه المتجه

أ/عبدالعزيز السهيمي

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا؟

تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-5 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـِ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.

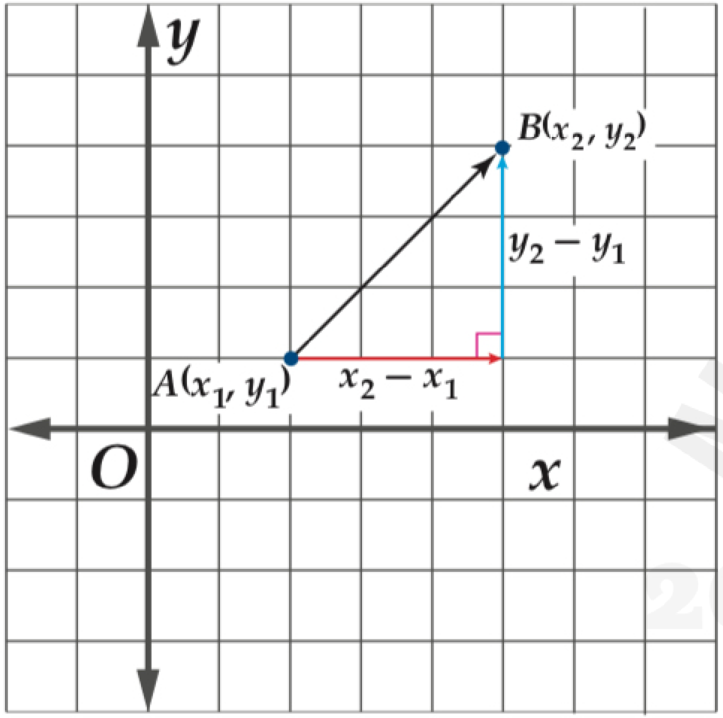
أ/عبدالعزيز السهيمي

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$



مثال 1

أولاً ◄ (التعبير عن المتجه بصورة الإحداثية)

أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$$

$$= \langle 7, -7 \rangle$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = < 6 - (-2), 1 - (-7) >$$

$$\overrightarrow{AB} = < 8, 8 >$$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = < -9 - 0, -3 - 8 >$$

$$\overrightarrow{AB} = < -9, -11 >$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مفهوم أساسي

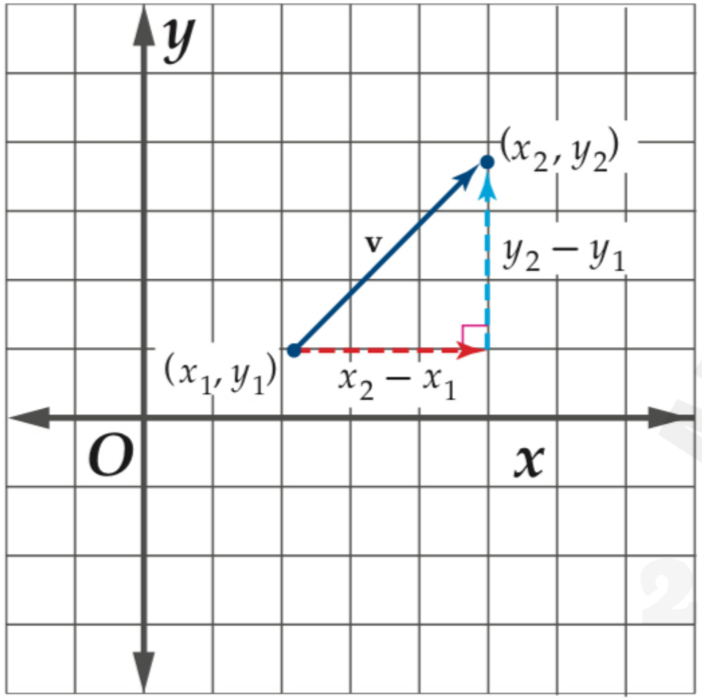
طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ،
فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مـثال 2 ثانياً ◄ (إيجاد طول المتجه)

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{98} \approx 9.9$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{[6 - (-2)]^2 + [1 - (-7)]^2}$$

$$= \sqrt{128} \approx 11.3$$

2B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{[-9 - 0]^2 + [-3 - 8]^2}$$

$$= \sqrt{202} \approx 14.2$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مـثال 3 ثالثاً ◄ (العمليات على المتجهات)

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$$

$$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$$

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$$

$$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$$

$$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4c + b$

$4 < -4, 1 > + < -3, 0 >$

$= < -16, 4 > + < -3, 0 >$

$= < -19, 4 >$

3B) $-3c$

$-3 < -4, 1 >$

$= < 12, -3 >$

3C) $2c + 4a - b$

$2 < -4, 1 > + 4 < 2, 5 > - < -3, 0 >$

$= < -8, 2 > + < 8, 20 > + < 3, 0 >$

$= < 3, 22 >$

أ/عبدالعزيز السهيمي

نهاية شرح الحصة (1)

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v}=\mathbf{u}\ |\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

مثال 4

رابعاً ◄ (إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى)

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle = \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

$$= \frac{1}{|< 6, -2 >|} < 6, -2 >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}} < 6, -2 >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{40}} < 6, -2 > \boxed{= < \frac{6}{\sqrt{40}}, \frac{-2}{\sqrt{40}} >}$$

4B) $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

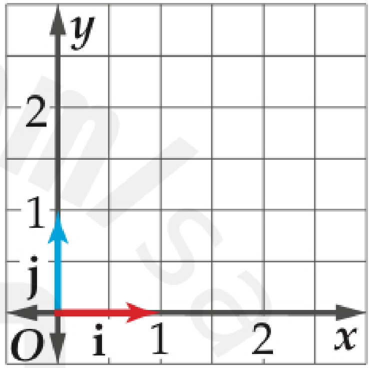
$$= \frac{1}{|< -4, -8 >|} < -4, -8 >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-8)^2}} < -4, -8 >$$

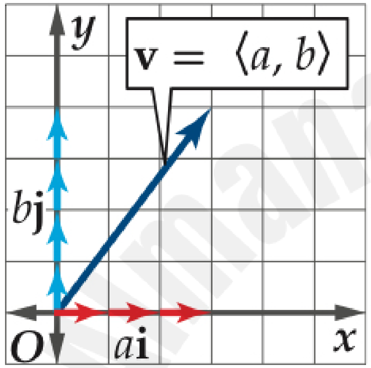
$$= \frac{1}{\sqrt{80}} < -4, -8 > \boxed{= < \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} >}$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle , \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 5.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 5.2.3



الشكل 5.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4 ؛

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 5

خامساً ◄ (كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة)

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$$

$$= \langle 6, 2 \rangle$$

$$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$= < 2 - (-6), 5 - 0 >$$

$$= < 8, 5 >$$

$$\overrightarrow{DE} = < 8, 5 > = 8i + 5j$$

5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$= < 7 - (-3), 1 - (-8) >$$

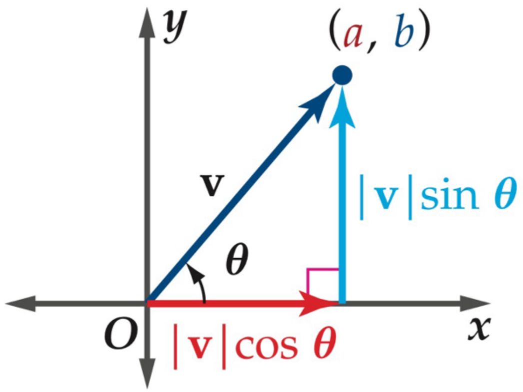
$$= < 10, 9 >$$

$$\overrightarrow{DE} = < 10, 9 > = 10i + 9j$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

نهاية شرح الحصة (2)

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل **5.2.5** يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 5.2.5

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$

$$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle \quad \text{عوِّض}$$

$$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j} \quad \text{توافق خطي من } \mathbf{i}, \mathbf{j}$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مـثال 6 سادساً ◄ (إيجاد الصورة الأحداثية)

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه °120 مع الأفقي.

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

$$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$$

$$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$$

$$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8,\ \theta = 45^\circ$

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

$$= < 8\cos 45^\circ, 8\sin 45^\circ >$$

$$= < 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} >$$

(6B $|\mathbf{v}| = 24,\ \theta = 210^\circ$

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

$$= < 24\cos 210^\circ, 24\sin 210^\circ >$$

$$= < -12\sqrt{3}, -12 >$$

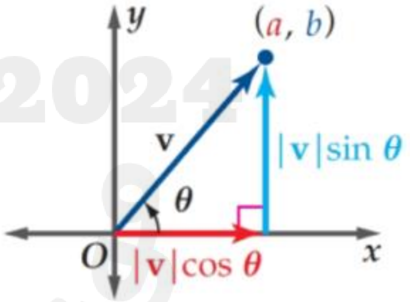
أ/عبدالعزيز السهيمي

لإيجاد زاوية اتجاه المتجه $V = \langle a ,b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي الموجب نحل المعادلة :

$$V = \langle a , b \rangle$$

أو

$$\tan \theta = \frac{|V| \sin \theta}{|V| \cos \theta}$$



لكل قيمة لـ $\tan \theta$ توجد زاويتان مختلفتان بناء على العلاقة :

$$\tan \theta = \tan(\theta + 180)$$

إذا كانت قيمة $\tan \theta$ **موجبة** فإن θ تقع **في الربع الأول أو الثالث**

إذا كانت قيمة $\tan \theta$ **سالبة** فإن θ تقع **في الربع الثاني أو الرابع**

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 7 | سابعًا ◄ (زاوية الاتجاه للمتجهات)

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(a $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{7}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$$

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$ ،

فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$$\theta \approx 66.8^\circ$$

(b $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $y = -5 < 0$ ، $x = 4 > 0$ ،

فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$$\theta \approx -51.3^\circ$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{-6}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-6}\right)$$

من خلال الصور الإحداثية فإن المتجه يقع في الربع الثاني وبالتالي زاويته $\theta \approx -18.4^\circ$

7B) $\langle -3, -8 \rangle$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{-8}{-3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-3}\right)$$

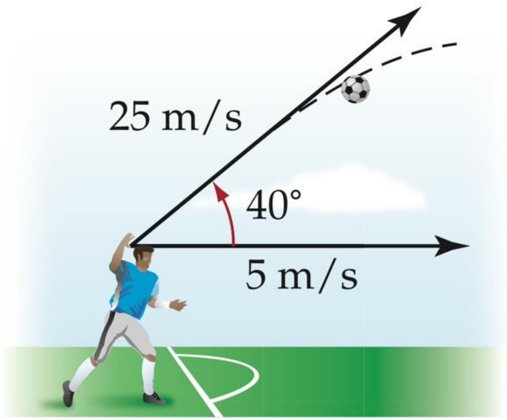
من خلال الصور الإحداثية فإن المتجه يقع في الربع الثالث وبالتالي زاويته $\theta \approx 69.4^\circ$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 8 من واقع الحياة

ثامنًا ◄ (تطبيق العمليات على المتجهات)

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة $5\ \mathrm{m/s}$ ، ليرمي الكرة بسرعة $25\ \mathrm{m/s}$ ، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



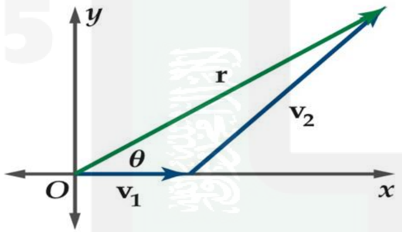
بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta, |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية للمتجه } \mathbf{v}_2$$

$$= \langle 25\cos 40°, 25 \sin 40° \rangle \quad |\mathbf{v}_2| = 25,\ \theta = 40°$$

$$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle \quad \text{بسِّط}$$

اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{متجه المحصلة}$$

$$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle \quad \text{عوِّض}$$

$$= \langle 24.2, 16.1\rangle \quad \text{اجمع}$$

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2} \quad \tan\theta = \frac{b}{a} \text{ ، حيث } \langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6° \quad \text{حُل بالنسبة إلى } \theta$$

أي أن محصلة سرعة الكرة هي $29.1\ \mathrm{m/s}$ تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها $33.6°$ مع الأفقي تقريبًا.

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\,m/s$

أ/عبدالعزيز السهيمي

موضوع الدرس:	المتجهات في المستوى الإحداثي	رقم الصفحة:	100-94

تعلمنا في هذه الدرس...

1- المتجهات في المستوى الإحداثي

2- طول المتجه

3- العمليات على المتجهات

4- متجه الوحدة

5- صورة التوافق الخطي

6- الصورة الإحداثية للمتجه

7- زاوية اتجاه المتجه

أ/عبدالعزيز السهيمي

قسم التحصيلي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

أ/عبدالعزيز السهيمي

انتهى الدرس

إعداد الأستاذ :
عبدالعزيز السهيمي