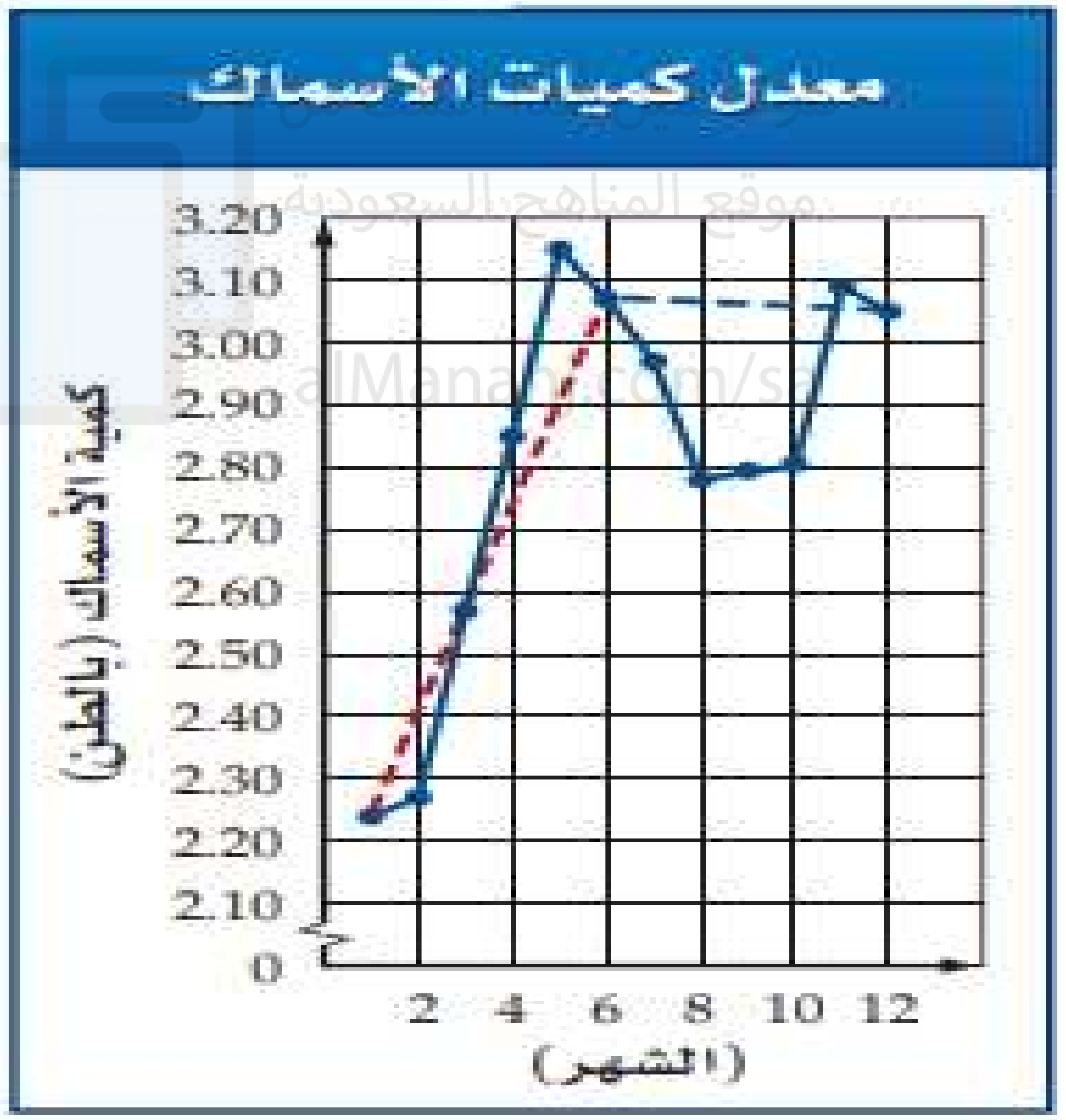
الملف شرح درس القيم القصوى و متوسط معدل التغير

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

Extrema and Average Rates of Change



لماذا؟

يبيّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ.

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المتقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات

المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات

المتزايدة

المتناقصة

الثابتة

النقطة الحرجة

العظمى

الصغرى

القصوى

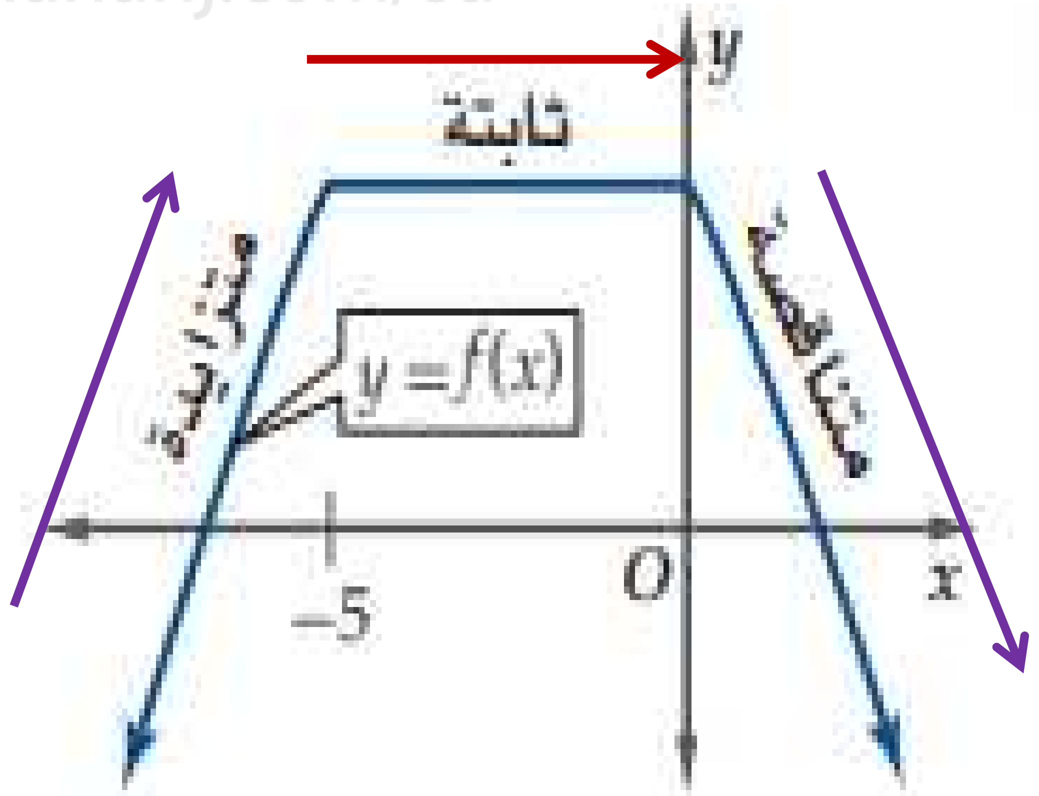
متوسط معدل التغير

القاطع

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$، من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$

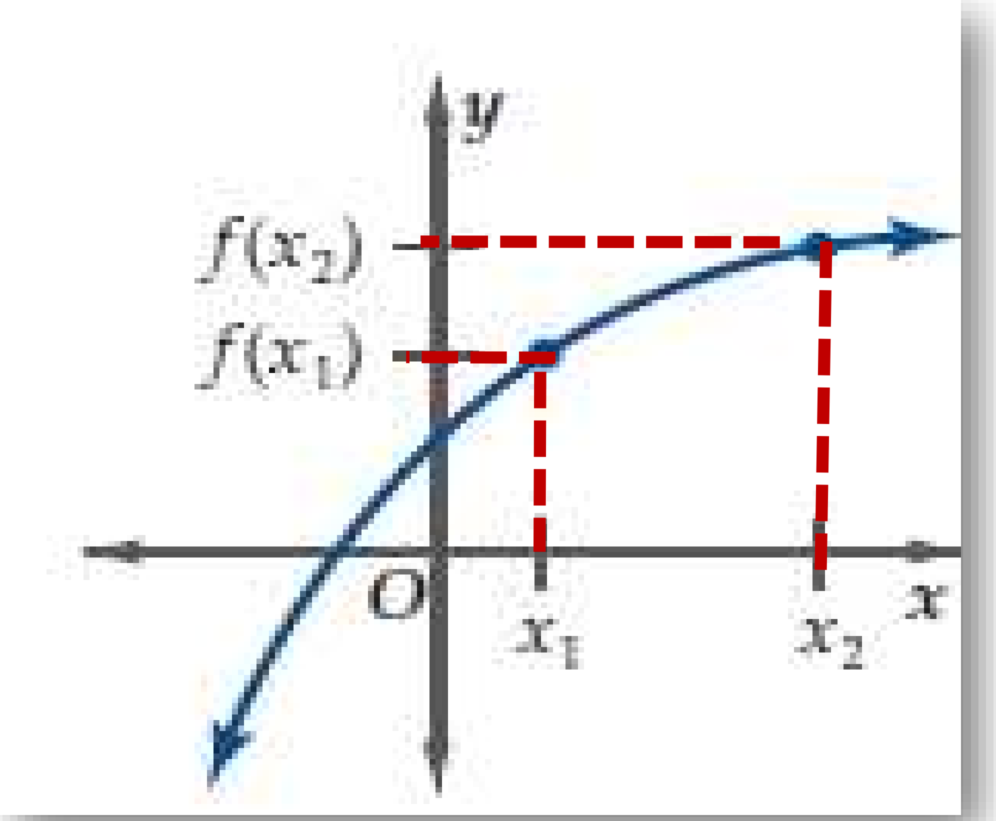


يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

خصائص الدالة

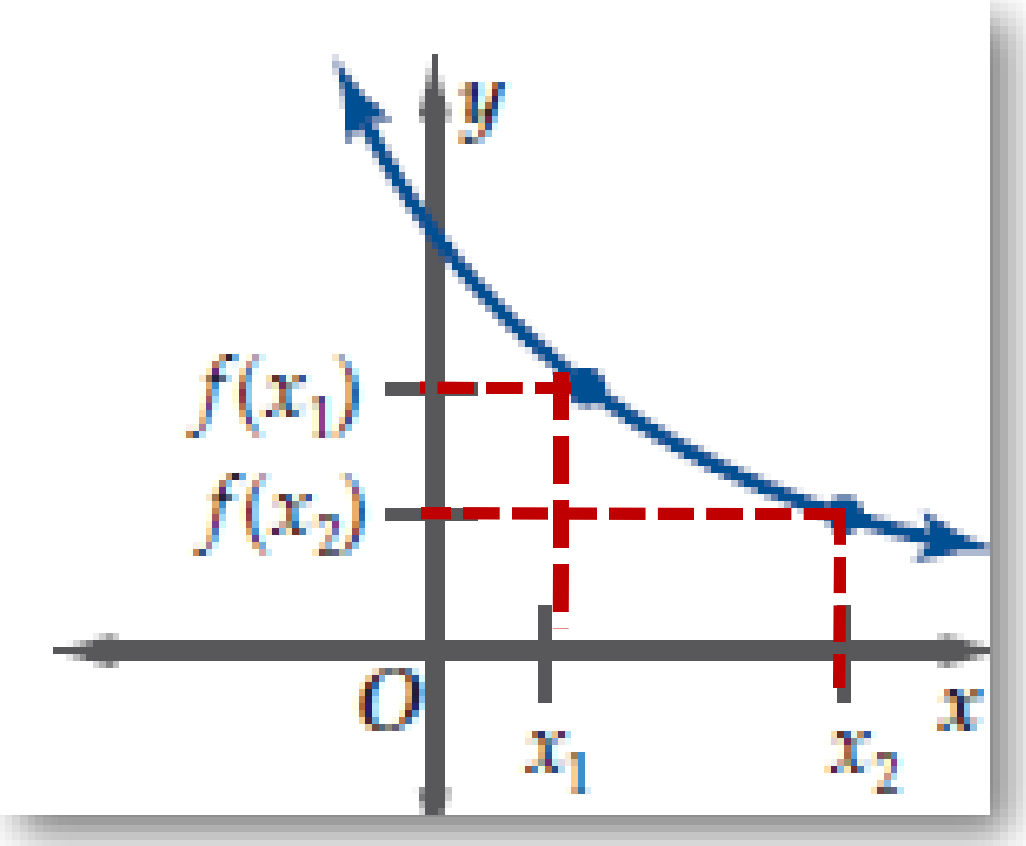
متزايدة

لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



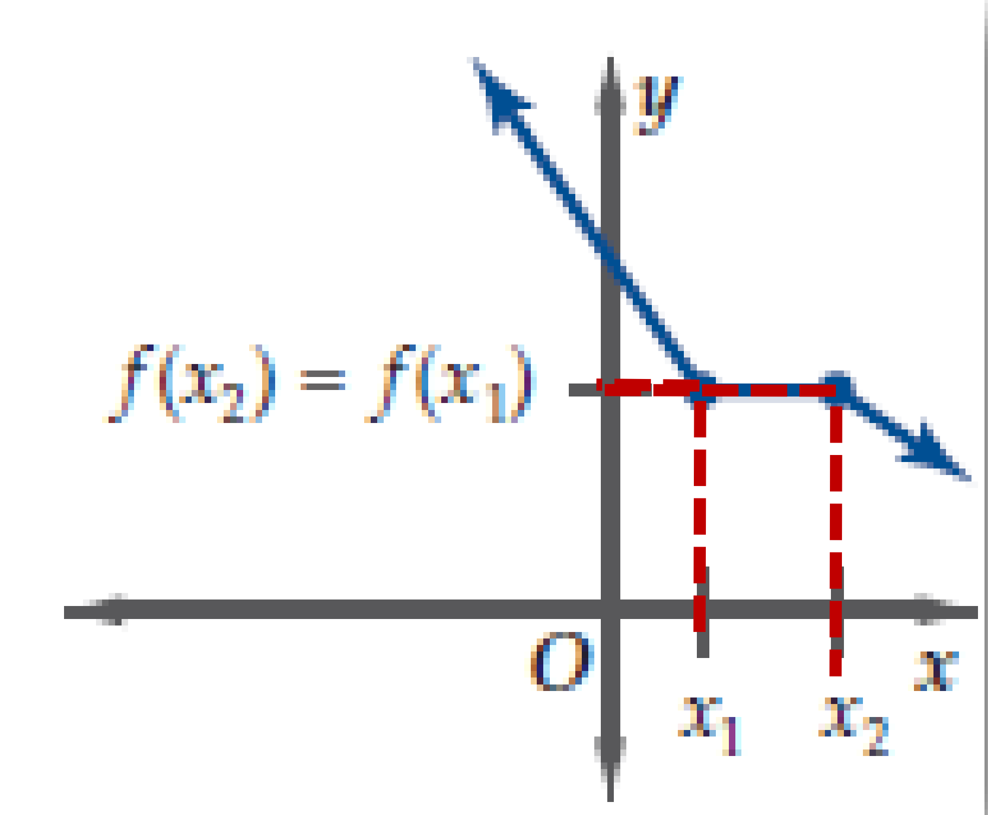
متناقصة

لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



ثابتة

لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.



مفهوم أساسي

الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متزايدة** على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

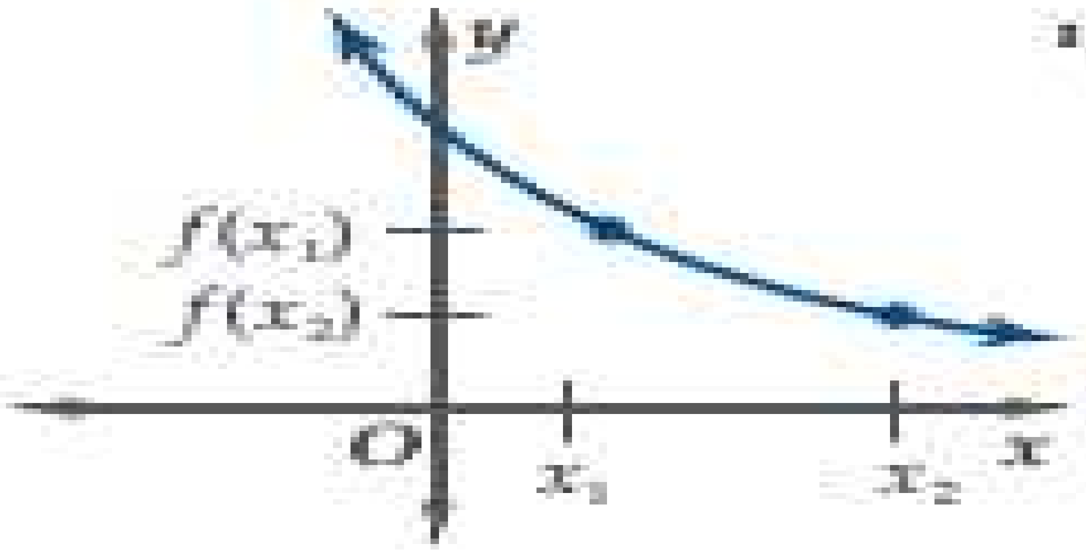
الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:

التعبير اللفظي: تكون الدالة f **متناقصة** على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

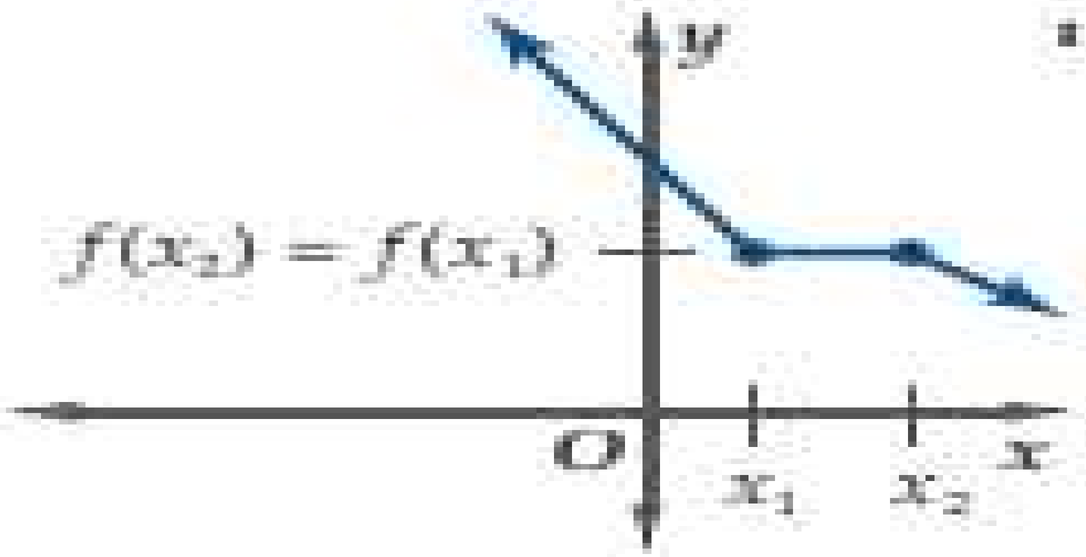
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f **ثابتة** على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

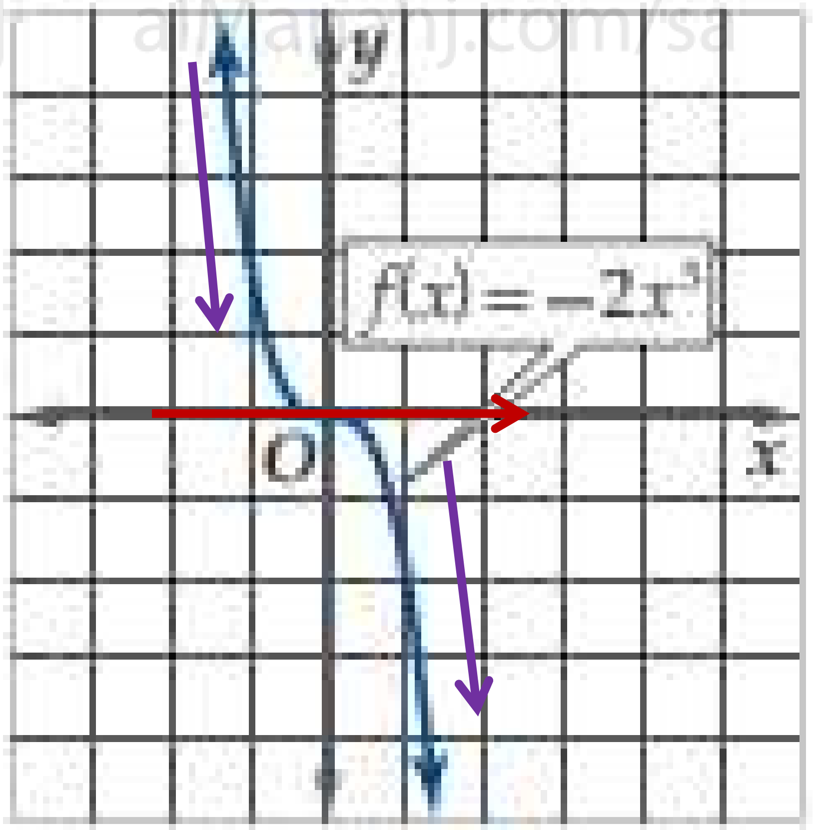
فيما سبق:
درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:
- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات
المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًا.



$f(x) = -2x^3$ (a

التحليل بيانيًا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x، تتناقص قيم $f(x)$، وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

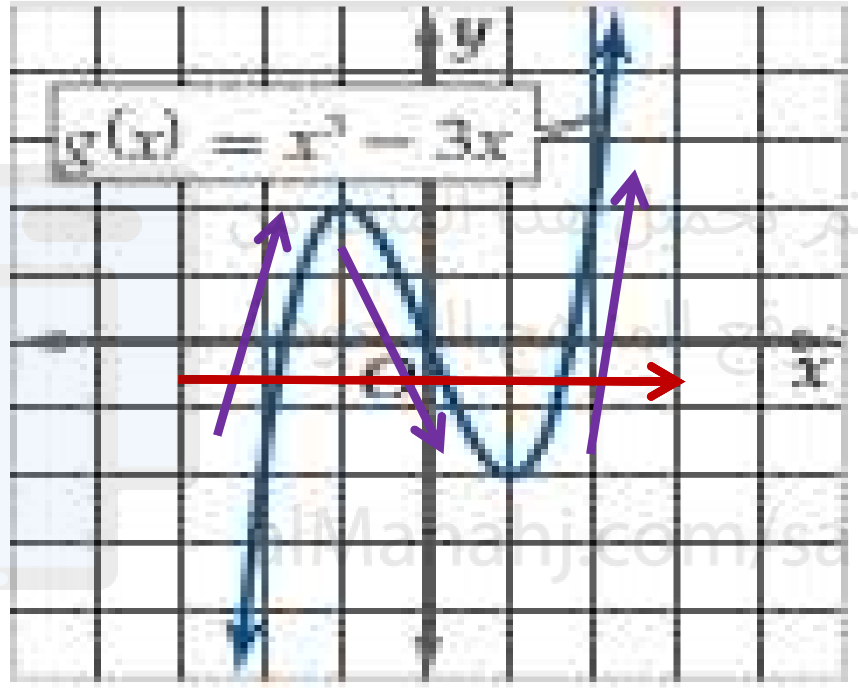
4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

فيما سبق:
درستَ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:
- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات
المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

b) $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًا:
يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًا:
كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$g(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$(-1, 1)$:

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	-2	18	110	322	702	1298

توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1 ، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1 ، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1 ، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

إرشادات للدراسة

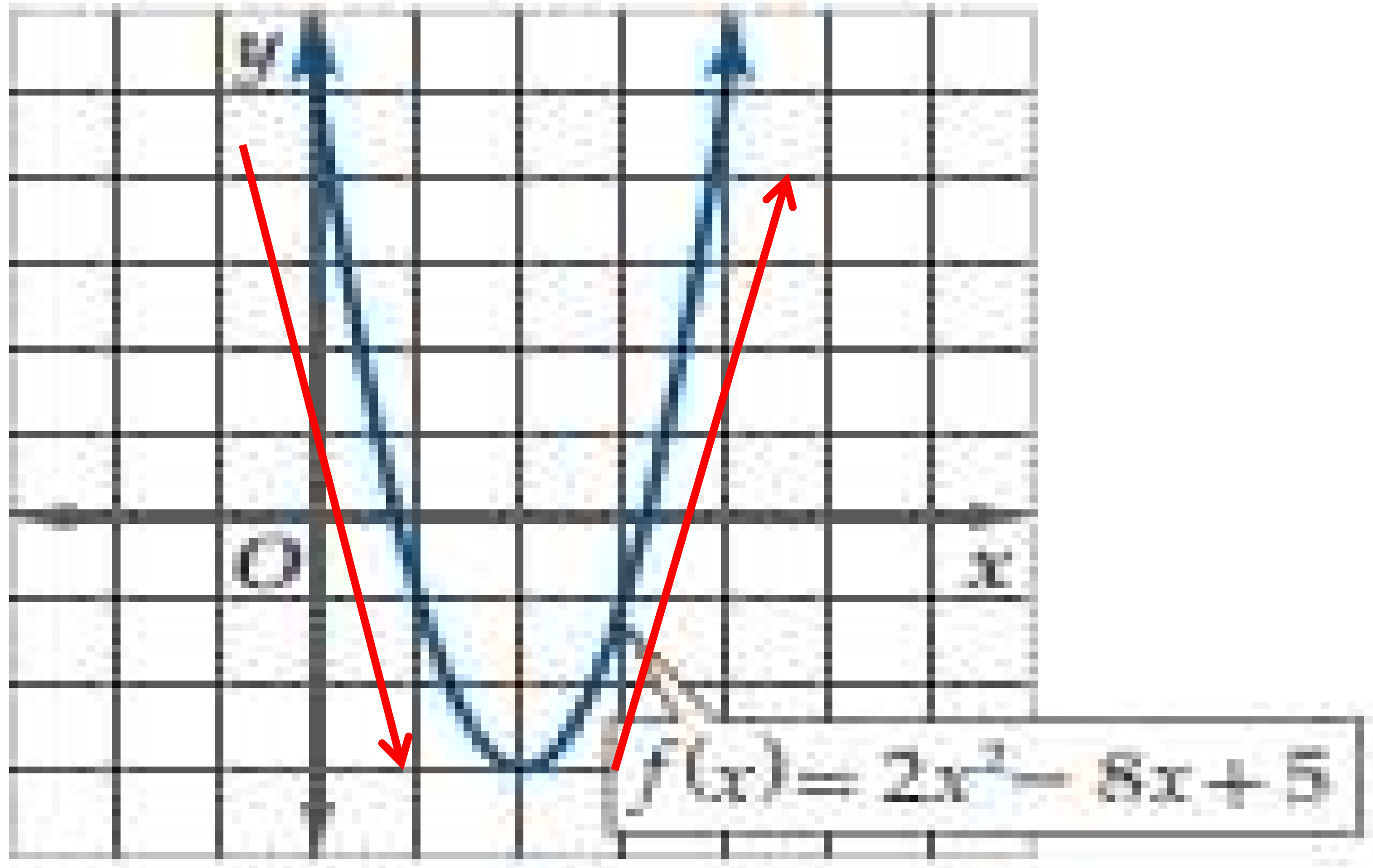
الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة
إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمّى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. فالدالة في المثال 1a متناقصة، بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على أخرى.

تحقق من فهمك

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الاتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة ثم عزز اجابتك عدديا؟

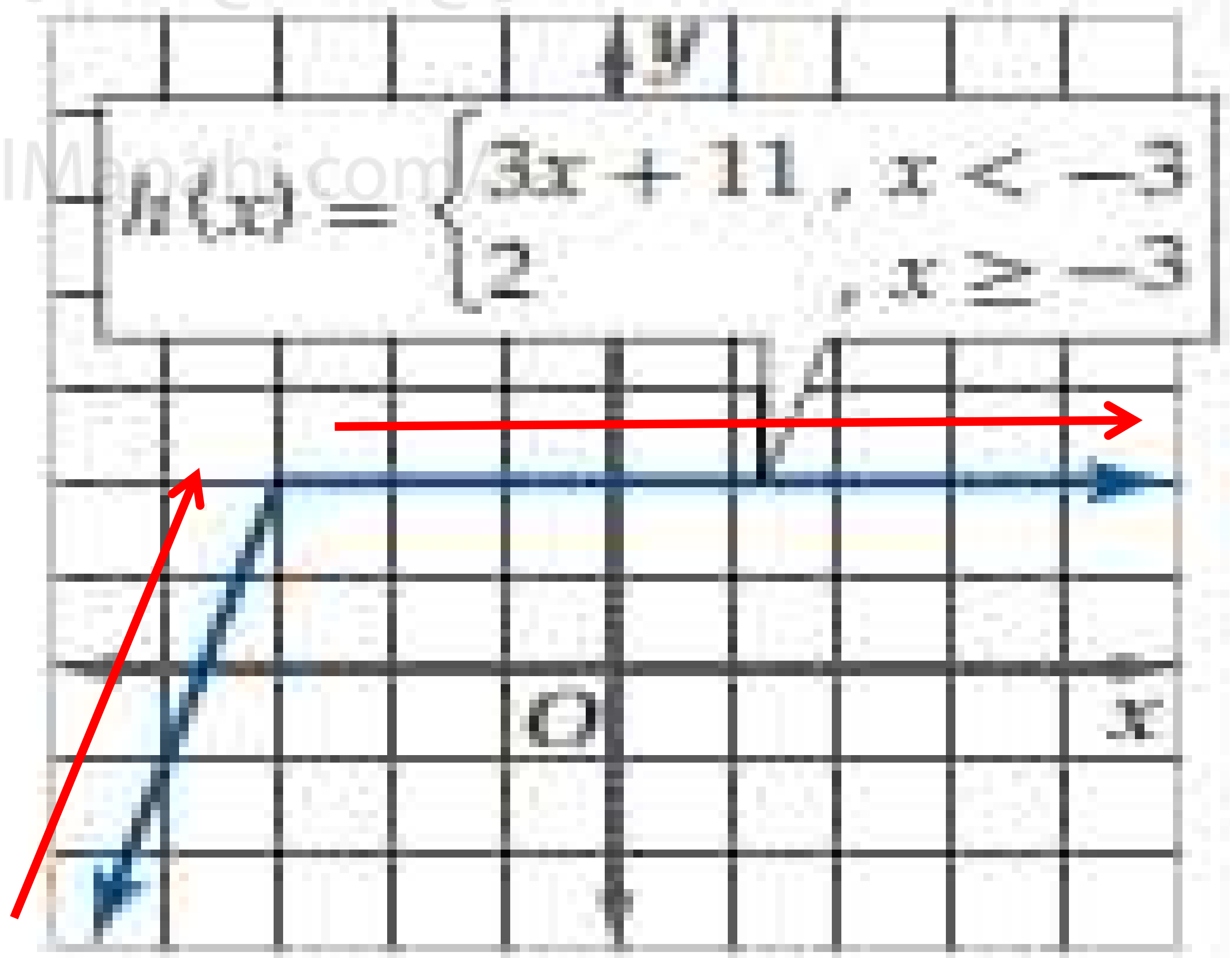
(1A



x	0	1	2	3	4
F(x)	5	-1	-3	-1	5

يبين من الرسم البياني ان الدالة $f(x)$ متناقصة من الفترة $(-\infty,2)$ ومتزايده في الفترة $(2,\infty)$

(1B

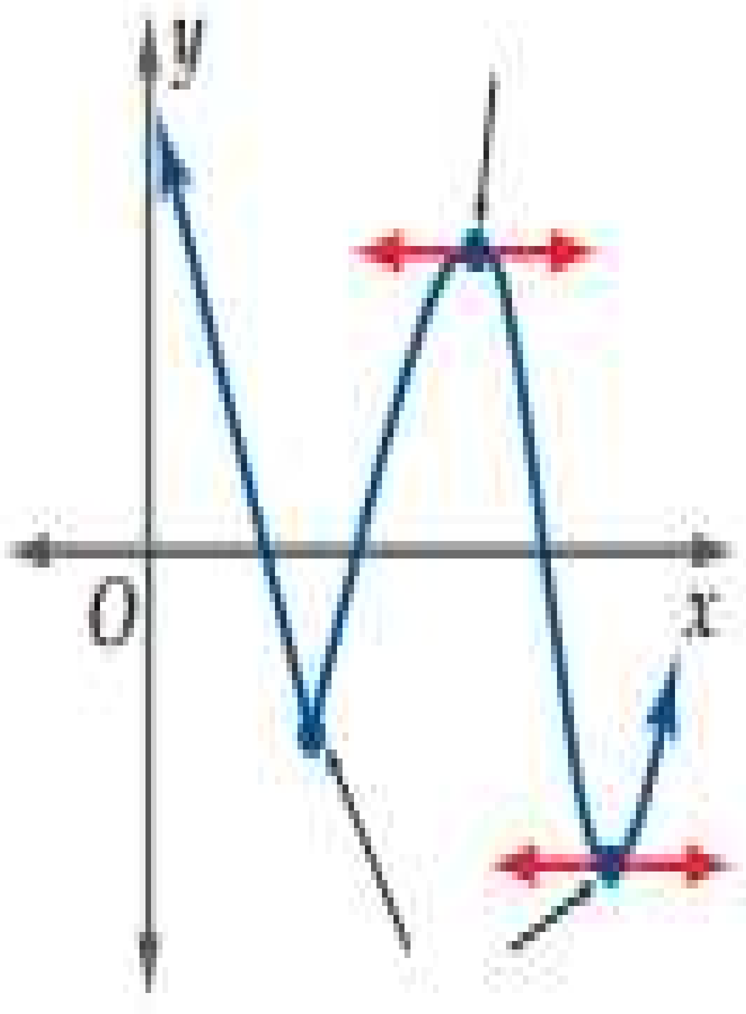


x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
h(x)	-3	-1	2	2	2	2	2

يبين من الرسم البياني ان الدالة $h(x)$ متزايدة من الفترة $(-\infty,-3)$ وثابته في الفترة $(-3,\infty)$

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

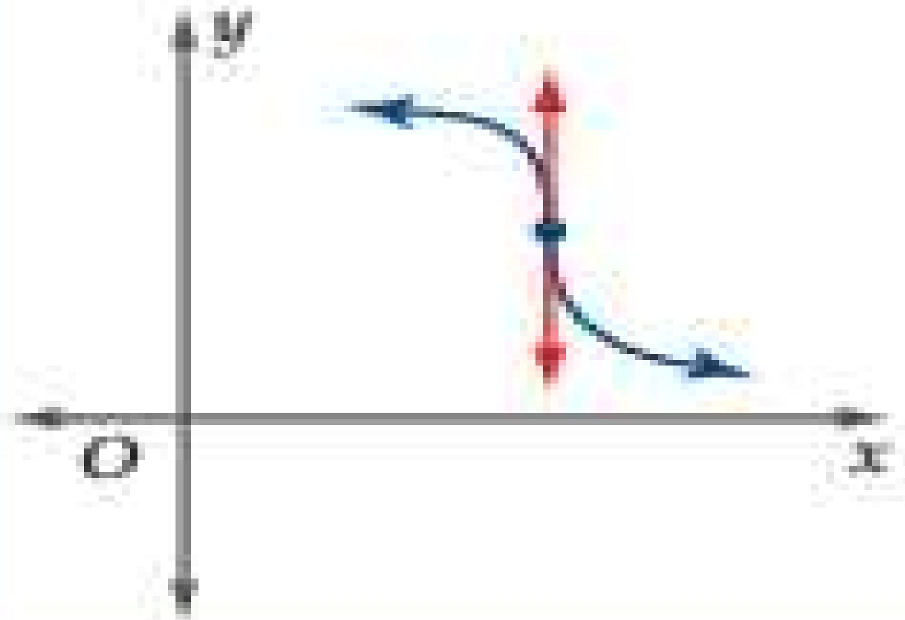
لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًا أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غير معرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.



يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى **(القيم القصوى)**.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة الحرجة غير معرف كما في الشكل أدناه، فإنه لا توجد للدالة عند هذه النقطة قيمة عظمى أو صغرى.



إرشادات للدراسة

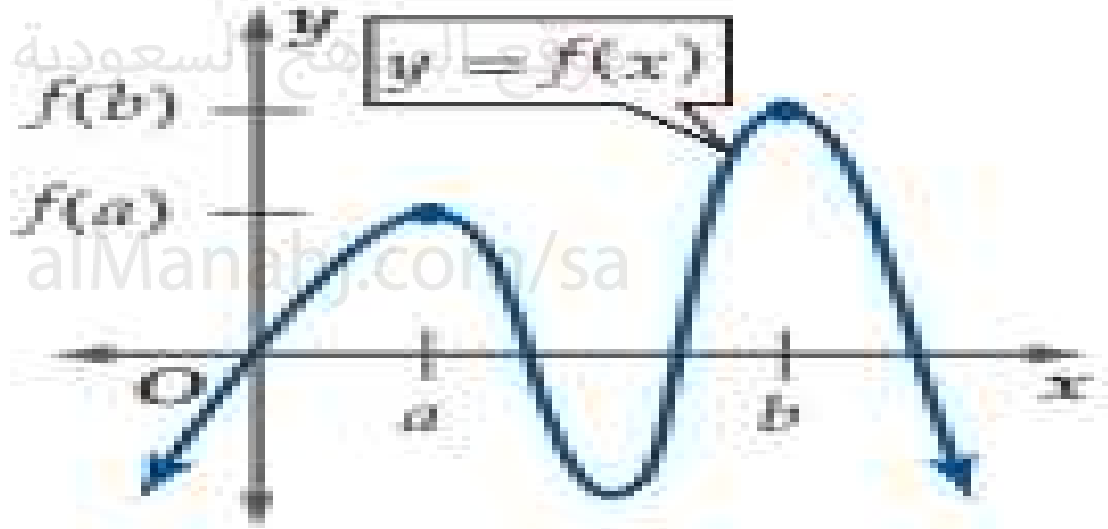
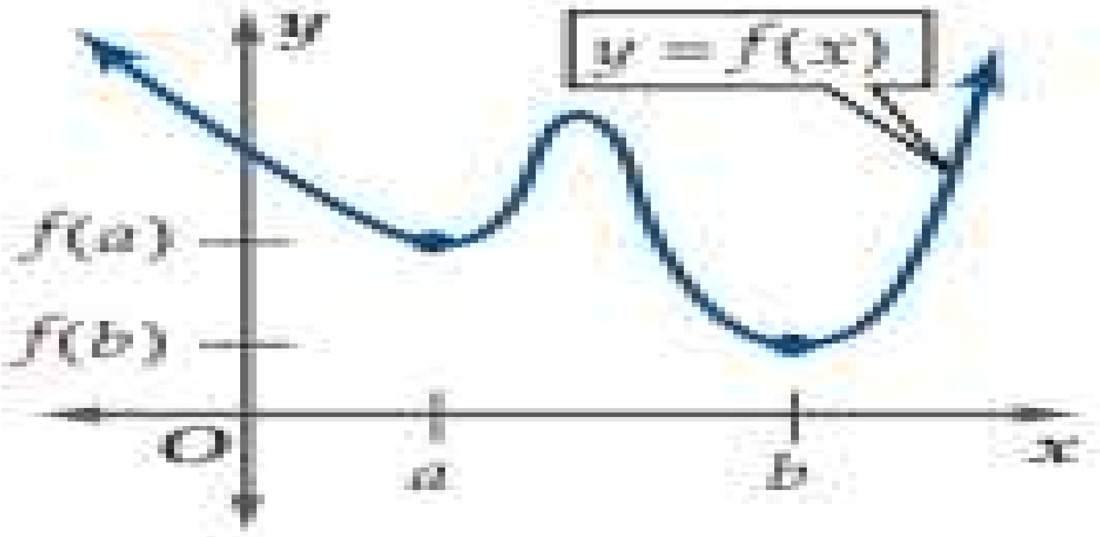
قيمة قصوى محلية:
يُستعمل مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

إرشادات للدراسة

القيم القصوى:
ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

مفهوم أساسي القيم القصوى المحلية والمطلقة

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيت قيمة عظمى محلية. **الرموز:** تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$. **التعبير اللفظي:** إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمّيت قيمة عظمى مطلقة. **الرموز:** تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.	**النموذج:**  $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمّيت قيمة صغرى محلية. **الرموز:** تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$. **التعبير اللفظي:** إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمّيت قيمة صغرى مطلقة. **الرموز:** تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.	**النموذج:**  $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

القيم القصوى

المحلية

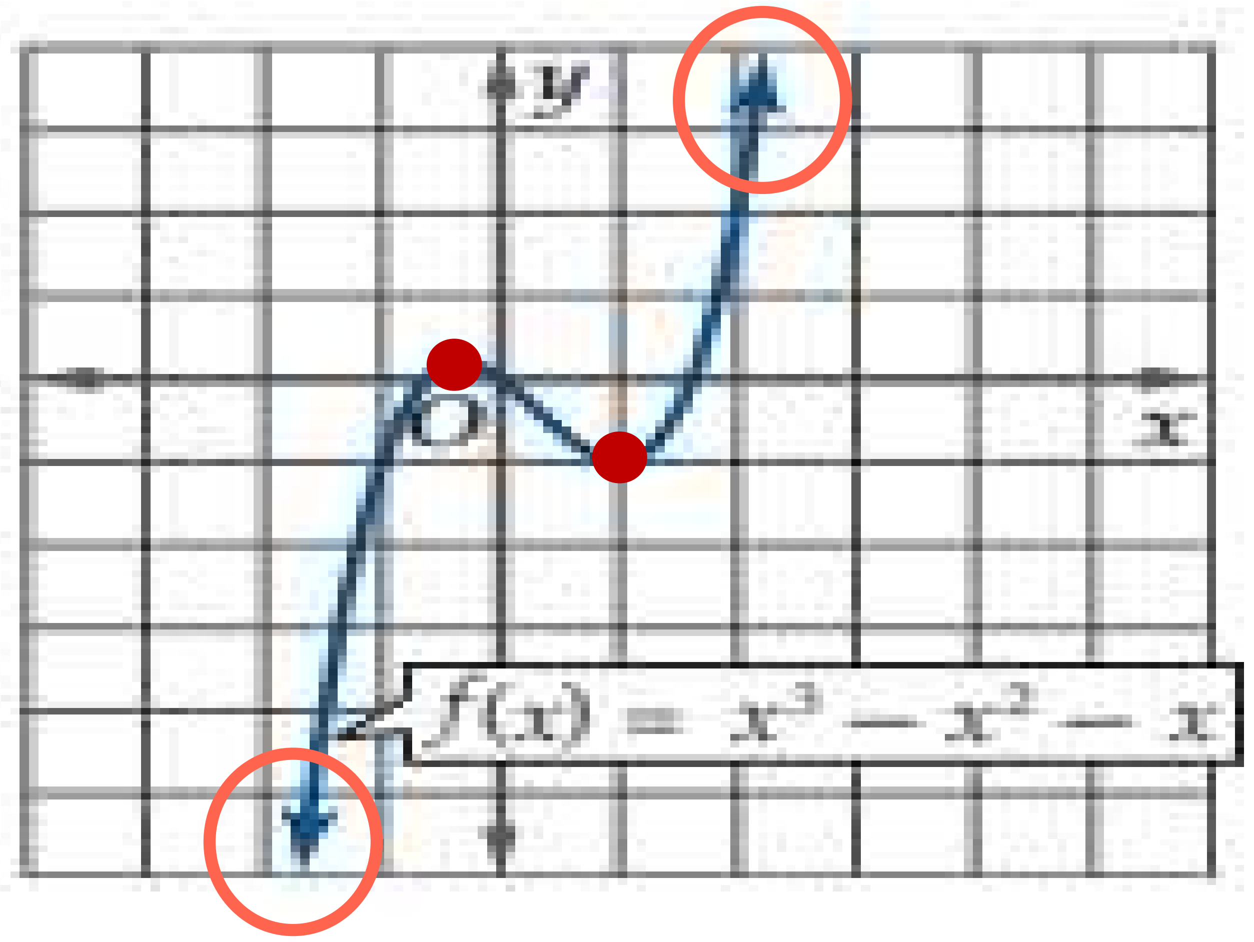
المطلقة

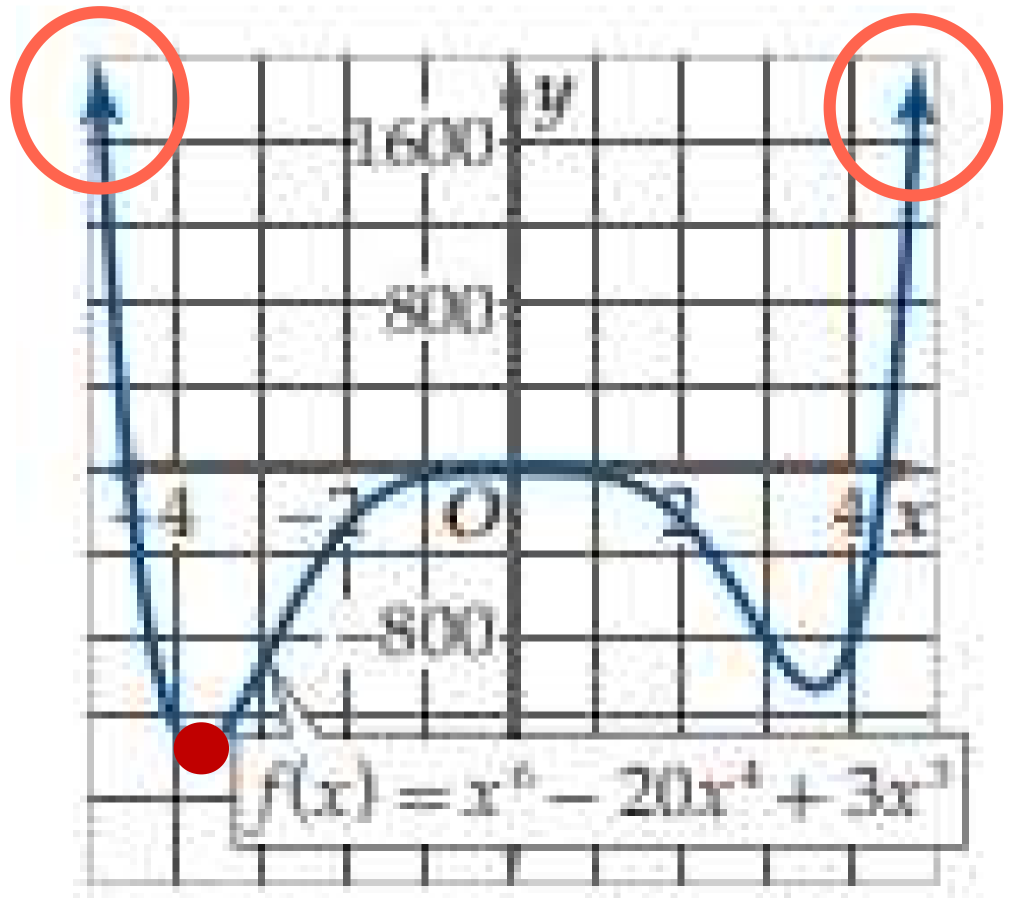
صغرى محلية(قاع)
قبلها تناقص وبعدها تزايد

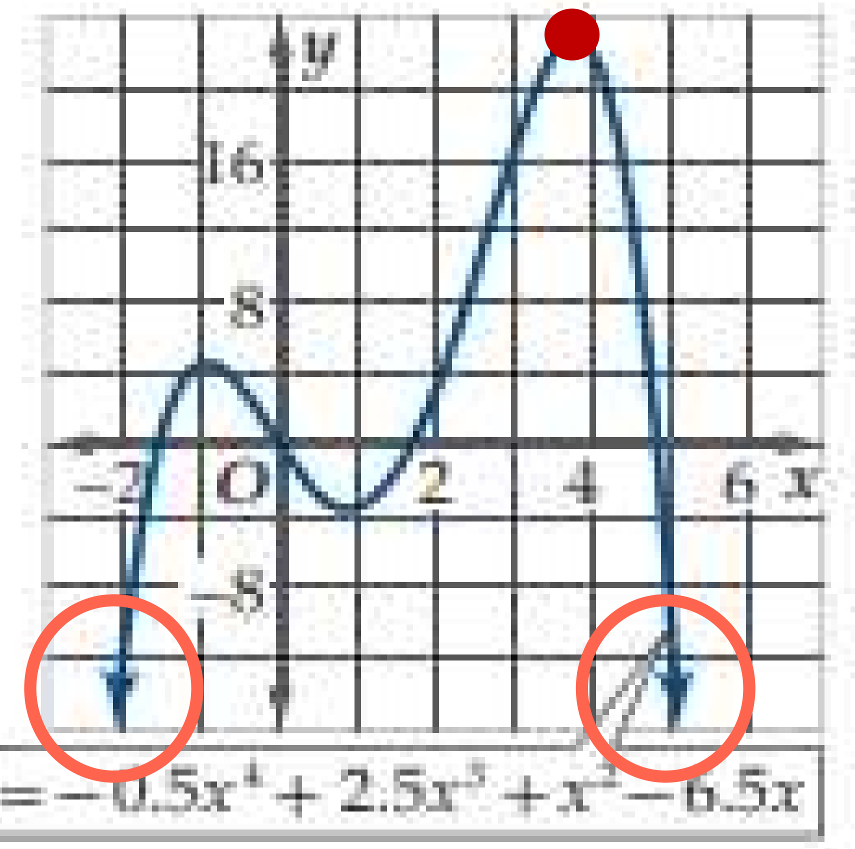
عظمى محلية(قمة)
قبلها تزايد وبعدها تناقص

صغرى مطلقة
اصغر قيمة على الأطلاق

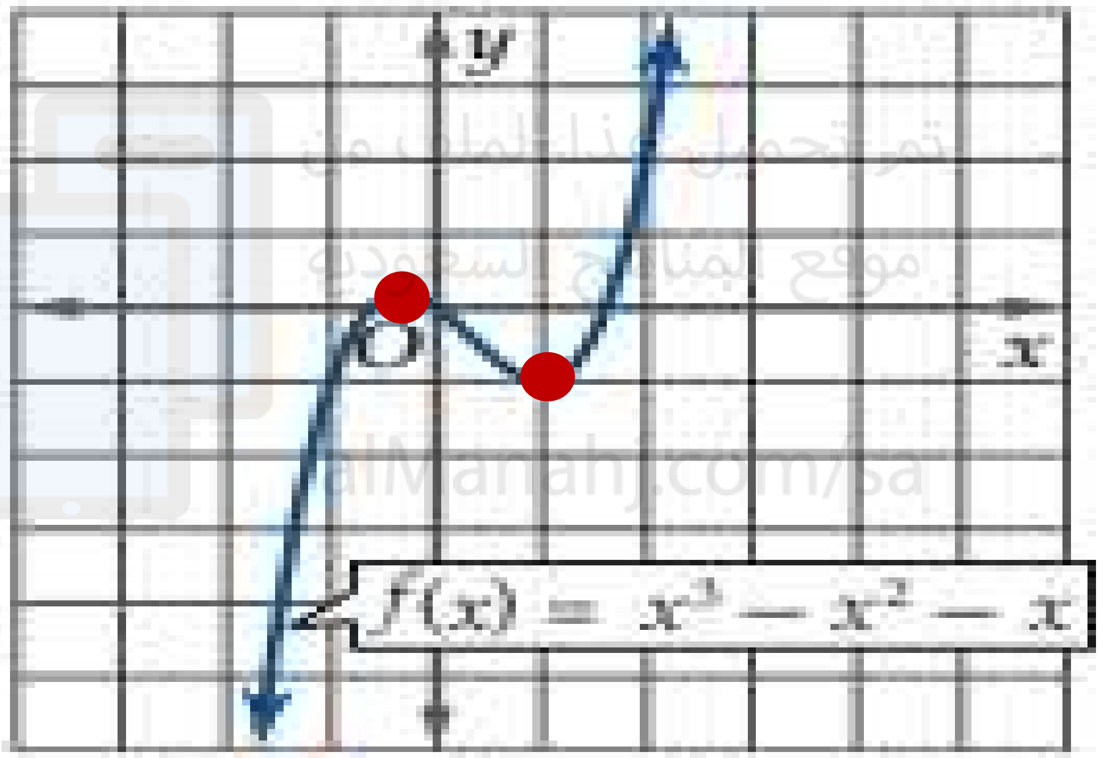
عظمى مطلقة
اكبر قيمة على الأطلاق







مثال 2 تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًا.

التحليل بيانيًا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1. لاحظ كذلك أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًا:

اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًا، والأخرى صغيرة جدًا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-1) < f(-0.5)$ و $f(0) < f(-0.5)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

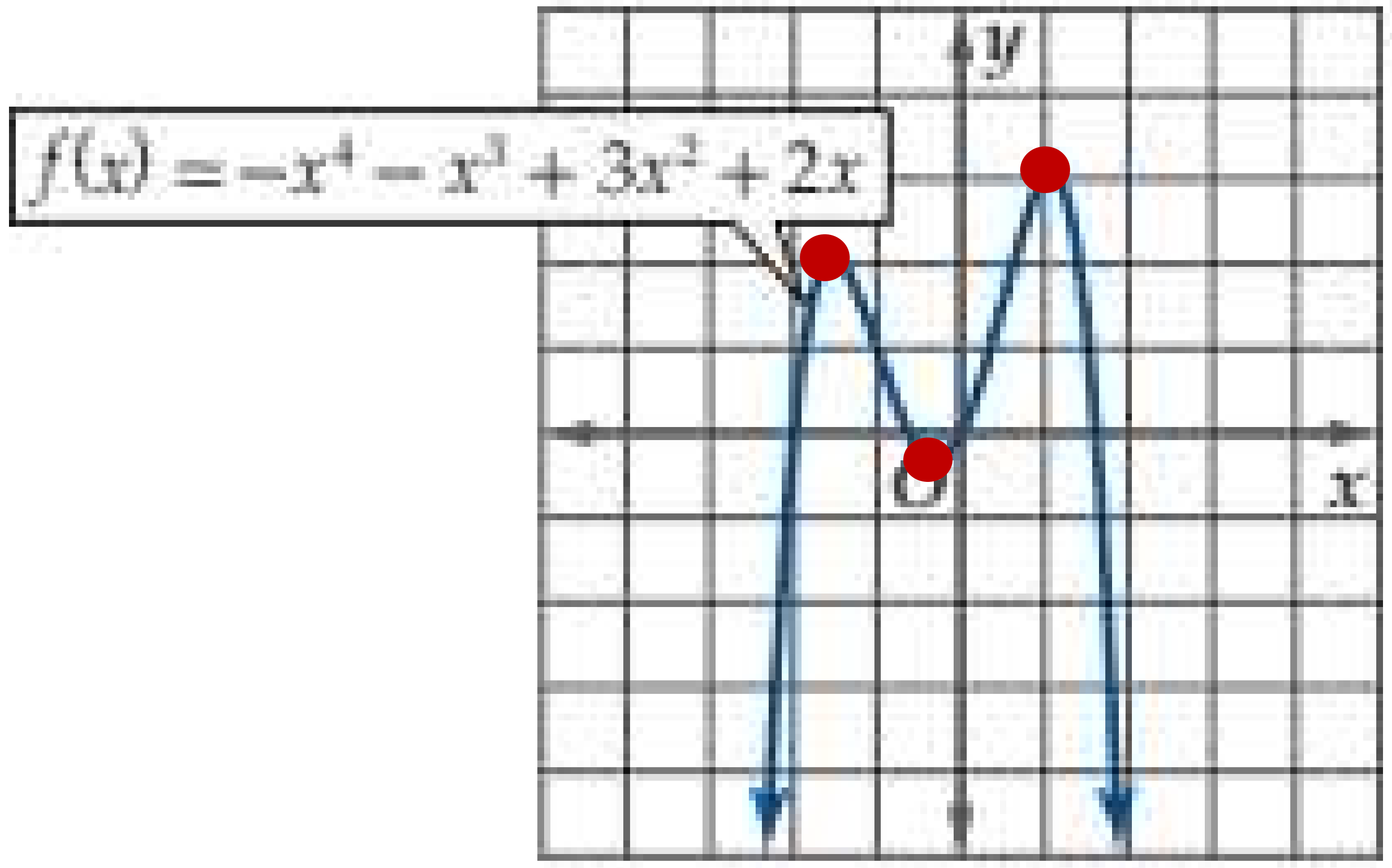
بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5)$، $f(1) < f(0.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولاً.

وبما أن $f(1) < f(-100)$، $f(100) > f(-0.5)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة فيها قيم قصوى وأوجد قيم الدالة عندها وبين نوع القيم القصوى ثم عزز اجابتك عدديا؟

2A)



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة
f(x) قيمة عظمى محلية عند x = - 1.5 مقدارها 2 .
وتوجد قيمة صغرى محلية عند x = - 0.5 ومقدارها 0.3 -
وقيمة عظمى مطلقة عند x=1 ومقدارها 3

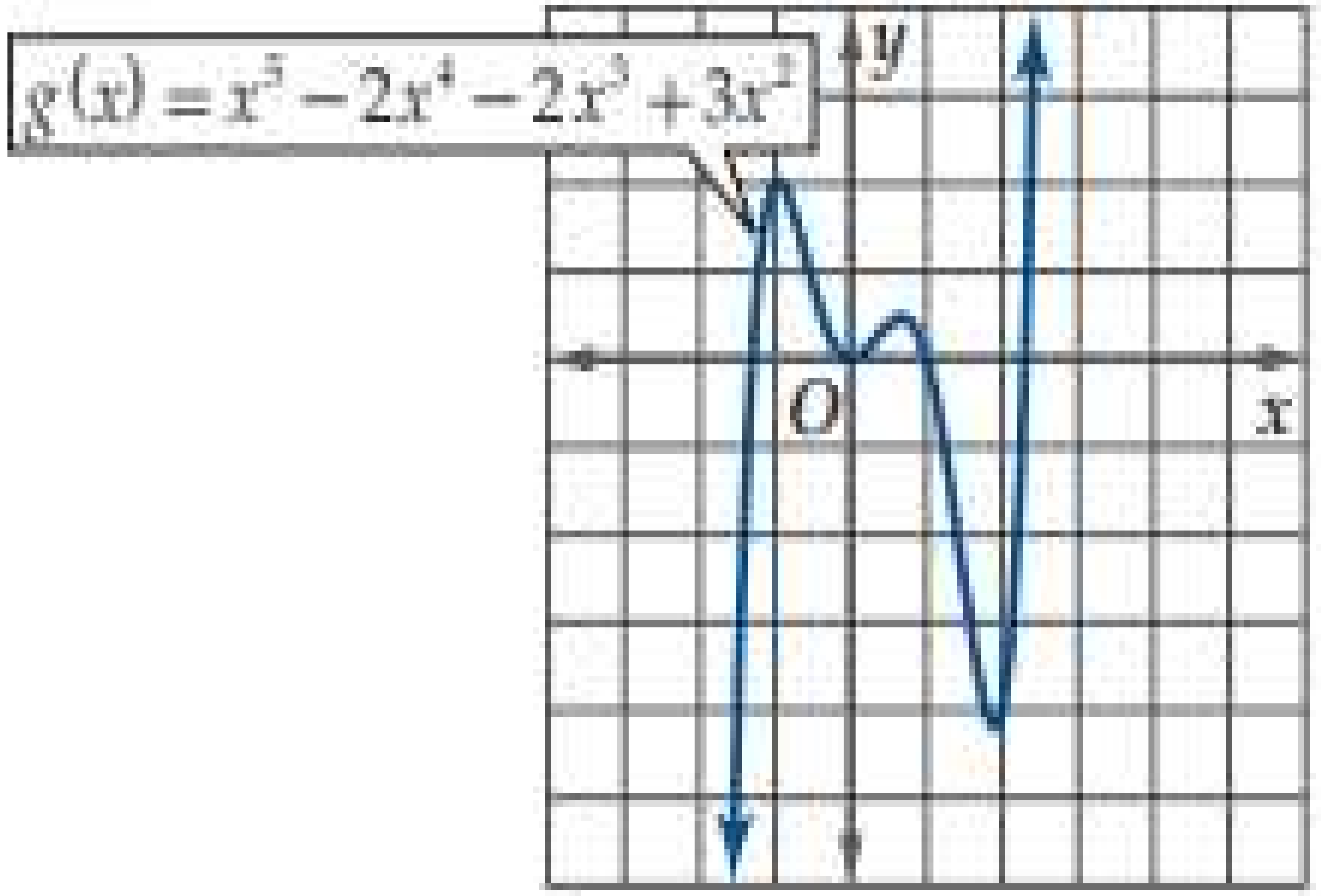
x	-10	-2	-1.5	-1	-0.5	1	10
G(x)	-8720	0	2	-0.3	2	3	-10680

تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة فيها قيم قصوى
وأوجد قيم الدالة عندها وبين نوع القيم القصوى ثم عزز اجابتك عدديا؟

يوضح التمثيل البياني ان للدالة g(x)
قيمة عظمى محلية عند x = -1 ومقدارها2 .
وقيمة صغرى محلية عند x = 0 ومقدارها 0 .
وقيمة عظمى محلية عند x = 0.5 ومقدارها 0.4 .
وقيمة صغرى محلية عند x=2 ومقدارها4 -
وسلوك طرفي التمثيل البياني يدل على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

(2B



x	-10	-1	0	0.5	2	10
F(x)	-125700	2	0	0.5	-4	86300

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

نحتاج إلى حساب التفاضل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، ونحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة والذي ستتم دراستها في الفصل الثامن (النهايات والاشتقاق). كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

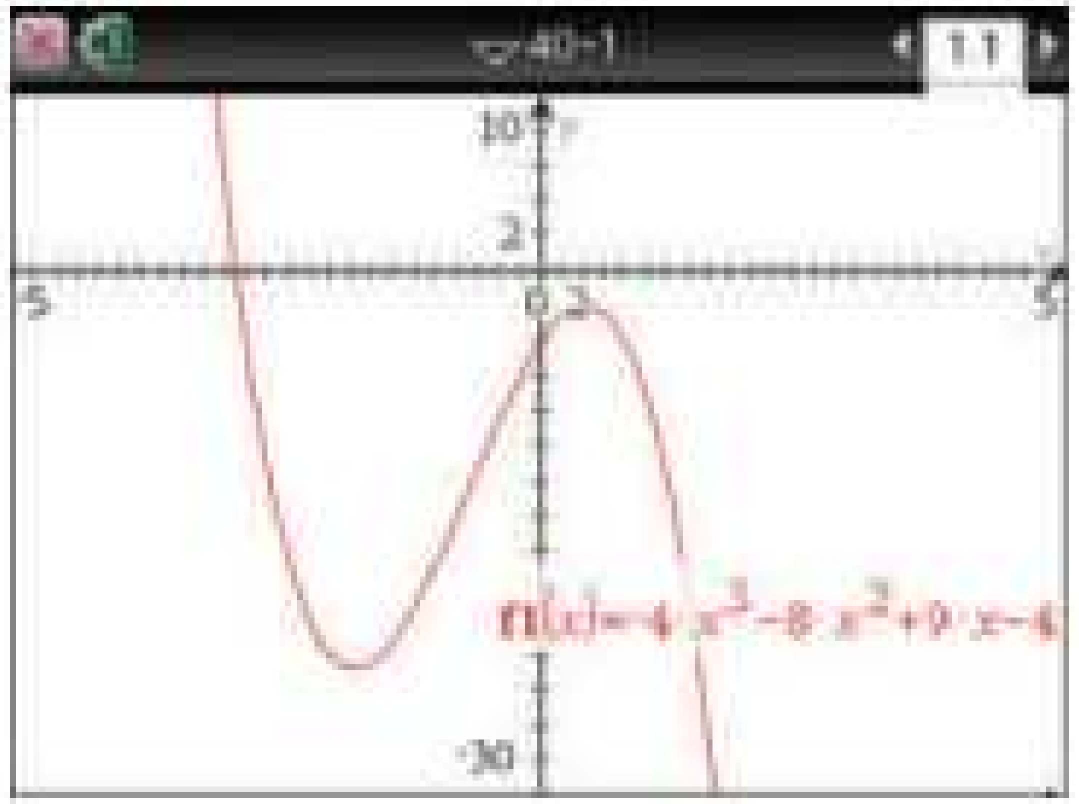
Desmos

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

مثِّل الدالة بيانيًّا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

بالضغط على المفاتيح: ، ثم اكتب الدالة واضغط enter



يوضِّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلُّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

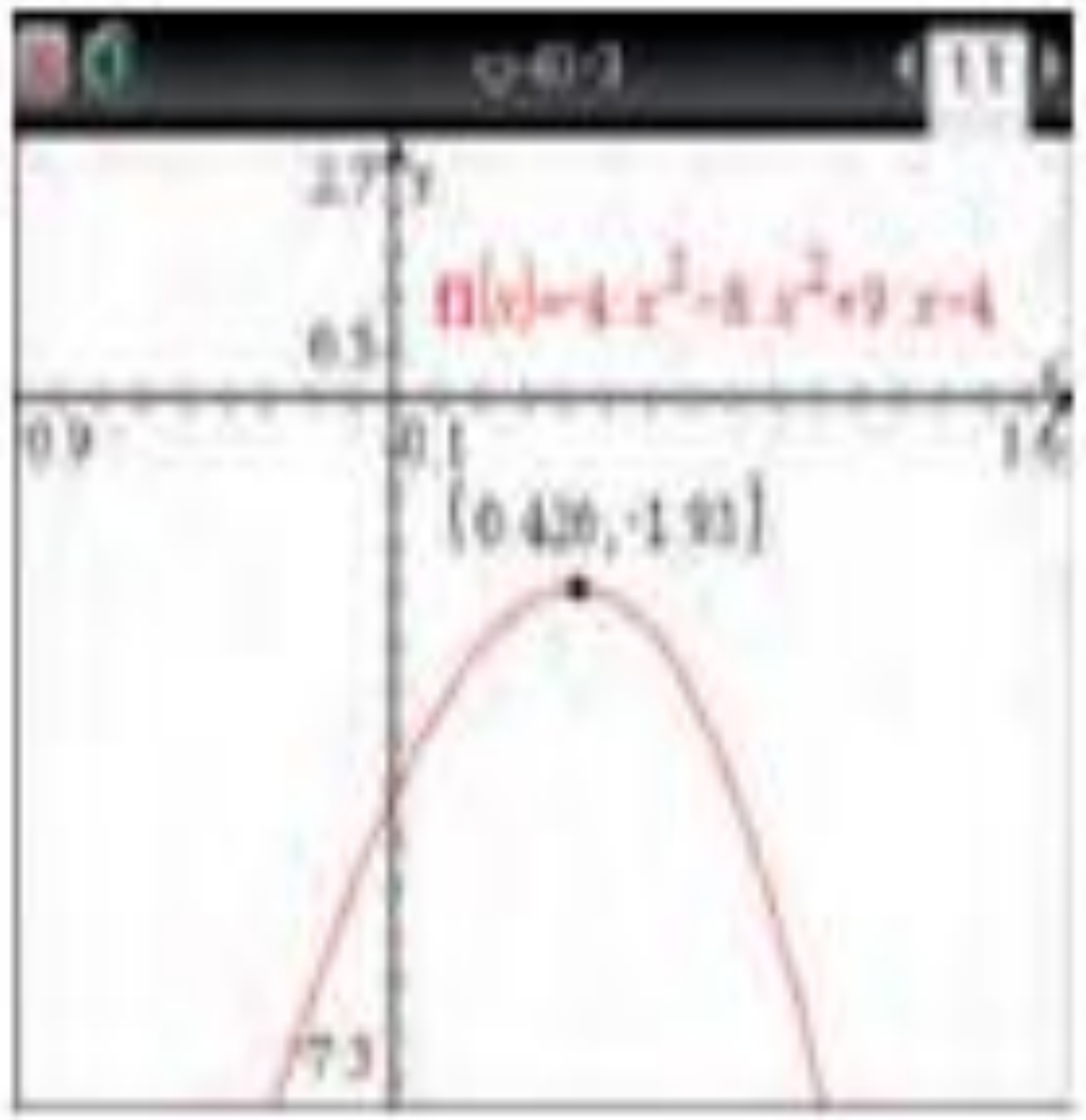
- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات

المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

اضغط على مفتاح menu ، ثم على 6: تحليل الرسم البياني ، واختر منها 3: القيمة العظمى أو 2: القيمة الصغرى ، ثم مرّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x=-1.76$ ، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$



فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات

المتزايدة

المتناقصة

الثابتة

النقطة الحرجة

العظمى

الصغرى

القصوى

متوسط معدل التغير

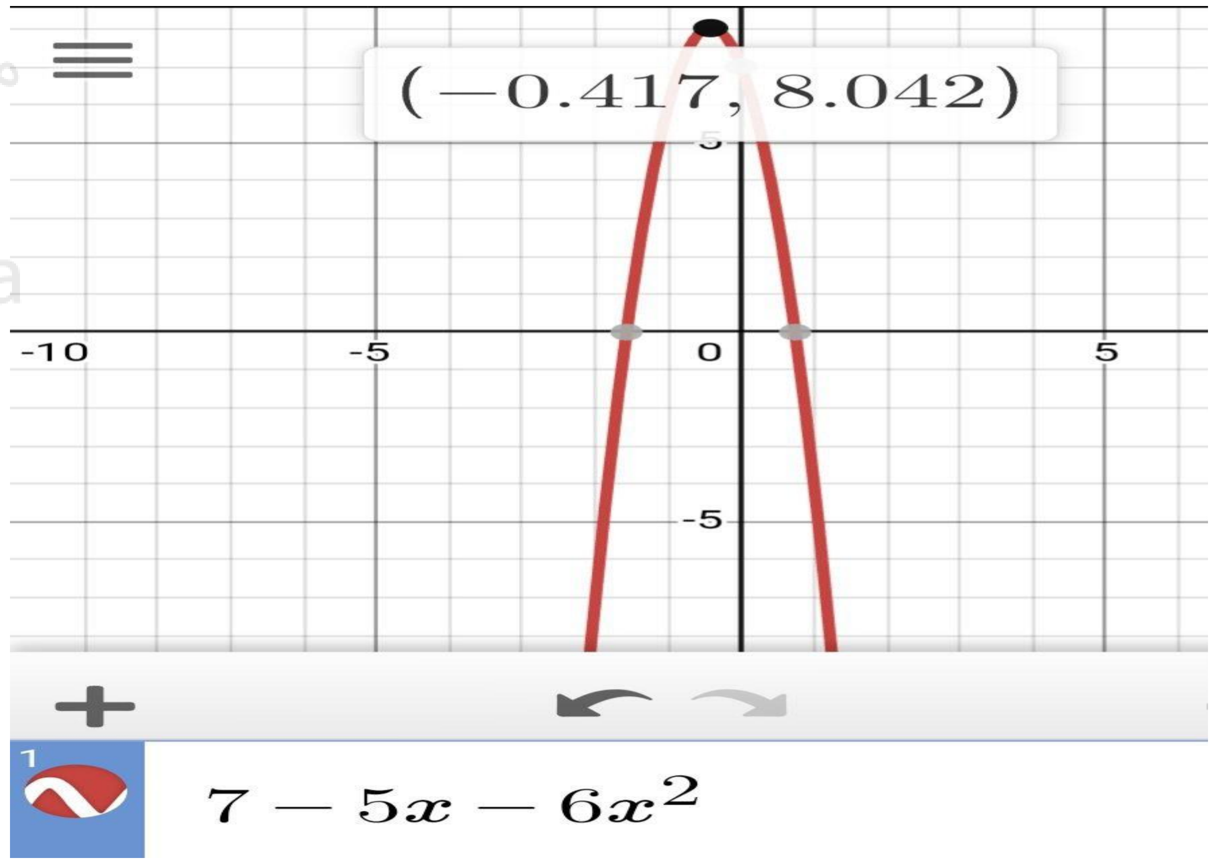
القاطع

تحقق من فهمك

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

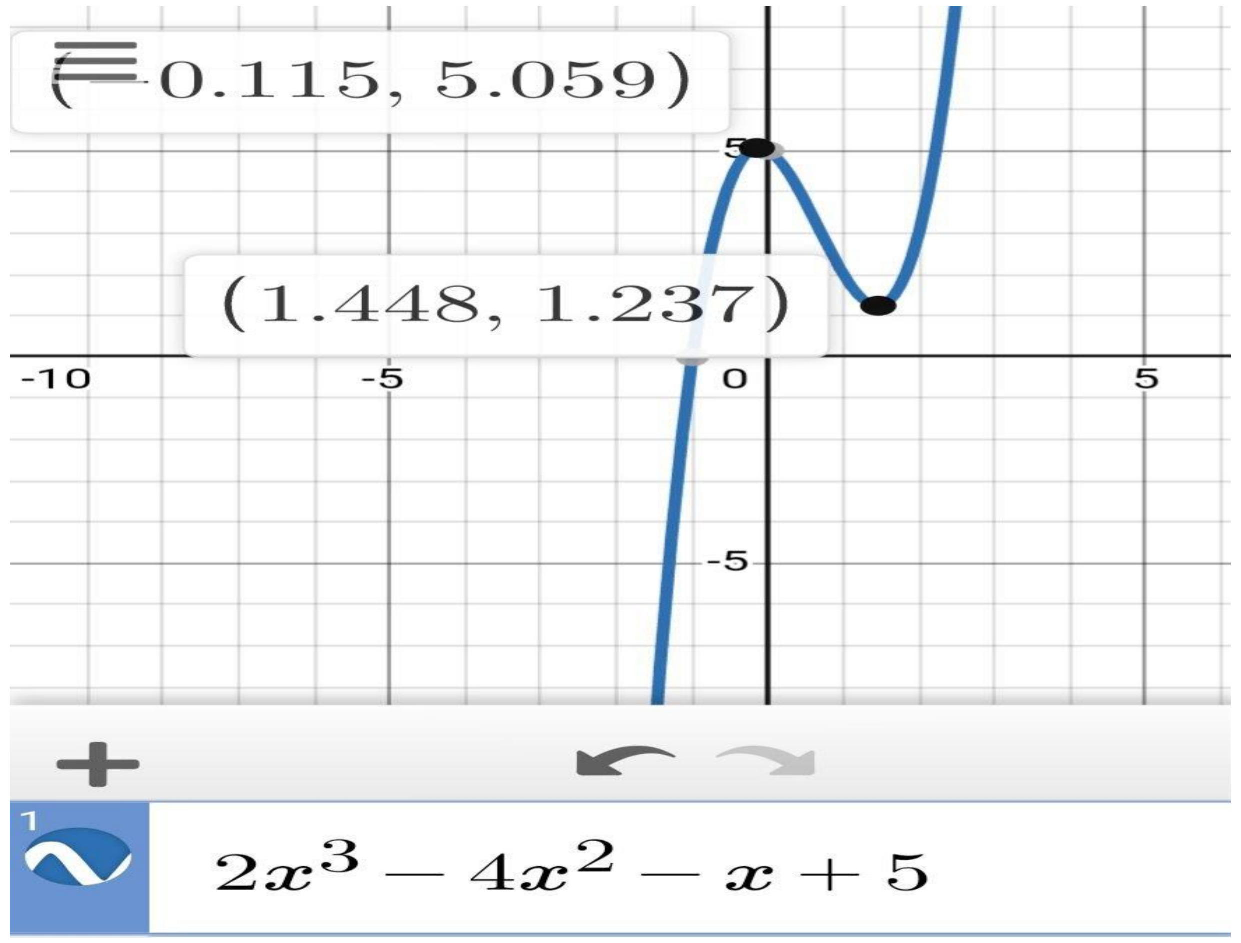
استعمل الحاسبة البيانية لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكل من الدوال وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيمة

3A) $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$



يتضح من الرسم البياني بالالة الحاسبة البيانية انه يوجد قيمة عظمي مطلقة للدالة h(x) عند النقطة (-0.42 , 8.04)

3B) $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$



يتضح من الرسم البياني بالالة الحاسبة البيانية انه يوجد قيمة عظمي محلية للدالة g(x) عند النقطة

(0.12 , 5.06)

ويوجد قيمة صغري محلية للدالة g(x) عند النقطة (1.45 , 1.24)

لا يوجد قيم قصوى مطلقة لسلوك طرفي الدالة

إرشاد تقني

ضبط:

عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملا.

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات

المتزايدة

المتناقصة

الثابتة

النقطة الحرجة

العظمى

الصغرى

القصوى

متوسط معدل التغير

القاطع

4

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

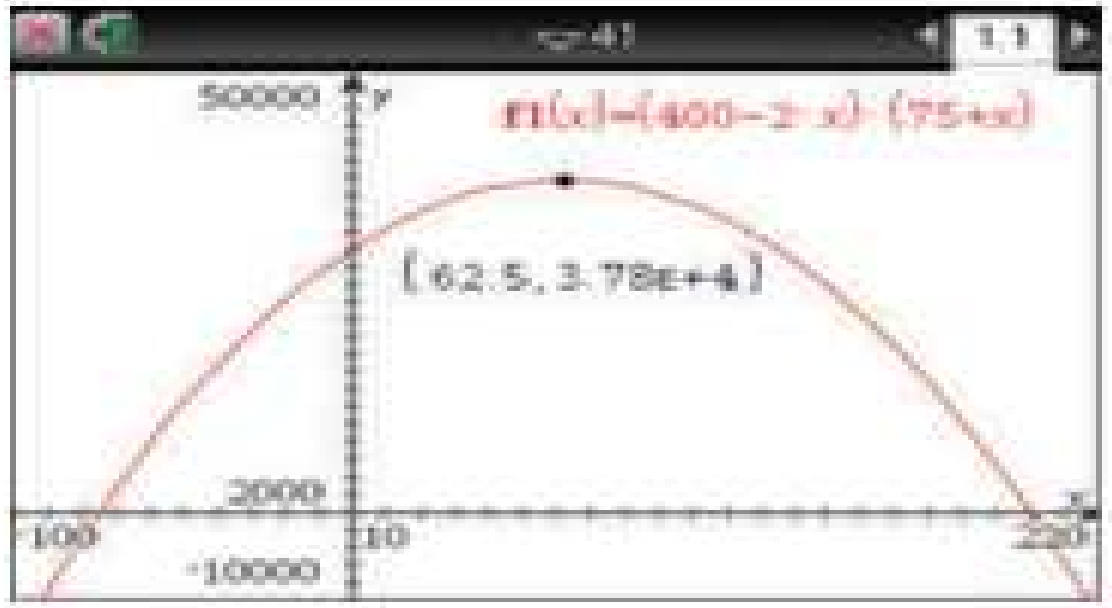
مثال 4 من واقع الحياة تطبيقات القيم القصوى

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان = عدد الأشجار في البستان × إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال

$$f(x) = (75 + x) \times (400 - 2x)$$



المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$. لذا مثِّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu، ثم 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى، ثم مرِّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.

لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة: لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات

المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

تحقق من فهمك

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi\ in^2$ أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

$$M = \pi r^2 + 2rh\pi$$
$$10\pi = \pi r^2 + 2rh\pi$$
$$10 = r^2 + 2rh$$
$$10 - r^2 = 2rh$$
$$\frac{10 - r^2}{2r} = h$$

$$v(r) = \pi h r^2$$
$$v(r) = \pi r^2 \left(\frac{10 - r^2}{2r}\right)$$
$$v(r) = \pi r \left(\frac{10 - r^2}{2}\right)$$
$$v(r) = \pi \left(5r - \frac{r^3}{2}\right)$$
$$v`(r) = \pi \left(5 - \frac{3r^2}{2}\right)$$

$$5 - \frac{3r^2}{2} = 0$$
$$10 - 3r^2 = 0$$
$$10 = 3r^2$$
$$\frac{10}{3} = r^2$$
$$r = 1.83\ in$$

$$\frac{10 - (1.83)^2}{2\,(1.83)} = h \longrightarrow h = 1.83\ in$$

ملاحظة:
M مساحة الأسطوانة الكلية
V(r) حجم الأسطوانة
r نصف القطر، h الارتفاع

فيما سبق:
درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:
- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات
المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

فيما سبق:
درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:
- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجد متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات
المتزايدة
المتناقصة
الثابتة
النقطة الحرجة
العظمى
الصغرى
القصوى
متوسط معدل التغير
القاطع

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

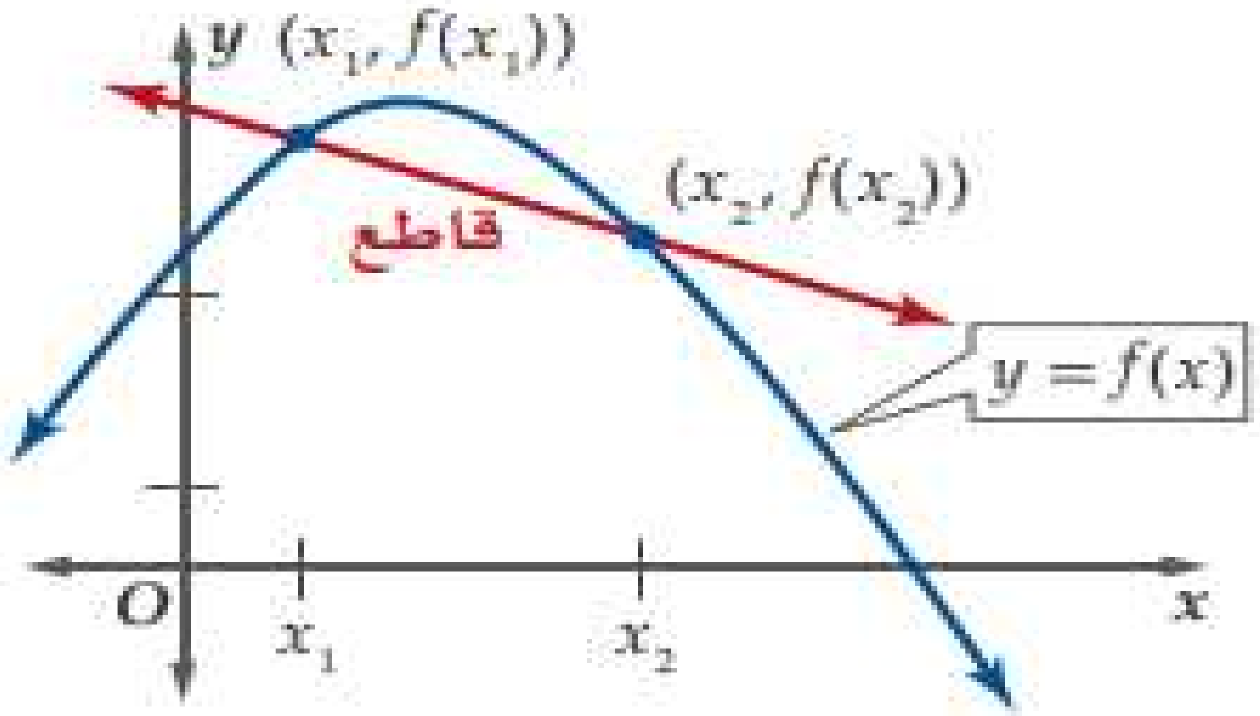
مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}.

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



صفحة 42

إذا كان متوسط معدل التغير على فترة موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة في المتوسط على الفترة. وأما إذا كان سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة في المتوسط على الفترة.

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

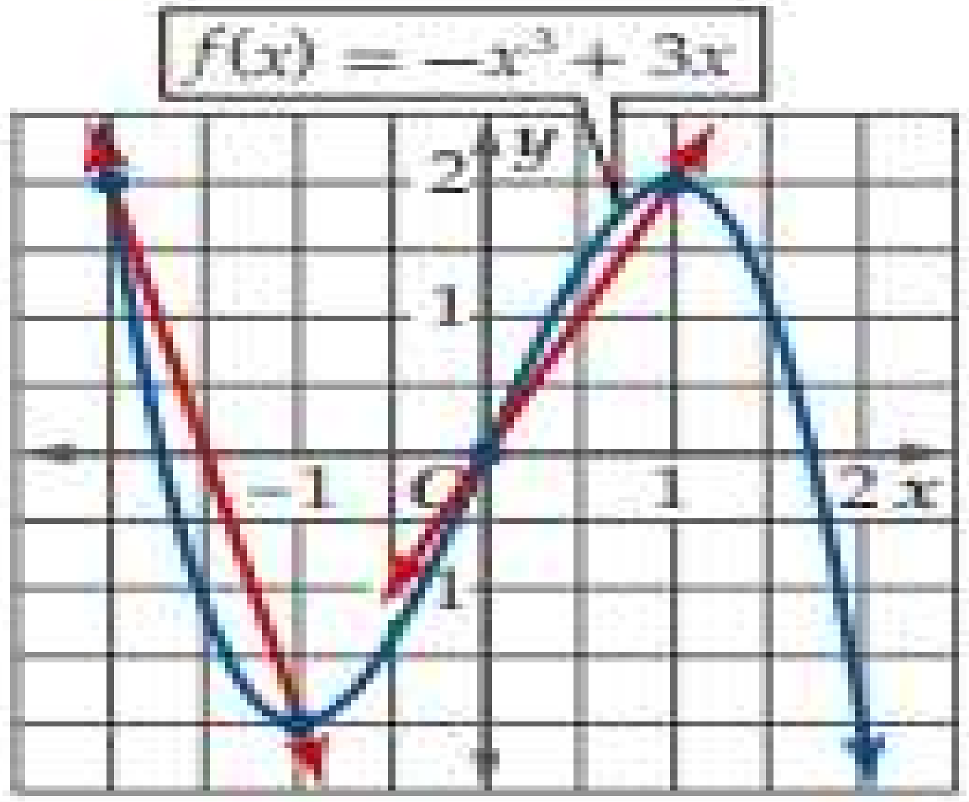
استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ عوّض -1 مكان x_2، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ عوّض $f(-1)$، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4.



الشكل 1.4.1

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ عوّض 1 مكان x_2، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ عوّض $f(1)$، $f(0)$ وبسّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.


ميله سالب


ميله موجب

تحقق من فهمك

اوجد معدل متوسط الغير في كل من الفترات المجاورة لها ؟

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$

$$m = \frac{f(x_2) - f(x)_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{2 - (-4)}{3 - 2}$$

$$= \frac{6}{1} = 6$$

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$

$$m = \frac{f(x_2) - f(x)_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(-3) - f(-5)}{-3 - (-5)}$$

$$= \frac{15 - (455)}{-3 + 5}$$

$$= \frac{-440}{2} = -220$$

4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

يُستعملَ متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوِّض 2 مكان t_2، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوِّض $d(2)$، $d(0)$، وبسِّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوِّض 4 مكان t_2، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوِّض $d(4)$، $d(2)$، وبسِّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمَّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120-150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

تنبيه!

السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

تحقق من فهمك

6) **فيزياء،** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و$d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

$$m = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(1) - d(0.5)}{1 - 0.5}$$

$$= \frac{8 - (10)}{0.5}$$

$$= \frac{-2}{0.5} = -4$$

سرعة الجسم تتناقص

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

42) متصلة

متزايدة على $(-\infty, 4)$

ثابتة على $[4, 8]$

متناقصة على $(8, \infty)$

$f(5) = 3$

43) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x = -2$

متزايدة على $(-\infty, -2)$

متزايدة على $(-2, \infty)$

$f(-6) = -6$

44) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$ ومتزايدة عندما $x > c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c. وضّح إجابتك.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيِّن نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 3-1)

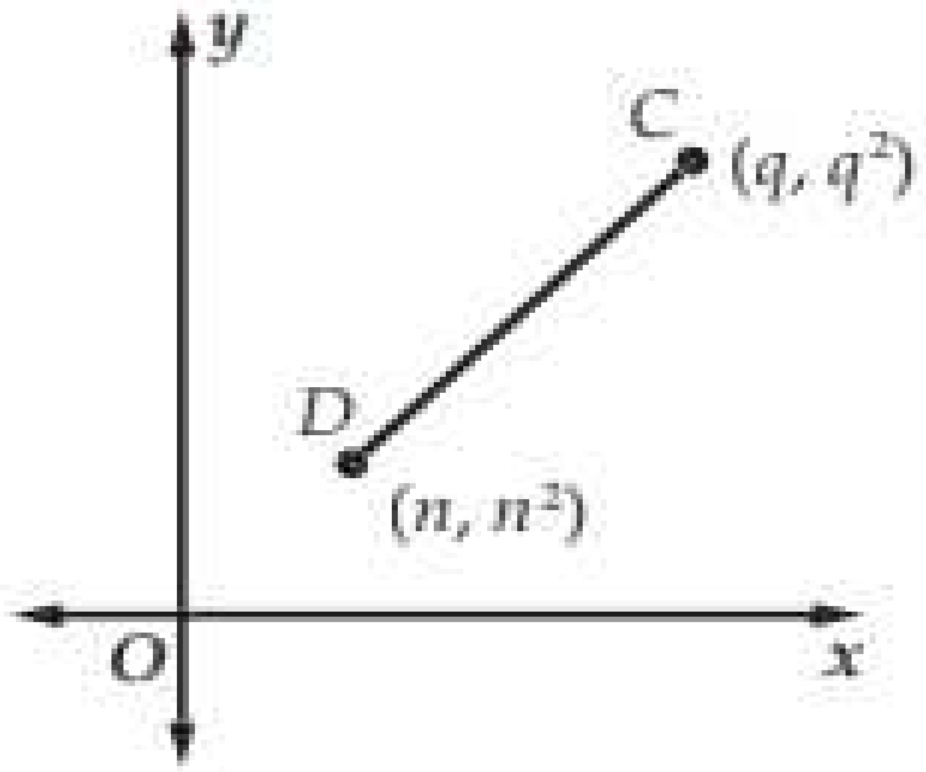
49) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ , x = -3$

50) $f(x) = \sqrt{x + 1}\ , x = 3$

51) $h(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}\ ; x = -5\ , x = 5$

أسئلة التحصيلي

61) في الشكل أدناه، إذا كان $n \neq q$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD



$q + n$

B $q - n$

C $\dfrac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\dfrac{1}{q + n}$

62) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم. C

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$