# شرح كامل لدرس المربعات الكاملة ماجد الحربي




تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 28-01-2024 18:50:43

# المعادلات التربيعية : المربعات الكاملة

رابط الدرس الرقمي

$(س \pm ص)^٢$

أهداف الدرس

- حل معادلات تتضمن مربعات كاملة.
- تحليل ثلاثية الحدود التي في صورة مربع كامل.

**المعرفة السابقة**

ما ناتج (س + ٣) (س ـ ٣)

$س^٢ - ٩$

سنتعلم اليوم:

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً وتحليلها

حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

امثلة من واقع الحياة

ماجد الحربي

# مهارة

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

$\sqrt{x}$

حساب الجذر التربيعي

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{36} =$$

$$\sqrt{4} \quad =$$

$$\sqrt{(4)(9)} = \sqrt{4} * \sqrt{9} \quad =$$

# تمهيد

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة ٠ = −٥ن$^{٢}$ + ل$_{٠}$، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي (ل$_{٠}$) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثّل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

**تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل:** تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد (أ + ب)$^{٢}$،(أ − ب)$^{٢}$. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

**تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل:** تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد (أ + ب)$^{٢}$،(أ − ب)$^{٢}$. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

(أ + ب)$^{٢}$ = (أ + ب)(أ + ب)
= أ$^{٢}$ + أب + أب + ب$^{٢}$
= أ$^{٢}$ + ٢أب + ب$^{٢}$

(أ − ب)$^{٢}$ = (أ − ب)(أ − ب)
= أ$^{٢}$ − أب − أب + ب$^{٢}$
= أ$^{٢}$ − ٢أب + ب$^{٢}$

تكون نواتج الضّرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود $١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩$ تشكّل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.

$$١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩$$

هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم؛ لأن $١٦س^{٢} = (٤س)^{٢}$.

هل الحدّ الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم؛ لأن $٢٤س = ٢(٤س)(٣)$.

هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأن $٩ = ٣^{٢}$.

## مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

### تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

**الرموز:**

$$أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^{٢}$$

$$أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢} = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^{٢}$$

**أمثلة:**

$$س^{٢} + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^{٢}$$

$$س^{٢} - ٦س + ٩ = (س - ٣)(س - ٣) = (س - ٣)^{٢}$$

$$(س \pm ص)^{٢}$$

## تمييز ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملاً وتحليلها

### مثال

أ) ٤ص$^{٢}$ + ١٢ص + ٩

**إرشادات للدراسة**

**تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً**

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، ٤ص$^{٢}$ = (٢ص)$^{٢}$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، ٩ = ٣$^{٢}$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي ٢ ( ٢ص ) ( ٣ )؟ نعم، ١٢ص = ٢(٢ص)(٣).

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة ٤ص$^{٢}$+ ١٢ص+ ٩ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملاً.

٤ص$^{٢}$ + ١٢ص + ٩ = (٢ص)$^{٢}$ + ٢(٢ص)(٣) + ٣$^{٢}$ اكتب العبارة على صورة أ$^{٢}$ + ٢أب + ب$^{٢}$

= (٢ص + ٣)$^{٢}$ حلّل باستعمال القاعدة

## مثال

ب) $٩س^٢ - ٦س + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س^٢ = (٣س)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $-٢(٣س)(٢)$؟ لا، $-٦س \neq -٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٦س + ٤$ لا تشكّل مربعًا كاملاً.

**تقويم**

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١أ) ٩ص$^{٢}$ + ٢٤ص + ١٦

٢) ٦س$^{٢}$ + ٣٠س + ٣٦

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تامًّا إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لا يمكن تحليلها فإنها تكون أوليّة.

## ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

### طرق التحليل

| الخطوات | عدد الحدود | أمثلة |
|---|---|---|
| **الخطوة ١:** حلّل بإخراج ( ق . م . أ ) | أي عدد | $٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س = ٢س(٢س^{٢} + س - ٣)$ |
| **الخطوة ٢:** تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقًا بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل. | ٢ أو ٣ | $٩س^{٢} - ١٦ = (٣س + ٤)(٣س - ٤)$<br>$١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩ = (٤س + ٣)^{٢}$ |
| **الخطوة ٣:** طبّق أنماط التحليل لـِ $س^{٢} + ب س + جـ$ أو $أ س^{٢} + ب س + جـ$ أو حلّل بتجميع الحدود. | ٣ أو ٤ | $س^{٢} - ٨س + ١٢ = (س - ٢)(س - ٦)$<br>$١٢ص^{٢} + ٩ص + ٨ص + ٦$<br>$= (١٢ص^{٢} + ٩ص) + (٨ص + ٦)$<br>$= ٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٤ص + ٣)$<br>$= (٤ص + ٣)(٣ص + ٢)$ |

## التحليل التام

**مثال**

أ) $٥س^٢ - ٨٠$

**الخطوة ١:** (ق. م. أ) للحدين $٥س^٢$، $-٨٠$ هو ٥، حلّل بإخراج (ق. م. أ).

**الخطوة ٢:** بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقًا بين مربعين.

$٥س^٢ - ٨٠ = ٥(س^٢ - ١٦)$ (ق. م. أ) للحدين ٥

$= ٥(س^٢ - ٤^٢)$ $س^٢ = س \times س$، $١٦ = ٤ \times ٤$

$= ٥(س - ٤)(س + ٤)$ تحليل الفرق بين مربعين

## مثال

**ب)** $\text{٩س}^{٢} - \text{٦س} - ٣٥$

**الخطوة ١ :** (ق. م. أ) للحدود: $\text{٩س}^{٢}$، $-\text{٦س}$، $-٣٥$ هو ١ .

**الخطوة ٢ :** بما أن ٣٥ ليس مربعًا كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً.

**الخطوة ٣ :** حلّل باستعمال النمط $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$ . هل يوجد عددان ناتج ضربهما ٩($-٣٥$)، أو $-٣١٥$ ومجموعهما $-٦$؟ نعم، $-٢١$ وَ ١٥ ناتج ضربهما $-٣١٥$. ومجموعهما $-٦$ .

| | |
|---|---|
| $\text{٩س}^{٢} - \text{٦س} - ٣٥ = \text{٩س}^{٢} + \text{م س} + \text{ن س} - ٣٥$ | استخدم القاعدة |
| $= \text{٩س}^{٢} + \text{١٥س} - \text{٢١س} - ٣٥$ | م = ١٥ ، ن = $-٢١$ |
| $= (\text{٩س}^{٢} + \text{١٥س}) + (-\text{٢١س} - ٣٥)$ | جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة |
| $= \text{٣س}(\text{٣س} + ٥) - ٧(\text{٣س} + ٥)$ | حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ) |
| $= (\text{٣س} + ٥)(\text{٣س} - ٧)$ | (٣س+٥) عامل مشترك |

## تقويم

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية ، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية" :

٢أ) $\text{٢س}^{٢} - \text{٣٢}$

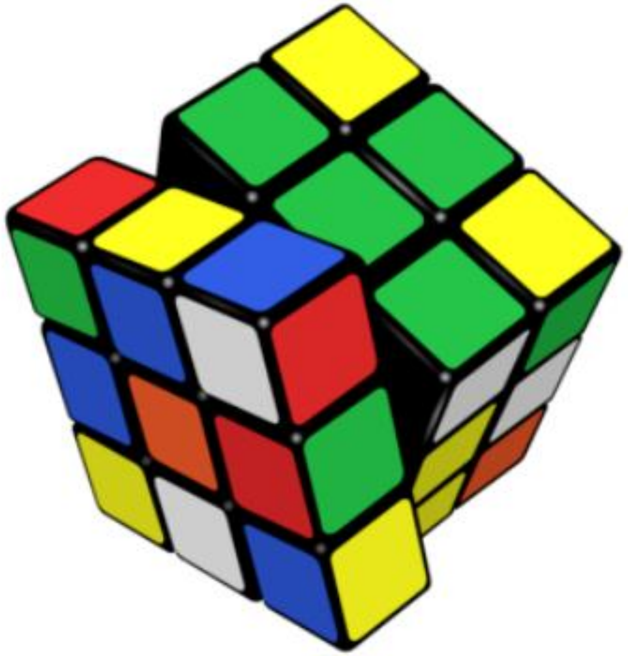
٥) $\text{٤س}^{٢} + \text{٩س} - \text{١٦}$

# حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

**حل معادلات تتضمن مربعات كاملة:** عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

(س + ٣)(س + ٣) = ٠

(س + ٣) = ٠



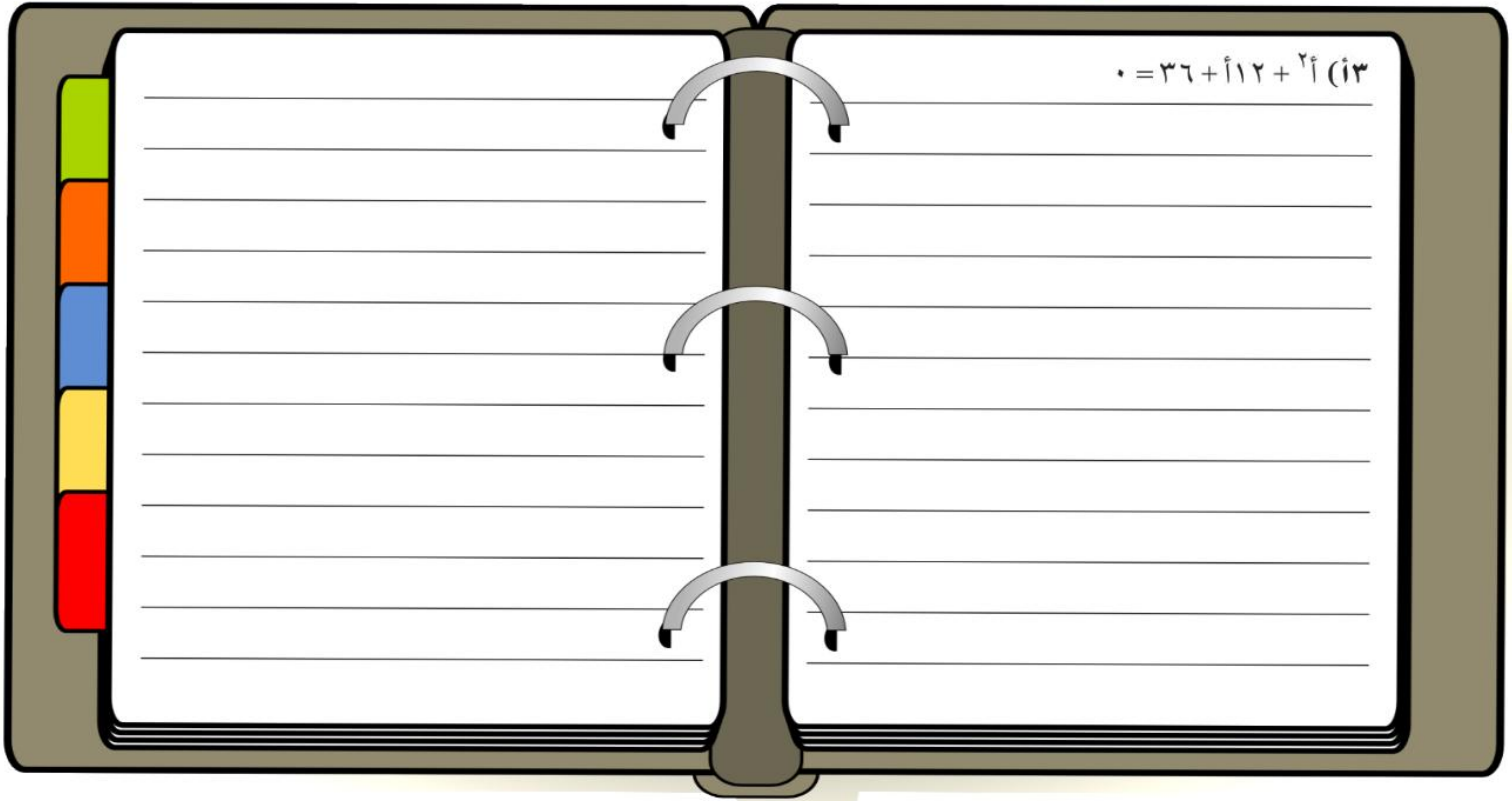
## حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

### مثال

حل المعادلة: $٩س^{٢} - ٤٨س = -٦٤$.

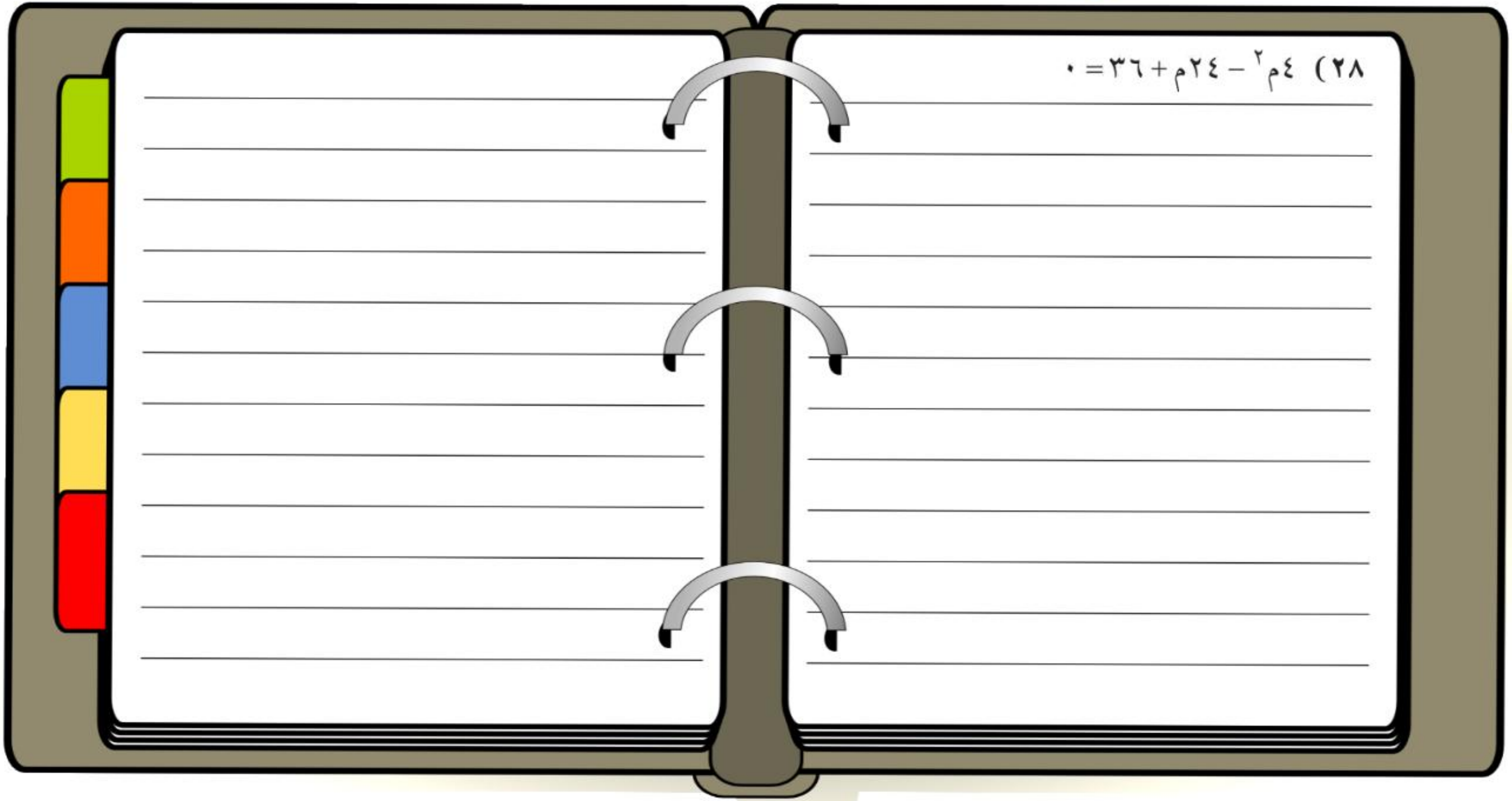
| | |
|---|---|
| $٩س^{٢} - ٤٨س = -٦٤$ | المعادلة الأصلية |
| $٩س^{٢} - ٤٨س + ٦٤ = ٠$ | أضف ٦٤ إلى الطرفين |
| $(٣س)^{٢} - ٢(٣س)(٨) + (٨)^{٢} = ٠$ | تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^{٢} - ٤٨س + ٦٤$ تمثّل مربعًا كاملاً |
| $(٣س - ٨)^{٢} = ٠$ | حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل |
| $(٣س - ٨)(٣س - ٨) = ٠$ | اكتب $(٣س - ٨)^{٢}$ كحاصل ضرب عاملين |
| $٣س - ٨ = ٠$ | ضع أحد العوامل المتكررة = ٠ |
| $٣س = ٨$ | أضف ٨ إلى كلا الطرفين |
| $س = \frac{٨}{٣}$ | اقسم كلا الطرفين على ٣ |

**تقويم** حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :



تقويم

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :



٢٨) $٤م^{٢} - ٢٤م + ٣٦ = ٠$

## استعمال خاصية الجذر التربيعي

سبق أن حللت معادلات مثل $س^٢ - ١٦ = ٠$ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضًا استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

| | |
|---|---|
| $س^٢ - ١٦ = ٠$ | **المعادلة الأصلية** |
| $س^٢ = ١٦$ | **أضف ١٦ إلى كلا الطرفين** |
| $س = \pm\sqrt{١٦}$ | **خاصية الجذر التربيعي** |

تذكّر أنه يوجد جذران تربيعيان لـِ ١٦، هما ٤ وَ −٤. لذا فإن مجموعة الحل هي {−٤، ٤}. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ {±٤}.

**قراءة الرياضيات**

**الجذر التربيعي**

يقرأ $\pm\sqrt{١٦}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

**مفهوم أساسي**

أضف إلى مطويتك

### خاصية الجذر التربيعي

**التعبير اللفظي:** لحل المعادلة التربيعية على الصورة $س^٢ = ن$، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

**الرموز:** لأي عدد حقيقي $ن \geq ٠$، إذا كان $س^٢ = ن$ فإنَّ $س = \pm\sqrt{ن}$ .

**مثال:** $س^٢ = ٢٥$

$س = \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

## استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال

أ) $(ص - ٦)^٢ = ٨١$

$(ص - ٦)^٢ = ٨١$

| | |
|---|---|
| $(ص - ٦)^٢ = ٨١$ | المعادلة الأصلية |
| $ص - ٦ = \pm\sqrt{٨١}$ | خاصية الجذر التربيعي |
| $ص - ٦ = \pm ٩$ | $٨١ = ٩ \times ٩$ |
| $ص = ٦ \pm ٩$ | أضف ٦ إلى كلا الطرفين |
| $ص = ٦ + ٩$ أو $ص = ٦ - ٩$ | افصل المعادلة إلى معادلتين |
| $= ١٥$    $= -٣$ | بسّط |
| الجذران هما ١٥ وَ $-٣$ | تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية |

## استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال

**ب)** $(س + ٦)^٢ = ١٢$

| | |
|---|---|
| $(س + ٦)^٢ = ١٢$ | المعادلة الأصلية |
| $س + ٦ = \pm\sqrt{١٢}$ | خاصية الجذر التربيعي |
| $س = -٦ \pm \sqrt{١٢}$ | اطرح ٦ من كلا الطرفين |

الجذران هما $-٦ + \sqrt{١٢}$ ، $-٦ - \sqrt{١٢}$ .

باستعمال الآلة الحاسبة، $-٦ + \sqrt{١٢} \approx -٢,٥٤$ ، $-٦ - \sqrt{١٢} \approx -٩,٤٦$

## تقويم

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

١٤أ) $(\text{أ} - ١٠)^{٢} = ١٢١$

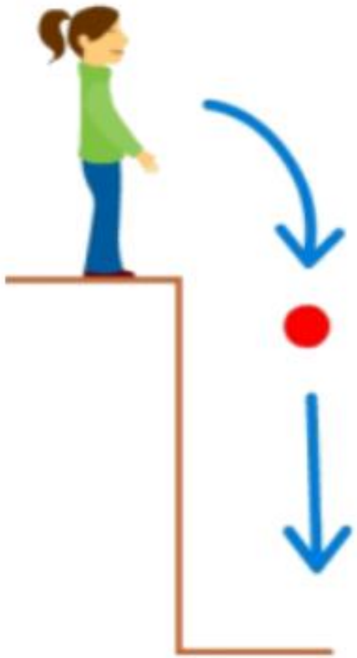
## تقويم

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

٦) $٤س^{٢} = ٣٦$

**مثالٌ من واقع الحياة**

**فيزياء:** أُسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ع_{٠}$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي ($ع_{٠}$) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.



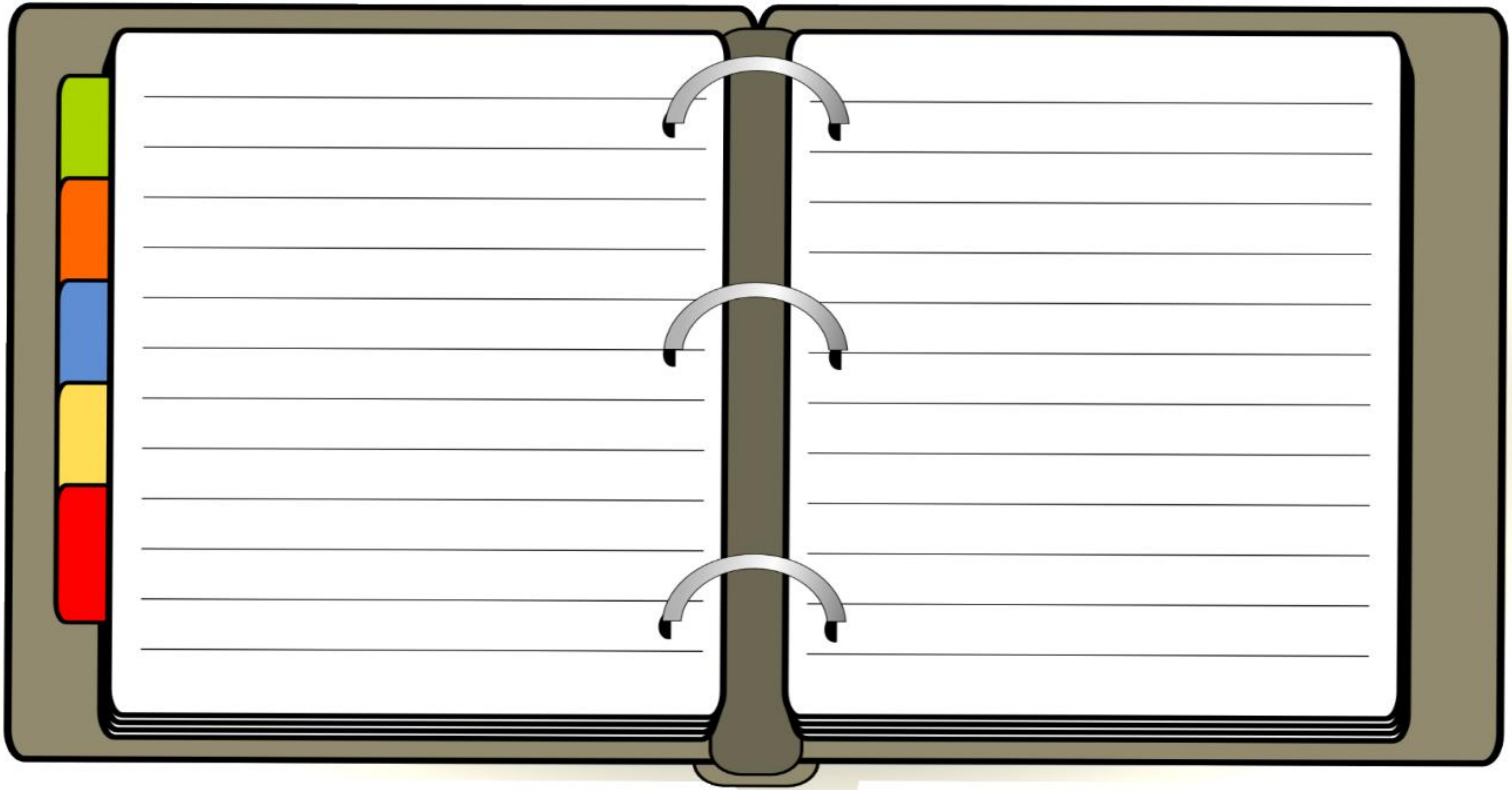
عند مستوى الأرض، ع = ٠ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن $ع_{٠} = ٦٨$

| | |
|---|---|
| $ع = -٥ن^{٢} + ع_{٠}$ | المعادلة الأصلية |
| $٠ = -٥ن^{٢} + ٦٨$ | عوض عن ع بـ صفر، وعن $ع_{٠}$ بـ ٦٨ |
| $-٦٨ = -٥ن^{٢}$ | اطرح ٦٨ من كلا الطرفين |
| $١٣,٦ = ن^{٢}$ | اقسم على -٥ |
| $\pm ٣,٧ \approx ن$ | خاصية الجذر التربيعي |

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًّا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

## تقويم

٣٨) **هندسة:** مُثِّلتْ مساحة مربع بالعبارة $٩س^{٢} - ٤٢س + ٤٩$. أوجد طول ضلع المربع.



## تقويم

٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّل منصور وفيصل العبارة $\text{س}^{٨} - \text{س}^{٤}$ تحليلاً تامًّا ، فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

**منصور**

$$\text{س}^{٨} - \text{س}^{٤} = \text{س}^{٤}(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س}^{٢} - ١)$$

**فيصل**

$$\text{س}^{٨} - \text{س}^{٤} = \text{س}^{٤}(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)$$

## ثلاثيةُ الحُدودِ الَّتي تُشكِّلُ مُربَّعًا كاملًا

الحدُّ الأولُ + الحدُّ الثاني + الحدُّ الأخيرِ

مُربَّعٌ كاملٌ

مُربَّعٌ كاملٌ

ضِعفُ ناتجِ ضربِ الجذرِ التربيعيِّ للحدينِ الأولِ والأخيرِ

### تحليلُ ثلاثيةِ الحُدودِ الَّتي تُشكِّلُ مُربَّعًا كاملًا

أ$^{٢}$ + ٢أب + ب$^{٢}$ = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)$^{٢}$

أ$^{٢}$ − ٢أب + ب$^{٢}$ = (أ − ب)(أ − ب) = (أ − ب)$^{٢}$

س$^{٢}$ + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)$^{٢}$

س$^{٢}$ − ٦س + ٩ = (س − ٣)(س − ٣) = (س − ٣)$^{٢}$

قيم نفسك

### اختر الإجابة الصحيحة

ثلاثية الحدود $١٦س^٢ + ١٥س + ٤$ هي كثيرة حدود أولية .

- صواب
- خطأ

### اختر الإجابة الصحيحة

تحلل ثلاثية الحدود $س^٢ - ١٦س + ٦٤$ على الصورة $(س + ٨)^٢$

- صواب
- خطأ